

Способы повышения точности гармонического метода имитации двумерных сигналов

В.В. Сюзев¹, А.В. Пролетарский¹, Д.А. Миков¹, И.И. Дейкин¹

¹ МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Россия, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5/1

Аннотация

Статья посвящена рассмотрению свойств гармонического метода имитации в рамках спектральной теории и оценке качества этого метода. Проведён обзор литературы о существующих методах моделирования многомерных случайных полей, позволивший выполнить сравнение этих методов, при этом критериями сравнения были сложность алгоритма, вычислительные затраты и требования к памяти, требования к ковариационной функции и сетке. Выявлены слабые места, такие как недостаточная точность и высокая вычислительная сложность, характерные для спектральных методов имитации, к которым относится гармонический метод. Рассмотрены формы симитированного гармоническим методом сигнала для разных базисов: обнаружено свойство центросимметричности для квадратных сигналов в базисе Фурье, подобное ему свойство для прямоугольных сигналов в базисе Фурье, свойство симметричности квадратного сигнала в базисе Хартли и отсутствие подобных свойств у прямоугольного сигнала, симитированного в базисе Хартли. Проведён сравнительный анализ точности имитации двумерных сигналов, как частного случая многомерных, гармоническим методом в базисах Фурье и Хартли. Демонстрируется, что в зависимости от характеристик дискретизации симитированный сигнал в базисе Фурье отличается от этого же сигнала, симитированного в базисе Хартли, по точности. Как следствие выполненного исследования, сформированы рекомендации по выбору базиса в конкретной задаче имитации двумерных сигналов. Описано влияние обнаруженных свойств на вычислительную сложность метода. Предложены способы применения этих свойств для имитации произвольных двумерных сигналов.

Ключевые слова: гармонический метод имитации сигналов, базис Фурье, базис Хартли, автокорреляционные функции, центросимметричные матрицы.

Цитирование: Сюзев, В.В. Способы повышения точности гармонического метода имитации двумерных сигналов / В.В. Сюзев, А.В. Пролетарский, Д.А. Миков, И.И. Дейкин // Компьютерная оптика. – 2024. – Т. 48, № 2. – С. 294-302. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1381.

Citation: Syuzev VV, Proletarsky AV, Mikov DA, Deykin II. Ways to improve the accuracy of the harmonic method for simulating two-dimensional signals. Computer Optics 2024; 48(2): 294-302. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1381.

Введение

Настоящая статья продолжает серию статей, описывающих разрабатываемую авторами новую спектральную теорию имитации многомерных сигналов в реальном времени и результаты исследований, начатых в предыдущих статьях, опубликованных в журнале «Компьютерная оптика» [1, 2].

Результаты выполненного обзора методов имитации, представленные далее в статье, показывают, что спектральные методы имитации сигналов недостаточно точны и обладают значительной вычислительной сложностью. Однако гармоническая имитация в рамках спектральной теории позволяет использовать различные базисы, которые дают разные результаты имитации касательно точности. Выбор базиса может использоваться для подстройки метода имитации под конкретную задачу в целях повышения точности. Кроме того, существуют возможности снижения вычислительной сложности.

В данной статье в первом параграфе приведен обзор существующей литературы и выводы различных ученых о перспективности семи групп методов имитации многомерных сигналов. Особенное внимание уделено слабым местам спектральных методов имитации сигналов, к которым можно отнести гармонический метод. Критика касается точности метода и ограниченности круга задач, где такая имитация применима. Во втором параграфе статьи проводится сравнение погрешностей имитации в базисах Фурье и Хартли двумерных сигналов, которые являются частным случаем многомерных сигналов. Сравнение показывает, что на одинаковой задаче с разными характеристиками дискретизации базисы дают разные результаты. Третий параграф исследует свойства двумерных сигналов, симитированных гармоническим методом, которые могут использоваться для снижения вычислительной сложности. Выводы по проведенным исследованиям приведены в заключении.

1. Обзор методов моделирования многомерных случайных полей

Моделирование случайных полей используется для имитации фона в оптико-электронных системах, при описании свойств рельефа земной поверхности, для моделирования метеополей, применяется в устройствах фильтрации и кодирования изображений. Типичными примерами применения моделей многомерных случайных полей в системах связи являются: описание фазовых искажений на двумерной сетке время-частота; описание пространственно-временных сигналов в системах связи с несколькими антеннами. Моделирование случайных полей применяется в имитации и цифровой обработке сигналов, которые рассматриваются как частный случай таких полей.

В настоящее время среди множества подходов к моделированию случайных полей преобладают следующие:

- 1) Turning Bands Method (ТВМ) [3–6];
- 2) спектральный метод [7–10];
- 3) метод матричной декомпозиции [11–15];
- 4) разложение Карунена–Лоэва [16–18];
- 5) метод скользящего среднего [19–21];
- 6) последовательное моделирование [22–24];
- 7) метод локального среднего [25–28].

Turning Bands Method (ТВМ) был впервые предложен в 1973 году и применялся для моделирования одномерных случайных полей [3]. Затем метод был развит и усовершенствован, в том числе для многомерных изотропных и анизотропных полей [4–6]. В частности, было предложено использовать больше произвольных линий для многомерных полей, а также выявлено улучшение производительности за счёт использования быстрого преобразования Фурье в процессе генерации линии.

Идея метода ТВМ состоит в том, чтобы представить случайный процесс рядом независимых одномерных процессов, привязанных к одной точке пространства, в то время как значение функции в произвольной точке пространства можно найти, спроецировав точку на каждый линейный процесс. Линейный процесс должен сохранять ковариационную структуру таким образом, чтобы ковариационная функция одномерного линейного процесса соответствовала исходной ковариационной функции.

Спектральный метод имитирует случайное поле путём манипуляций в частотной области. Во многих работах используется имитация нескольких коррелированных случайных полей. В данном методе широко применимы преобразование Фурье и быстрое преобразование Фурье [7–10].

