

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ВОЛНОВЫХ АБЕРРАЦИЙ НА УМЕНЬШЕНИЕ РАЗМЕРОВ ФОКАЛЬНОГО ПЯТНА В ВЫСОКОАПЕРТУРНЫХ ФОКУСИРУЮЩИХ СИСТЕМАХ

Хонина С.Н.^{1,2}, Устинов А.В.¹, Пелевина Е.А.²

¹ Учреждение Российской академии наук Институт систем обработки изображений РАН,

² Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П.Королёва
(национальный исследовательский университет)

Аннотация

В работе показано, что введение пропускающих функций, соответствующих волновым aberrациям в виде функций Цернике, в высокоапертурных фокусирующих системах позволяет уменьшить поперечный размер фокального пятна ниже дифракционного предела. Причём для линейной поляризации, наиболее распространённой для современных лазеров, вдоль одного направления достигаются лучшие результаты, чем для радиальной поляризации, получение которой требует использования сложных или дорогостоящих устройств. Преодоление дифракционного предела происходит за счёт существенного уменьшения энергии в центральной части фокальной области. Однако существует возможность регистрации световых полей даже очень слабой интенсивности, что обеспечивает перспективность полученных результатов. Для линейной поляризации получено вытянутое фокальное пятно шириной по уровню полуспада интенсивности вдоль оси поляризации $FWHM(-) = 0,24\lambda$, для радиальной поляризации получено круглое пятно диаметром по полуспаду интенсивности $FWHM = 0,35\lambda$ и для круговой поляризации $FWHM = 0,35\lambda$. Для азимутальной поляризации наличие вихревой фазовой функции первого порядка позволяет получить в общей интенсивности круглое центральное световое пятно меньше дифракционного предела ($FWHM = 0,46\lambda$) с низким уровнем интенсивности в боковых лепестках. Также рассмотрено уменьшение размеров не только светового пятна, но и теневой области, формируемой световым кольцом очень малого радиуса.

Ключевые слова: размер фокального пятна, базис Цернике, высокоапертурная фокусирующая система, aberrации, преодоление дифракционного предела.

Введение

В последнее время появилось много работ, посвящённых уменьшению поперечного размера фокального пятна высокоапертурной фокусирующей системы [1 - 5]. Наименьший поперечный размер фокального пятна был получен при радиальной поляризации, когда вклад продольной компоненты в суммарную интенсивность на оси является максимальным.

Существуют различные способы ещё уменьшить вклад поперечных компонент в общую интенсивность на оптической оси, в том числе введение кольцевой апертуры, пропускающей излучение только в периферийной части линзы [1, 2], и более энергетически эффективное дополнение фазовыми оптическими элементами [3 - 5].

Также большое количество работ посвящено изучению влияния различных aberrаций на высокоапертурные оптические системы. В работах [6, 7] было проведено исследование влияния сферической aberrации и дефокусировки. Было выяснено, что распределение осевой интенсивности становится существенно несимметричным относительно фокуса.

Действие первичных (осесимметричных) aberrаций на структуру пучка в фокальной области аналитически изучалось в работе [8]: показано, что можно решить обратную задачу уменьшения размера фокального пятна [9].

Несколько работ [10, 11] посвящены анализу и развитию теории Нейбор-Цернике. В них показано

применение данной теории к высокоапертурным фокусирующим системам. Для аналитических выкладок пропускающая функция, пространственная поляризационная зависимость и aberrации в выходном зрачке оптической системы представлялись в виде разложения по полиномам Цернике. Было показано, что распределение интенсивности в фокальной области можно представить как набор элементарных функций, что ведёт для высоких значений числовых апертур к асимметрии профиля интенсивности и относительноному увеличению размера фокального пятна по сравнению с предсказаниями скалярной теории.

В [12] обсуждается степень влияния сферической aberrации, комы и астигматизма на сильно сфокусированный радиально-поляризованный пучок. Показано, что действие сферической aberrации можно компенсировать введением дефокусировки, однако астигматизм и кома очень сильно искажают поле в фокусе.

В работе [13] рассмотрено использование SIL-линз для компенсации aberrаций в оптической системе. В частности, было показано, что ширина фокального пятна по уровню полуспада интенсивности ($FWHM$) в такой системе сопоставима с результатом, полученным для высокоапертурной системы без SIL-линзы.