Метод матричной декомпозиции является простым в реализации подходом к имитации случайного поля. Предположим, что нас интересуют только N точек в случайном поле, которые обозначаются как вектор $x \in R^N$, тогда можно построить ковариационную

матрицу R , включающую эти точки. Поскольку ковариационная матрица R является симметричной положительно определённой, то здесь применима факторизация Холецкого. Широко распространены две разновидности метода матричной декомпозиции: на базе циркулянтов [11, 12] и на базе иерархических матриц [13–15].

Разложение Карунена–Лоэва (KL-разложение) представляет собой подход к разложению случайного процесса на собственные значения λ и собственные функции f его ковариационного ядра. Метод широко применяется для моделирования случайных полей, но отмечается частое возникновение ошибки усечения [16–18].

Метод скользящего среднего берёт своё начало из метода матричной декомпозиции. Впервые он был применён для моделирования одномерного процесса в 1974 году [19], а затем расширен для различных общих ковариационных функций на многомерные случаи [20]. Также в методе скользящего среднего может быть использовано быстрое преобразование Фурье [21].

Последовательное моделирование в некотором роде также можно рассматривать как метод имитации случайных полей. Данный метод основан на функции плотности вероятности многомерной случайной величины:

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, \dots, x_n) &= p(x_2, \dots, x_n | x_1) p(x_1) = \\ &= p(x_3, \dots, x_n | x_2, x_1) p(x_2 | x_1) p(x_1). \end{aligned}$$

Приведённое выше уравнение может быть записано рекурсивно, что указывает на то, что мы можем сначала сгенерировать x_1 , затем сгенерировать x_2 в зависимости от x_1 и т.д. Это сводит многомерную задачу к последовательности одномерных задач [22–24].

Метод локального среднего был впервые предложен в 1990 году [25]. Многие последующие работы способствовали дальнейшему развитию этого метода [26–28]. Сначала присваивается усреднённое значение всей области, затем область разбивается на подобласти, и этим подобластям также присваиваются усреднённые значения. Процесс выполняется рекурсивно до тех пор, пока не будет достигнуто окончательное разрешение, где случайное поле представлено этими локальными средними значениями.

Для выбора того или иного метода в соответствии с конкретными требованиями необходимо провести их сравнительный анализ по следующим критериям: сложность алгоритма, вычислительные затраты и требования к памяти, требования к ковариационной функции и сетке. Рассмотрим каждый критерий отдельно.

1.1. Сложность алгоритма

Метод матричной декомпозиции, KL-разложение и метод скользящего среднего просты в реализации. Спектральный метод включает в себя дискретное или

быстрое преобразование Фурье, в котором нужно сначала выбрать шаг дискретизации dW , а в случае быстрого преобразования Фурье нужно уделить особое внимание сетке и приращению частоты. Последовательное моделирование требует вычисления ожидаемого среднего значения и дисперсии перед каждым условным моделированием. Метод ТВМ требует одномерного представления исходного случайного поля, после чего линейный процесс генерируется спектральным методом. Метод локального среднего включает рекурсивное среднее подразделение, и на каждом этапе необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений.

1.2. Вычислительные затраты и требования к памяти

Затраты метода ТВМ соответствуют генерации серий линейных процессов. Последовательное моделирование генерирует случайное поле гораздо меньшей размерности на каждом шаге. Метод локального среднего включает в себя генерацию отдельных гауссовских случайных величин, среднее значение и дисперсия которых вычисляются с помощью системы локальных алгебраических уравнений. Спектральный метод включает генерацию приращений Фурье dW и умножение на матрицу преобразования Фурье. Метод скользящего среднего включает свёртку ковариационной функции и стандартных гауссовских случайных величин. Процесс можно ускорить с помощью быстрого преобразования Фурье. KL-разложение использует низкоранговое приближение ковариационной функции, затем перемножает собственные значения, собственные функции и стандартный гауссовский случайный вектор между собой. Метод матричной декомпозиции является наиболее затратным методом, поскольку включает декомпозицию Холецкого и умножение матрицы на вектор.

1.3. Применимость (ковариационная функция, тип сетки и точность)

Метод ТВМ работает для конкретной ковариационной функции, которая имеет соответствующее одномерное ковариационное или спектральное представление. Он может имитировать точки произвольного положения, и моделирование представляет собой приближение точного случайного поля. Спектральный метод работает с ковариационными функциями, для которых существует спектральная плотность мощности. Дискретное преобразование Фурье сравнительно медленное и снижает преимущество метода, поэтому необходимо использовать быстрое преобразование Фурье. В методе быстрого преобразования Фурье сетка должна быть прямоугольной. Поскольку быстрое преобразование Фурье ускакает интегрирование в конечной полосе пропускания, симуляция представляет собой аппроксимацию. Матричное разложение работает для всех ковариацион-

ных функций, оно может генерировать случайное поле на всех типах сеток, а имитация является точной. Метод скользящего среднего работает только с теми ковариационными функциями, где возможна свёрточная декомпозиция. Свёртку можно ускорить с помощью быстрого преобразования Фурье, но в случае скользящего среднего можно получить дискретное разложение. Таким образом, метод скользящего среднего с быстрым преобразованием Фурье представляет собой аппроксимацию и работает на прямоугольной сетке. В дискретном случае KL-разложение работает для всех видов ковариационных функций, оно может генерировать случайные поля в произвольной позиции. Поскольку это низкоранговое приближение, такая имитация также представляет собой аппроксимацию. Последовательное моделирование, по существу, рекурсивно генерирует часть случайного поля с использованием любых других методов, поэтому применимость зависит от конкретного выбранного метода. Метод локального среднего работает для любого типа ковариации, он генерирует случайные поля на прямоугольной сетке, а симуляция представляет собой аппроксимацию.

1.4. Вывод по сравнительному обзору методов моделирования

Таким образом, метод ТВМ, спектральный метод и метод скользящего среднего пригодны только для определённых видов ковариационных функций. Спектральный метод и метод локального среднего работают только с прямоугольной сеткой. Наибольшую точность имитации обеспечивает метод матричной декомпозиции.

Следующий параграф статьи посвящён устранению выявленных недостатков спектрального метода на примере гармонической имитации двумерных сигналов как частного случая многомерных полей.

2. Спектральные методы моделирования: сравнительный анализ двумерной имитации в базисах Фурье и Хартли

Гармонический метод имитации в рамках спектральной теории относится к спектральным методам и позволяет использовать различные базисы имитации, например, тригонометрический, Фурье, Хартли. Использование разных базисов приводит к разным результатам имитации, а значит, возникает возможность подбора базиса под конкретную задачу. Например, корректный подбор базиса может помочь добиться минимизации погрешности, что будет показано далее. Такая подстройка под задачу при гармонической имитации означает, что спектральный метод имитации допускает улучшение по критерию применимости. Демонстрация различия в точности имитации в данном параграфе проводится при сравнении двух способов имитации – в базисах Фурье и Хартли.

2.1. Методика сравнения

Проводится имитация стационарных сигналов с существующими преобразованиями Фурье по функции спектральной плотности энергии (ФСПЭ), задаваемой математическим выражением. Рассматриваются случаи неограниченной ФСПЭ и ФСПЭ, ограниченной частотами среза.

Дискретная ФСПЭ $S_E(\omega_1, \omega_2)$ определена при $\omega_1 \in [0, N_1]$, $\omega_2 \in [0, N_2]$, где ω_1 и ω_2 – частоты в двух измерениях, N_1 и N_2 – количество шагов дискретизации по двум осям определения сигнала. В рамках данного исследования рассматривались сигналы с двумерным периодом $T = T_1 = T_2 = 1$. ФСПЭ агрегирует амплитудные спектры реализаций случайного сигнала, но не фазовые. Начальные фазы по всем частотам приняты равными и постоянными, что позволяет заменить фазовые спектры отдельных реализаций и фазовую плотность их ансамбля значением начальной фазы ψ и в рамках эксперимента задать $\lambda = \text{tg}(\psi) = 2$ и $\psi = \text{arctg}(2)$.

По ФСПЭ строится набор коэффициентов Фурье $X_\Phi(k_1, k_2)$, где номера коэффициентов $k_1 \in [0, M]$, $k_2 \in [0, M]$. Подбор верхней границы расчета коэффициентов M описан подробно в [2]. Коэффициенты используются для построения детерминированного имитационного сигнала $x(i_1, i_2)$, который и является результатом имитации, $i_1 \in [0, N_1]$, $i_2 \in [0, N_2]$. Подробное описание процесса дискретизации и имитации представлено в [2].

Для оценки качества имитации используются три автокорреляционных функции: теоретическая, алгоритмическая и экспериментальная. Теоретическая АКФ вычисляется по заданной ФСПЭ с использованием дискретной версии двумерного уравнения Винера–Хинчина:

$$R_T(t_1, t_2) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\omega_1=0}^{N_1} \sum_{\omega_2=0}^{N_2} S_E(\omega_1, \omega_2) e^{j(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)},$$

где t_1 и t_2 – координаты в дискретном двумерном пространстве, $t_1 \in [0, N_1]$, $t_2 \in [0, N_2]$;

j – мнимая единица.

Формула расчета алгоритмической АКФ, вывод которой описан в [1], позволяет оценить качество формирования набора коэффициентов Фурье и имеет следующий вид:

$$R_A(t_1, t_2) = 2 \sum_{k_1=0}^M \sum_{k_2=0}^M \substack{X_\Phi^2(k_1, k_2) \\ (k_1, k_2) \neq (0,0)} (1 + \lambda^2) \times \\ \times \cos \left[2\pi \left(\frac{k_1 t_1}{N_1} + \frac{k_2 t_2}{N_2} \right) \right] + X_\Phi^2(0, 0).$$

Теоретическая АКФ постоянна для одной ФСПЭ. Алгоритмическая АКФ постоянна для набора коэффициентов Фурье $X_\Phi(k_1, k_2)$, одинакового для базисов Фурье и Хартли. Таким образом, теоретическая и алго-

ритмическая АКФ одинаковы как для базиса Фурье, так и для базиса Хартли. Экспериментальные АКФ вычисляются по реализации сигнала и его версии со сдвигом:

$$R_\Delta(t_1, t_2) = \frac{\sum_{i_1=0}^{N_1-t_1-1} \sum_{i_2=0}^{N_2-t_2-1} x(i_1, i_2) x(i_1+t_1, i_2+t_2)}{(N_1-t_1)(N_2-t_2)},$$

где $t_1 \in [0, N_1]$, $t_2 \in [0, N_2]$;

$x(i_1, i_2)$ – сымитированный сигнал.

Вычисляются погрешности имитации, равные среднему модулю разностей значений двух АКФ:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{\sum_{t_1=0}^{N_1} \sum_{t_2=0}^{N_2} |R_\Delta(t_1, t_2) - R_A(t_1, t_2)|}{N_1 N_2}, \\ \Pi_2 &= \frac{\sum_{t_1=0}^{N_1} \sum_{t_2=0}^{N_2} |R_\Delta(t_1, t_2) - R_T(t_1, t_2)|}{N_1 N_2}, \\ \Pi_3 &= \frac{\sum_{t_1=0}^{N_1} \sum_{t_2=0}^{N_2} |R_T(t_1, t_2) - R_A(t_1, t_2)|}{N_1 N_2}, \\ \Pi &= \frac{(\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3)}{3}. \end{aligned}$$

Среднее значение трех погрешностей принимается за общую результирующую погрешность Π . Общая погрешность позволяет делать выводы о точности имитации. В данном исследовании эта погрешность используется для сравнения базисов.

2.2. Неограниченная ФСПЭ

Используются две формы ФСПЭ, задаваемые следующими математическими выражениями:

$$S_E(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\omega_1 + \omega_2 + 1}; \quad (1)$$

$$S_E(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 1}. \quad (2)$$

В табл. 1 в сокращенном виде приведены результаты сравнения гармонической имитации в базисах Фурье и Хартли для ФСПЭ, описываемых выражениями (1) и (2). $N = N_1 = N_2$ – число шагов дискретизации, равное для двух измерений. Б – базис. П1, П2, П3 и П соответствуют погрешностям, выражения для вычисления которых описаны в предыдущем подпараграфе. Было проведено сравнение погрешности для всех целых значений N от 3 до 30. Полу жирным курсивом выделены строки, соответствующие базису, который дает наименьшую погрешность для конкретных исходных данных.