Несколько работ посвящены исследованию влияния aberrаций различных порядков на пучки с разной поляризацией [14 - 16]. Так, в работе [14] было

изучено влияние первичной сферической aberrации на острую фокусировку линейно- и циркулярно-поляризованных пучков Гаусса-Лагерра. Показано, что при линейной поляризации наличие aberrации снижает интенсивность в фокальной точке и увеличивает её в боковых лепестках. Для циркулярно-поляризованного пучка aberrации приводят к увеличению размеров центрального тёмного пятна, наряду с уменьшением интенсивности на периферии светлого кольца. Действие сферической aberrации можно компенсировать соответствующей дефокусировкой. В [15] исследуется острая фокусировка вихревых пучков в присутствии астигматизма. В этой статье показано, что наличие астигматизма в системе вытягивает распределение интенсивности только вдоль оси x . Кроме того, установлено, что круговая симметрия в интенсивности пучка с круговой поляризацией нарушается, а круговая симметрия в структуре азимутально-поляризованного пучка преобразуется в биаксиальную симметрию. В статье [16] исследовалось влияние комы на фокальную структуру пучков, не имеющих вихревой составляющей, с круговой и азимутальной поляризацией. В присутствии aberrаций происходит смещение положения и уменьшение интенсивности с одной стороны фокальной структуры. При увеличении коэффициента aberrации тёмная область в интенсивности приобретает треугольную форму и вытягивается.

Таким образом, в большинстве исследований отмечается негативное влияние aberrаций на структуру в фокальной области. Авторы данной работы рассматривают возможность уменьшения размера фокального пятна, формируемого высокоапертурной фокусирующей системой, при внесении aberrаций в виде полиномов Цернике.

Полиномы Цернике низких порядков соответствуют хорошо известным оптическим aberrациям, таким как сдвиг, наклон, сферическая aberrация, астигматизм, кома [17].

Использование полиномов Цернике в качестве функции пропускания высокоапертурной фокусирующей системы позволяет одновременно вносить вихревую фазовую зависимость и амплитудные изменения по радиусу. Вихревая фазовая функция пропускания как фактор, позволяющий уменьшить размер светового пятна в отдельных компонентах острогофокусированного электрического поля, рассматривался в работе [4], а возможность уменьшения фокального пятна в общем распределении интенсивности за счёт дополнительных вариаций по радиусу была показана в [5].

В данной работе показано, что введение пропускающих функций, соответствующих волновым aberrациям в виде функций Цернике, в высокоапертурных фокусирующих системах позволяет уменьшить размер фокального пятна ниже дифракционного предела. Причём уменьшение фокального пятна для линейной поляризации вдоль одного направления оказывается меньшим, чем для радиальной по-

ляризации: в первом случае получено вытянутое фокальное пятно шириной по уровню полуспада интенсивности $\text{FWHM}(-) = 0,24\lambda$, а во втором случае получено круглое пятно диаметром по полуспаду интенсивности $\text{FWHM} = 0,35\lambda$.

Недостатком такого подхода является перераспределение энергии в боковые лепестки. Использование азимутальной поляризации в сочетании с наличием вихревой фазовой функции первого порядка позволяет получить в общей интенсивности круглое центральное световое пятно также меньше дифракционного предела ($\text{FWHM} = 0,46\lambda$) с низким уровнем интенсивности в боковых лепестках.

Также рассмотрено уменьшение размеров не только светового пятна, но и теневой области.

1. Базис Цернике и его свойства

Существует полное множество ортонормированных функций с угловыми гармониками в круге радиуса r_0 , которые используют для описания волновых aberrаций. Это круговые полиномы Цернике [17]:

$$\Psi_{nm}(r, \varphi) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi r_0^2}} R_n^m(r) \exp(im\varphi), \quad (1)$$

где

$$R_n^m(r) = \sum_{p=0}^{(n-m)/2} (-1)^p (n-p)! \times \\ \times \left[p! \left(\frac{n+m-p}{2} \right)! \left(\frac{n-m-p}{2} \right)! \right]^{-1} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-2p}. \quad (2)$$

Выражение (2) описывает радиальные полиномы Цернике $R_n^m(r)$. Их свойства:

$$R_n^{-m}(r) = R_n^m(r); \quad R_n^{\pm 1}(r_0) = 1; \\ R_{2k+1}^{2l}(r) = 0, \quad R_{2k}^{2l+1}(r) = 0; \quad R_0^0(r) = 1,$$

причём $|m| \leq n$ и разность $n-m$ должна быть чётной.