График погрешностей имитации в базисах Фурье и Хартли для неограниченной ФСПЭ формы (1) в зависимости от количества шагов дискретизации N приведен на рис. 1.

Графики погрешностей имитации в базисах Фурье и Хартли для второй формы ФСПЭ приведены на рис. 2.

Табл. 1. Сравнительная таблица имитации в базисах Фурье и Хартли на неограниченной ФСПЭ форм (1) и (2)

Задача ФСПЭ	N	Б	Погрешности			
			П1	П2	П3	П
(1)	3	Ф	0,02023	0,58274	0,58277	0,39525
		Х	0,02023	0,58274	0,58277	0,39525
(1)	4	Ф	0,01938	0,14403	0,14345	0,10229
		Х	0,01938	0,14403	0,14345	0,10229
(1)	5	Ф	0,02167	0,05419	0,05674	0,0442
		Х	0,01705	0,05113	0,05674	0,04164
(1)	6	Ф	0,01959	0,0306	0,0313	0,02716
		Х	0,01836	0,027	0,0313	0,02555
(1)	7	Ф	0,02492	0,0172	0,02426	0,02213
		Х	0,03233	0,02984	0,02426	0,02881
...						
(1)	29	Ф	0,02709	0,00056	0,02689	0,01818
		Х	0,02985	0,01631	0,02689	0,02435
(1)	30	Ф	0,02647	0,00053	0,02626	0,01775
		Х	0,02887	0,01539	0,02626	0,02351
(2)	3	Ф	0,01942	0,0522	0,52226	0,19796
		Х	0,01942	0,0522	0,52226	0,19796
(2)	4	Ф	0,01682	0,10863	0,11071	0,07872
		Х	0,01682	0,10863	0,11071	0,07872
(2)	5	Ф	0,01902	0,0385	0,04269	0,0334
		Х	0,01452	0,03523	0,04269	0,03081
(2)	6	Ф	0,01769	0,02169	0,02486	0,02141
		Х	0,01626	0,01865	0,02486	0,01992
(2)	7	Ф	0,01982	0,01282	0,02131	0,01798
		Х	0,02667	0,02568	0,02131	0,02455
...						
(2)	29	Ф	0,02524	0,00051	0,02493	0,01689
		Х	0,02424	0,00711	0,02493	0,01876
(2)	30	Ф	0,02465	0,00051	0,02433	0,0165
		Х	0,02363	0,0063	0,02433	0,01809

По табл. 1 и рис. 1 и 2 видно, что при $N < 5$ погрешности равны и имитация дает идентичные ре-

зультаты. При $5 \leq N < 7$ имитация в базисе Фурье дает большую погрешность и, соответственно, уступает по точности базису Хартли. При $N \geq 7$ базис Фурье оказывается точнее базиса Хартли, причем при $N = 12$ наблюдается пик разницы погрешностей, где недостаток точности базиса Хартли по сравнению с базисом Фурье особенно заметен. При $N > 25$ отличия становятся заметно меньше. Влияние количества шагов дискретизации на формы АКФ при имитации в базисе Фурье наглядно показаны на рис. 3.

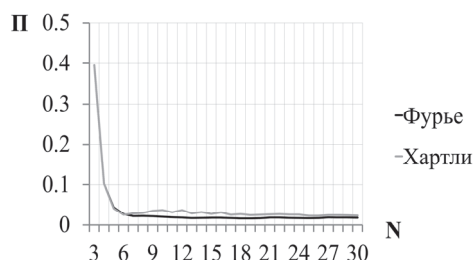


Рис. 1. График зависимости погрешности П и количества шагов дискретизации N при имитации в базисах Фурье и Хартли на неограниченной ФСПЭ (1)

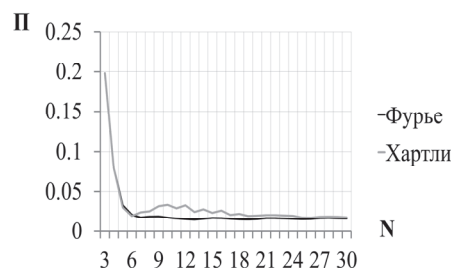


Рис. 2. График зависимости погрешности П и количества шагов дискретизации N при имитации в базисах Фурье и Хартли на неограниченной ФСПЭ (2)

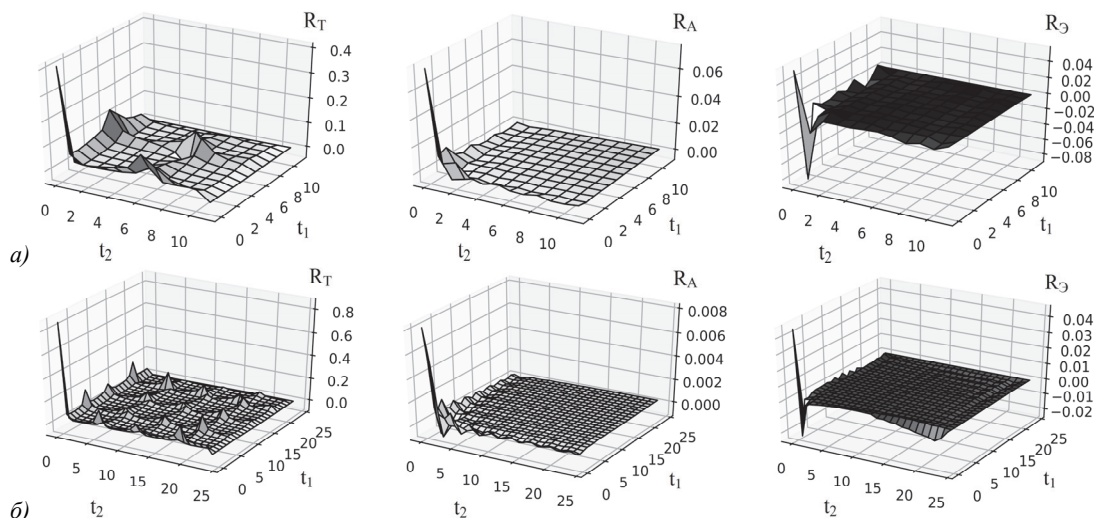


Рис. 3. Графики теоретической, алгоритмической и экспериментальной АКФ при имитации в базисе Фурье по ФСПЭ формы (1) для $N = 12$ (а) и $N = 25$ (б)

2.3. Ограниченная ФСПЭ

Используется ФСПЭ белого шума (БШ), описываемая выражением $S_E(\omega_1, \omega_2) = 1$, ограниченная частотами среза $\omega_C = \omega_{1C} = \omega_{2C} = 3$. В табл. 2 приведены результаты оценки точности имитации. К обозначени-

ям, описанным для табл. 1, добавляется столбец ω_c , показывающий значение частоты среза.

Графики зависимости погрешности имитации в базисах Фурье и Хартли для ограниченной ФСПЭ белого шума от количества шагов дискретизации N приведены на рис. 4.

Табл. 2. Сравнительная таблица имитации в базисах Фурье и Хартли с ограниченной ФСПЭ белого шума

Задача			Б	Погрешности			
ФСПЭ	ω_c	N		П1	П2	П3	П
БШ	3	3	Ф	0,04726	1,38099	1,3684	0,93222
			X	0,04726	1,38099	1,3684	0,93222
БШ	3	4	Ф	0,02999	0,24425	0,23773	0,17066
			X	0,02999	0,24425	0,23773	0,17066
БШ	3	5	Ф	0,03194	0,08687	0,09798	0,07226
			X	0,02689	0,09147	0,09798	0,07211
БШ	3	6	Ф	0,02251	0,04048	0,04461	0,03587
			X	0,02241	0,04499	0,04461	0,03734
БШ	3	7	Ф	0,02417	0,02035	0,02728	0,02393
			X	0,03189	0,03143	0,02728	0,0302
...							
БШ	3	29	Ф	0,03391	0,00152	0,03359	0,02301
			X	0,03501	0,00622	0,03359	0,02494
БШ	3	30	Ф	0,03325	0,00138	0,03292	0,02252
			X	0,03336	0,00323	0,03292	0,02317

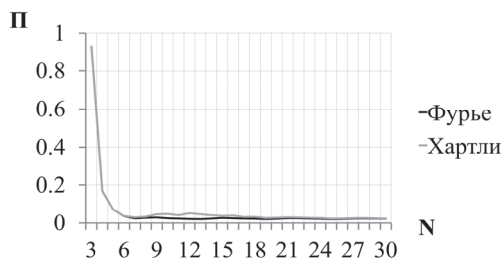


Рис. 4. График зависимости погрешности П от количества шагов дискретизации N для имитации в базисах Фурье и Хартли по ФСПЭ белого шума с частотой среза $\omega_c = 3$

В случае имитации по ограниченной ФСПЭ белого шума тенденции отличия погрешностей имитации в базисе Фурье и Хартли, обнаруженные для неограниченной ФСПЭ, сохраняются, как и пик расхождения погрешностей при $N=12$, здесь базис Хартли наименее точен в сравнении с базисом Фурье. Аналогично неограниченному варианту расхождение постепенно снижается после пика, точности двух базисов сходятся.

3. Центросимметричность результатов гармонической имитации двумерных сигналов

В отдельных системах вычислительная эффективность является наиболее важным качеством метода имитации. Вычислительная эффективность гармонического метода может быть повышена при помощи быстрых алгоритмов, но существует еще одно основание для ускорения вычислений. На рис. 5 приведена матрица детерминированного двумерного сигнала, сымитированного в базисе Фурье по ФСПЭ (1) при $N=N_1=N_2=5$.

В матрице выделена подматрица, образуемая при удалении первого столбца и первой строки. Стрелками показано, что эта подматрица симметрична относительно геометрического центра, то есть центросимметрична. На рис. 6 рассмотрим прямоугольную матрицу сымитированных значений при $N_1=7, N_2=5$.

Математически запишем обнаруженное свойство. Сигнал представим матрицей A размера $N_1 \times N_2$, для элементов этой матрицы справедливо:

$$a_{i_1, i_2} = a_{N_1 - i_1 + 1, N_2 - i_2 + 1}; i_1 \in [1, N_1], i_2 \in [1, N_2].$$

Обнаруженное свойство одинаково для квадратных и прямоугольных матриц, однако по определению симметричных и центросимметричных матриц только для квадратных матриц применимы понятия центросимметричности и симметричности. Для сокращения вычислений соответствие строгим определениям не является важным, сам факт повторения элементов позволяет сократить вычисления в подматрице в два раза. Конечно, это не способно снизить асимптотическую сложность алгоритма, однако способно уменьшить реальное время выполнения и совместно с применением быстрых алгоритмов способно стать конкурентным преимуществом алгоритма.