В табл. 1 приведены несколько первых полиномов Цернике.

Пространственный Фурье-спектр для функций Цернике определяется следующим выражением:

$$\int_0^{r_0} R_n^m(r) J_m \left(\frac{2\pi}{\lambda f} r \rho \right) r dr = \\ = (-1)^{(n-m)/2} r_0^2 J_{n+1} \left(\frac{2\pi}{\lambda f} r_0 \rho \right) \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda f} r_0 \rho \right)^{-1}. \quad (3)$$

Полиномы Цернике часто используются для описания волновых aberrаций оптических систем [8, 10, 18]. Аналогично отдельные полиномы Цернике можно представить в виде суперпозиции нескольких aberrаций [17, 19]. В табл. 2 приведено соответствие между первичными aberrациями и полиномами Цернике.

Рассмотрим высокоапертурную фокусирующую систему с внесёнными aberrациями в виде пропускающих функций Цернике.

Таблица 1. Полиномы Цернике низких порядков

n/m	0	1	2
0	1	–	–
1	–	$R_1^1(r) = \frac{\sqrt{2}}{2}r$	–
2	$R_2^0(r) = \sqrt{3}(2r^2 - 1)$	–	$R_2^2(r) = \sqrt{3}r^2$
3	–	$R_3^1(r) = 2(3r^3 - 2r)$	–
4	$R_4^0(r) = \sqrt{5}(6r^4 - 6r^2 + 1)$	–	$R_4^2(r) = \sqrt{5}(4r^4 - 3r^2)$
5	–	$R_5^1(r) = \sqrt{6}(10r^5 - 12r^3 + 3r)$	–
6	$R_6^0(r) = \sqrt{7}(20r^6 - 30r^4 + 12r^2 - 1)$	–	$R_6^2(r) = \sqrt{7}(15r^6 - 20r^4 + 6r^2)$

2. Модель высокоапертурной фокусирующей системы в приближении Дебая

Для высокоапертурной фокусирующей оптической системы векторное электрическое поле в однородной диэлектрической среде вблизи фокуса можно описать в приближении Дебая [20]:

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi, z) = -\frac{if}{\lambda} \int_0^{2\pi} \int_0^\Theta B(\theta, \phi) T(\theta) \mathbf{P}(\theta, \phi) \exp \times \left[ik(\rho \sin \theta \cos(\phi - \varphi) + z \cos \theta) \right] \sin \theta d\theta d\phi, \quad (4)$$

где (ρ, φ, z) – цилиндрические координаты фокальной области, (θ, ϕ) – сферические угловые координаты выходного зрачка фокусирующей системы, Θ – максимальное значение азимутального угла, связанное с числовой апертурой системы, $B(\theta, \phi)$ – функция пропускания, $T(\theta)$ – функция аподизации зрачка, $\mathbf{P}(\theta, \phi)$ – матрица поляризации, $k = 2\pi/\lambda$ –

$$\mathbf{P}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} 1 + \cos^2 \phi (\cos \theta - 1) & \sin \phi \cos \phi (\cos \theta - 1) & \sin \theta \cos \phi \\ \sin \phi \cos \phi (\cos \theta - 1) & 1 + \sin^2 \phi (\cos \theta - 1) & \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(\theta, \phi) \\ b(\theta, \phi) \\ c(\theta, \phi) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $a(\theta, \phi)$, $b(\theta, \phi)$, $c(\theta, \phi)$ – функции поляризации для x -, y - и z -компонент падающего пучка. Для часто используемых типов поляризации эти функции имеют простой вид и не зависят от θ .

Функция аподизации зрачка $T(\theta)$ зависит от геометрии фокусирующей системы. В частности, синусное правило $r = f \sin \theta$, $T(\theta) = \sqrt{\cos \theta}$ используется для микроскопических объективов и апланатических систем.

Далее рассмотрим острую фокусировку лазерных пучков с различной поляризацией при использовании в качестве функции пропускания $B(\theta, \phi)$ функций Цернике (1). В этом случае функцию пропускания можно представить в виде суперпозиции:

$$B(\theta, \phi) = \sum_m c_m D_m(\theta) \exp(im\phi) \quad (6)$$

волновое число, λ – длина волны, f – фокусное расстояние.