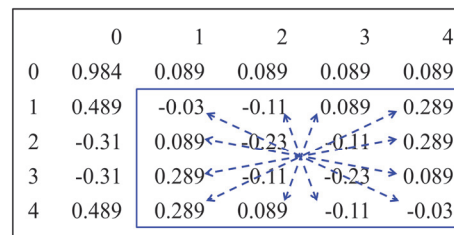


Рис. 5. Матрица значений детерминированного сымитированного в базисе Фурье сигнала по ФСПЭ (1) и $N=N_1=N_2=5$ с выделенной подматрицей

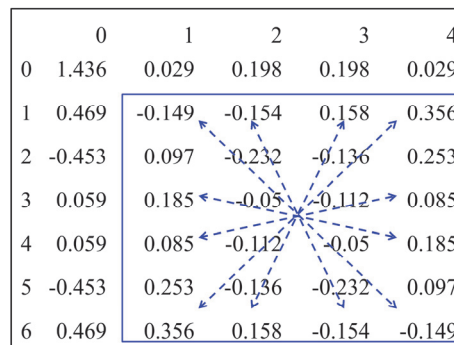


Рис. 6. Матрица значений детерминированного сымитированного в базисе Фурье сигнала по ФСПЭ (1) и $N_1=7, N_2=5$ с выделенной подматрицей

Важно заметить, что такое улучшение не всегда возможно. Центросимметричная природа результатов имитации (или подобная ей природа в случае прямоугольных сигналов) налагает новое ограничение: при необходимости имитации несимметричного сигнала ФСПЭ должна быть расширена, сигнал должен имитироваться в более широких границах, и из него должна затем извлекаться несимметричная часть. Такая модификация метода способна нивелировать выигрыш, получаемый за счет повторяющихся элементов, и даже ухудшить время работы, так как расширение ФСПЭ в два раза по двум координатам увеличит количество рассчитываемых элементов в матрицах в четыре раза. Обработка первого столбца и первой строки, элементы в которых уникальны и не повторяются, также является моментом, требующим отдельного рассмотрения.

Описанное свойство выполняется для сигналов, сымитированных в базисе Фурье на неограниченной и ограниченной ФСПЭ, но не выполняется для имитации в базисе Хартли. На рис. 7 приведена матрица значений квадратного сигнала с $N=N_1=N_2=5$, сымитированного в базисе Хартли по ФСПЭ, описанной в (1).

	0	1	2	3	4
0	0.537	0.63	0.1	-0.321	-0.051
1	0.63	0.255	-0.192	-0.095	0.413
2	0.1	-0.192	-0.122	0.213	0.35
3	-0.321	-0.095	0.213	0.178	-0.152
4	-0.051	0.413	0.35	-0.152	-0.4

Рис. 7. Матрица значений детерминированного сымитированного в базисе Хартли сигнала по ФСПЭ (1) и $N=N_1=N_2=5$ с выделенными совпадающими элементами

На рис. 7 видно, что полученная матрица симметрична не относительно геометрического центра, но относительно главной диагонали, и является симметричной матрицей, то есть:

$$a_{i,j} = a_{j,i}.$$

Повторение элементов сохраняется, и приведенные для centrosymmetric матриц рассуждения сохраняют справедливость: вычисления могут быть сокращены вдвое, если симметричность сигнала допустима, но несимметричные сигналы требуют расширения ФСПЭ и усложнения вычислений. На рис. 8 рассмотрен прямоугольный сигнал, сымитированный в базисе Хартли по ФСПЭ (1) при $N_1=7, N_2=5$.

	0	1	2	3	4
0	0.756	0.894	0.11	-0.512	-0.113
1	0.656	-0.077	-0.373	0.176	0.812
2	-0.498	-0.262	0.38	0.54	-0.003
3	0.032	0.708	0.444	-0.394	-0.649
4	0.794	0.305	-0.494	-0.498	0.298
5	-0.186	-0.596	-0.251	0.371	0.412
6	-0.494	0.225	0.596	0.106	-0.568

Рис. 8. Матрица значений детерминированного сымитированного в базисе Хартли сигнала по ФСПЭ (1) и $N_1=7, N_2=5$

На матрице на рис. 8 попарные равенства не прослеживаются. Это значит, что в таком случае сокращение вычислений за счет повторений невозможно, но также имитация прямоугольного сигнала в базисе Хартли может использоваться для получения сигналов без симметрии или ее подобия. Даже имитация квадратного сигнала возможна путем расширения ФСПЭ всего на один столбец или строку.

Заключение

Был проведен обзор работ других авторов, были выделены следующие моменты критики спектраль-

ных методов имитации: недостаточная точность по сравнению с другими методами и ограниченность круга задач, где такая имитация применима, задачами с определенным видом ковариационных функций и с прямоугольной сеткой дискретизации. Гармонический метод имитации является разновидностью спектрального метода.

В рамках данной статьи приведено сравнение точности гармонической имитации двумерных сигналов в базисах Фурье и Хартли, было обнаружено, что разные базисы могут давать разную точность в одной и той же задаче на разных характеристиках дискретизации функции спектральной плотности энергии (ФСПЭ). При количестве шагов дискретизации ниже 7 рекомендуется использовать базис Хартли, при большем разрешении базис Фурье дает лучшие результаты. Получается, что выбор базиса влияет на точность имитации в конкретной задаче, оценка точности спектральных методов в целом не всегда информативна.

Была рассмотрена форма сымитированных гармоническим методом двумерных сигналов, обнаружено свойство centrosymmetric для квадратных сигналов и для прямоугольных, сымитированных в базисе Фурье, и свойство симметричности для квадратных сигналов, сымитированных в базисе Хартли. Если такая форма отвечает задаче имитации, то количество вычислений может быть уменьшено в два раза. При необходимости сымитировать сигнал без таких свойств возможно сымитировать прямоугольный сигнал в базисе Хартли. В случае необходимости получения квадратного сигнала возможно расширение одной из границ ФСПЭ на один шаг дискретизации, имитация и корректировка прямоугольного сигнала. Обнаруженные результаты конкретизируют критику ограниченности круга задач.

Проблема работы конкретно гармонического метода имитации с определенным видом ковариационных функций, проблема невозможности работы с непрямоугольной сеткой дискретизации и справедливость сформированных рекомендаций для многомерных сигналов с большим числом измерений требуют отдельного рассмотрения в дальнейшем.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22-11-00049, <https://rscf.ru/project/22-11-00049/>.

В статье отражена также часть исследовательской работы по проекту FSFN-2023-0006.

References

- [1] Syuzev VV, Smirnova EV, Proletarsky AV. Algorithms of multidimensional simulation of random processes. Computer Optics 2021; 45(4): 627-637. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-770.
- [2] Syuzev VV, Proletarsky AV, Mikov DA, Deykin II. Techniques of sampling the energy characteristics of two-

- dimensional random signals. *Computer Optics* 2022; 46(5): 828-839. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1074.
- [3] Matheron G. The intrinsic random functions and their applications. *Adv Appl Probab* 1973; 5(3): 439-468.
- [4] Hunger L, Cosenza B, Kimeswenger S, Fahringer T. Random fields generation on the GPU with the spectral turning bands method. In Book: Silva F, Dutra I, Costa VS, eds. *Euro-Par 2014: Parallel processing*. Cham, Heidelberg: Springer International Publishing Switzerland; 2014: 656-667. DOI: 10.1007/978-3-319-09873-9_55.
- [5] Hunger L, Cosenza B, Kimeswenger S, Fahringer T. Spectral turning bands for efficient Gaussian random fields generation on GPUs and accelerators. *Concurr Comput* 2015; 27(16): 4122-4136. DOI: 10.14279/depositonce-7092.
- [6] Emery X, Furrer R, Porcu E. A turning bands method for simulating isotropic Gaussian random fields on the sphere. *Stat Probab Lett* 2018; 144: 9-15. DOI: 10.1016/j.spl.2018.07.017.
- [7] Ruan F, McLaughlin D. An efficient multivariate random field generator using the fast Fourier transform. *Adv Water Resour* 1998; 21(5): 385-399.
- [8] Lang A, Potthoff J. Fast simulation of Gaussian random fields. *Monte Carlo Methods Appl* 2011; 17(3): 195-214.
- [9] Rungbanaphan P, Honjo Y, Yoshida I. Spatial-temporal prediction of secondary compression using random field theory. *Soils Found* 2012; 52(1): 99-113. DOI: 10.1016/j.sandf.2012.01.013.
- [10] Gurenko VV, Klimov SM, Proletarsky AV, Smirnova EV, Sotnikov AA, Syuzev VV. Signal simulation methods in scientific problems of real-time information and control systems modeling [In Russian]. Moscow: Ru-Science; 2021. ISBN: 978-5-4365-6609-2.
- [11] Graham IG, Kuo FY, Nuyens D, Scheichl R, Sloan IH. Analysis of circulant embedding methods for sampling stationary random fields. *SIAM J Numer Anal* 2018; 56(3): 1871-1895.
- [12] Park MH, Tretyakov M. A block circulant embedding method for simulation of stationary gaussian random fields on block-regular grids. *Int J Uncertain Quantif* 2015; 5(6): 527-544.
- [13] Hackbusch W. *Hierarchical matrices: algorithms and analysis*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2015. ISBN: 978-3-662-47323-8.
- [14] Feischl M, Kuo FY, Sloan IH. Fast random field generation with h-matrices. *Numer Math* 2018; 140(3): 639-676.
- [15] Blanchard P, Coulaud O, Darve E. Fast hierarchical algorithms for generating gaussian random fields. *Research Report 8811*. Inria Bordeaux Sud-Ouest; 2015.
- [16] Zheng Z, Dai H. Simulation of multi-dimensional random fields by Karhunen–Loève expansion. *Comput Methods Appl Mech Eng* 2017; 324: 221-247. DOI: 10.1016/j.cma.2017.05.022.
- [17] Graham IG, Kuo FY, Nichols JA, Scheichl R, Schwab C, Sloan IH. Quasi-Monte Carlo finite element methods for elliptic PDEs with lognormal random coefficients. *Numer Math* 2015; 131(2): 329-368. DOI: 10.1007/s00211-014-0689-y.
- [18] Bachmayr M, Cohen A, Migliorati G. Representations of Gaussian random fields and approximation of elliptic PDEs with lognormal coefficients. *J Fourier Anal Appl* 2018; 24(3): 621-649.
- [19] Journel AG. Geostatistics for conditional simulation of ore bodies. *Economic Geology* 1974; 69(5): 673-687.
- [20] Oliver DS. Moving averages for Gaussian simulation in two and three dimensions. *Math Geol* 1995; 27(8): 939-960.
- [21] Le Ravalec M, Noetinger B, Hu LY. The FFT moving average (FFT-MA) generator: An efficient numerical method for generating and conditioning Gaussian simulations. *Math Geol* 2000; 32(6): 701-723.
- [22] Schlather M, Malinowski A, Oesting M, Boecker D, Strokorb K, Engelke S, Martini J, Ballani F, Moreva O, Auel J, Menck P, Gross S, Ober U, Ribeiro P, Ripley BD, Singleton R, Pfaff B, R Core Team. *RandomFields: Simulation and analysis of random fields*. 2017. Package Version 3.1.50. Source: <<https://rdrr.io/cran/RandomFields/>>.
- [23] Gräler B, Pebesma E, Heuvelink G. Spatio-temporal interpolation using gstat. *The R Journal* 2016; 8(1): 204-218. DOI: 10.32614/RJ-2016-014.
- [24] Xue L, Dai C, Wang L. Development of a general package for resolution of uncertainty-related issues in reservoir engineering. *Energies* 2017; 10(2): 197. DOI: 10.3390/en10020197.
- [25] Fenton GA, Vanmarcke EH. Simulation of random fields via local average subdivision. *J Eng Mech* 1990; 116(8): 1733-1749.
- [26] Nuttall JD. *Parallel implementation and application of the random finite element method*. PhD thesis. The University of Manchester (United Kingdom); 2011.
- [27] Van den Eijnden A, Hicks M. Conditional simulation for characterizing the spatial variability of sand state. *COMGEO II – Proc 2nd Int Symp on Computational Geomechanics 2011*: 288-296.
- [28] Vanmarcke E. *Random fields: analysis and synthesis*. World Scientific; 2010.