Приближение Дебая верно, если фокусное расстояние оптической системы значительно превышает длину волны и поле (4) рассматривается вблизи фокуса.

Таблица 2. Соответствие между первичными aberrациями и полиномами Цернике

Тип aberrации	Соответствующий полином Цернике
Сферическая aberrация	$R_4^0(r)$
Кома	$R_3^1(r)$
Астигматизм	$R_2^2(r)$
Кривизна поля	$R_2^0(r)$
Дисторсия	$R_1^1(r)$

Поляризационное преобразование для компонент электрического вектора в (4) имеет следующий вид:

и значительно упростить выражение (4).

Интеграл по ϕ в (4) будет также выражаться через соответствующую сумму бесселевых функций первого рода различного порядка, а векторное электрическое поле в фокальной области вычисляется одномерным интегрированием [21]:

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi, z) = -ikf \sum_m \int_0^\Theta \mathbf{Q}_m(\rho, \varphi, \theta) q_m(\theta) d\theta, \quad (7)$$

где $q_m(\theta) = D_m(\theta) T(\theta) \sin \theta \exp(ikz \cos \theta)$, а вид $\mathbf{Q}_m(\rho, \varphi, \theta)$ зависит от поляризации входного поля.

Функция $D(\theta)$ в (6) может быть любой одномерной функцией, в том числе радиальной частью мод Гаусса-Лагерра, Цернике, Бесселя и т.д.

С учётом выражения (2) радиальные зависимости в суперпозиции (6) представимы в виде:

$$D(\theta) = \sum_l a_l (\sin \theta)^{\alpha_l} (\cos \theta)^{\beta_l}. \tag{8}$$

Тогда при вычислении распределения (7) в фокусе ($z=0$) высокоапертурной ($\Theta = \pi/2$) системы будут возникать интегралы вида:

$$\int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^\alpha (\cos \theta)^\beta J_\nu(k\rho \sin \theta) (\cos \theta)^{1/2} \sin \theta d\theta = \int_0^1 x^{\alpha+1} (1-x^2)^{\beta/2-1/4} J_\nu(k\rho x) dx. \tag{9}$$

Для анализа этих интегралов можно воспользоваться следующим выражением [22]:

$$\int_0^a x^{\xi-1} (a^2-x^2)^{\eta-1} J_\nu(cx) dx = \frac{a^{2\eta+\xi+\nu-2} c^\nu}{2^{\nu+1}} \frac{\Gamma(\eta)\Gamma((\xi+\nu)/2)}{\Gamma(\eta+(\xi+\nu)/2)\Gamma(\nu+1)} \times {}_1F_2\left(\frac{\xi+\nu}{2}; \frac{\xi+\nu}{2} + \eta, \nu+1; -\frac{a^2 c^2}{4}\right), \tag{10}$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, ${}_1F_2(x; y_1, y_2; z)$ – гипергеометрическая функция:

$${}_1F_2(x; y_1, y_2; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)_n}{(y_1)_n \cdot (y_2)_n} \cdot \frac{z^n}{n!}, \tag{11}$$

$$(a)_0 = 1, (a)_n = a \cdot (a+1) \cdot \dots \cdot (a+n-1).$$

Заметим, что интеграл (9) берётся в более удобной, чем (10), форме, если степень x и порядок функции Бесселя являются целыми и имеют разную чётность. Далее рассмотрим конкретные типы поляризации фокусируемого излучения.

3. Азимутальная поляризация

В случае азимутальной поляризации коэффициенты входного поля записываются как $a(\phi) = \sin \phi$; $b(\phi) = -\cos \phi$; $c(\phi) = 0$, а вектор поляризации в (5) примет вид:

$$P(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Вектор для вихревого поля $\mathbf{Q}_m(\rho, \phi, \theta)$ в (7) принимает следующий вид:

$$\mathbf{Q}_m(\rho, \phi, \theta) = i^m \exp(im\phi) \begin{bmatrix} S_m(t) \\ -C_m(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где $S_m(t) = \frac{1}{2} [e^{i\phi} J_{m+1}(t) + e^{-i\phi} J_{m-1}(t)]$,

$$C_m(t) = \frac{i}{2} [e^{i\phi} J_{m+1}(t) - e^{-i\phi} J_{m-1}(t)], t = k\rho \sin \theta.$$

Как следует из (13), продольная составляющая всегда отсутствует, что упрощает аналитическое рассмотрение.