Сведения об авторах

Сюзев Владимир Васильевич, 1946 года рождения, в 1970 году окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана, факультет приборостроения, специальность «Счетно-решающие приборы и устройства». В 1976 г. защитил кандидатскую, а в 1999 г. – докторскую диссертацию. С 1999 года по 2015 г. являлся заведующим кафедрой компьютерных систем и сетей МГТУ им. Н. Э. Баумана, в н/вр. – профессор. Область научных интересов: цифровая обработка сигналов, многомерные структуры, разработка новой энергетической теории математического представления и преобразования моделей, сигналов и процессов в системах управления динамическими объектами на основе имитационного моделирования сигналов. E-mail: k_iu6@bmstu.ru

Пролетарский Андрей Викторович, 1964 года рождения, в 1987 году окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана, факультет информатики и системы управления по специальности «Автоматические системы управления». Руководитель Научно-учебного комплекса «Информатика и системы управления», заведующий кафедрой компьютерных систем и сетей МГТУ им. Н. Э. Баумана, доктор технических наук, профессор. Область научных ин-

тересов: интеллектуальные системы и искусственный интеллект, мониторинг и управление динамическими системами, большие данные. E-mail: pav@bmstu.ru

Миков Дмитрий Александрович, 1990 года рождения, в 2014 году окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана, факультет информатики и систем управления по специальности «Информационная безопасность». В 2018 г. защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата технических наук по теме «Управление информационными рисками в системах дистанционного мониторинга состояния объекта». С 2019 года – доцент кафедры компьютерных систем и сетей МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: управление информационными рисками, информационная безопасность автоматизированных систем и систем больших данных. E-mail: mikov@bmstu.ru

Дейкин Иван Игоревич, 1997 года рождения, в 2021 году окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана, факультет информатики и систем управления по специальности «Информатика и вычислительная техника». С 2021 года – аспирант кафедры компьютерных систем и сетей МГТУ им. Н.Э. Баумана по направлению «Теоретические основы информатики». Область научных интересов: цифровая обработка сигналов, теория информации, искусственный интеллект. E-mail: deykinii@student.bmstu.ru

ГРНТИ: 28.17.19, 28.17.23, 28.23.29

Поступила в редакцию 30 июня 2023 г. Окончательный вариант – 10 августа 2023 г.

Ways to improve the accuracy of the harmonic method for simulating two-dimensional signals

V.V. Syuzev¹, A.V. Proletarsky¹, D.A. Mikov¹, I.I. Deykin¹

¹ Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russia, 2nd Baumanskaya street 5/1

Abstract

The article studies properties of the harmonic simulation method within the framework of the spectral theory and evaluates the quality of this method. A review of the literature on the existing methods for modeling multidimensional random fields is carried out, making it possible to compare these methods using criteria such as the complexity of the algorithm, computational costs and memory requirements, requirements for the covariance function and the grid. Weaknesses are revealed, such as insufficient accuracy and high computational complexity, which are characteristic of spectral simulation methods in general, including the harmonic method. An analysis of forms of the signal simulated by the harmonic method for different bases reveals a property of centrosymmetry for square signals in the Fourier basis, a similar property for rectangular signals in the Fourier basis, the symmetry property of a square signal in the Hartley basis and the absence of such properties for a rectangular signal simulated in the Hartley basis. A comparative analysis of the accuracy of simulating two-dimensional signals, as a special case of multidimensional ones, is carried out by the harmonic method in the Fourier and Hartley bases. It is shown that, depending on the sampling characteristics, the simulated signal in the Fourier basis differs from the same signal simulated in the Hartley basis in terms of accuracy. As a result of the study, recommendations are worked out for choosing the basis in a specific problem of simulating two-dimensional signals. The effect of the discovered properties on the computational complexity of the method is described. Methods for applying these properties to simulate arbitrary two-dimensional signals are proposed.

Keywords: harmonic signal simulation method, Fourier bases, Hartley bases, autocorrelation functions, centrosymmetric matrices.

Citation: Syuzev VV, Proletarsky AV, Mikov DA, Deykin II. Ways to improve the accuracy of the harmonic method for simulating two-dimensional signals. *Computer Optics* 2024; 48(2): 294-302. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1381.

Acknowledgements: this work was supported by the Russian Science Foundation, grant №22-11-00049, <https://rscf.ru/project/22-11-00049/>. This paper is a part of the research work carried out within the Project FSN-2023-0006.

Authors' information

Vladimir Vasilievich Syuzev (b. 1946) graduated from Bauman Moscow State Technical University in 1970, with a degree in Calculating and Solving Devices. He defended his PhD thesis in 1976 and his doctoral thesis – in 1999. From 1999 to 2015, he was the Head of Computer Systems and Networks department at Bauman Moscow State Technical University. Research interests: digital signal processing, multidimensional structures, development of a new energy theory of mathematical representation and transformation of models, signals and processes in control systems of dynamic objects based on signal simulation. E-mail: k_iu6@bmsu.ru

Andrey Viktorovich Proletarsky (b. 1964), in 1987, he graduated from Bauman Moscow State Technical University, faculty of Computer Science and Control Systems with a degree in Automatic Control systems. He is a Head of the Scientific and Educational Complex "Informatics and Control Systems", head of Computer Systems and Networks department of Bauman Moscow State Technical University, Doctor of Technical Sciences, Professor. Research area: artificial intelligent systems, monitoring and management of dynamic systems, big data. E-mail: pav@bmsu.ru

Dmitry Alexandrovich Mikov (b. 1990), in 2014, he graduated from Bauman Moscow State Technical University, faculty of Computer Science and Control Systems with a degree in Information Security. In 2018 he defended his thesis for the degree of PhD in Engineering Sciences on the topic «Information security risk management in systems for remote monitoring of the object state». Since 2019 – Associate Professor of the Department of Computer Systems and Networks, Bauman Moscow State Technical University. Research interests: information security risk management, information security of automated systems and big data systems. E-mail: mikov@bmsu.ru

Ivan Igorevich Deykin (b. 1997), graduated from Bauman Moscow State Technical University's faculty of Informatics and System Management in 2021 with a degree in Informatics and Computer Engineering. Since 2021 he is a postgraduate student of Computer Systems and Networks department in Bauman Moscow State Technical University in the direction of "Theoretical Fundamentals of Informatics". Research interests: digital signal processing, information theory, artificial intelligence. E-mail: deykini@student.bmsu.ru

Received June 30, 2023. The final version – August 10, 2023.