В [21] было показано, что при азимутальной поляризации на оптической оси (при $\rho=0$) электрическое поле (7) будет содержать ненулевые компоненты только для одного порядка сингулярности $|m|=1$. Для всех остальных значений $|m| \neq 1$ в осевых точках будет формироваться абсолютный ноль интенсивности, т.к. все компоненты равны нулю.

Рассмотрим подробнее два случая: $m=0$ и $m=1$. Первый случай соответствует отсутствию в выходном зрачке фокусирующей системы вихревых составляющих, а второй – внесению фазовой вихревой сингулярности первого порядка.

3.1. Отсутствие вихревых составляющих ($m=0$)

При $m=0$ в (9) будет иметь место только $\nu=1$ (при $\nu=-1$ используется свойство симметрии бесселевых функций), и в общем случае, используя (10), можно записать ($a=1$, $c=k\rho$, $\xi=\alpha+2$, $\eta=\beta/2+3/4$):

$$\int_0^1 x^{\alpha+1} (1-x^2)^{\beta/2-1/4} J_1(k\rho x) dx = \frac{k\rho}{4} \frac{\Gamma(\beta/2+3/4)\Gamma((\alpha+3)/2)}{\Gamma((\alpha+\beta)/2+9/4)} \times {}_1F_2\left(\frac{\alpha+3}{2}; \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{9}{4}, 2; -\frac{(k\rho)^2}{4}\right). \tag{14}$$

При отсутствии каких-либо aberrаций ($B(\theta, \phi) = 1$) поле (7) в фокальной плоскости ($z=0$) будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z=0) = kf \begin{bmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} \times \int_0^{\pi/2} J_1(k\rho \sin \theta) \sin \theta (\cos \theta)^{1/2} d\theta. \tag{15}$$

В случае же наличия aberrаций, например, таких, как сферическая aberrация или кривизна поля, описываемых чётными функциями Цернике, поле в фокусе будет суперпозицией аналогичных выражений:

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z=0) = kf \begin{bmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} \times \int_0^{\pi/2} \sum_n (\sin \theta)^{2n+1} J_1(k\rho \sin \theta) (\cos \theta)^{1/2} d\theta. \tag{16}$$

Интегралы в (16) можно взять с использованием (14) ($\alpha=2n$, $\beta=0$):

$$\int_0^1 x^{2n+1} (1-x^2)^{-1/4} J_1(k\rho x) dx = \frac{k\rho}{4} \frac{\Gamma(3/4)\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+9/4)} \times {}_1F_2\left(n + \frac{3}{2}; n + \frac{9}{4}, 2; -\frac{(k\rho)^2}{4}\right). \tag{17}$$

Из (17) видно, что на оптической оси имеется нулевое значение общей интенсивности. Однако размер тёмного пятна будет различным. Вблизи оптической оси в правой части (17) можно оставить несколько слагаемых:

$${}_1F_2\left(\frac{\alpha+3}{2}; \frac{2\alpha+9}{4}, 2; -\frac{(k\rho)^2}{4}\right) \approx 1 - \frac{\alpha+3}{2\alpha+9} \cdot \frac{(k\rho)^2}{4}, \quad (18)$$

где α – степень радиального полинома.

Тогда радиус тёмного пятна можно приближённо определить, приравняв производную по ρ в (17) нулю:

$$\rho_0 \approx \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{2\alpha+9}{3\alpha+9}}. \quad (19)$$

Как видно из (19), с ростом α радиус тёмного пятна будет уменьшаться до предельного значения $\rho_{\min} \approx 0,26\lambda$. Однако при использовании суперпозиции полиномов (8), которыми, в частности, являются полиномы Цернике, можно достичь лучшего результата.

На рис. 1 приведены результаты численного моделирования для азимутальной поляризации при использовании осесимметричных пропускающих функций. Для оценки возможности формирования вихревой теневой области малого размера используется параметр VD, показывающий диаметр тёмной области между двумя максимумами (световыми барьерами).

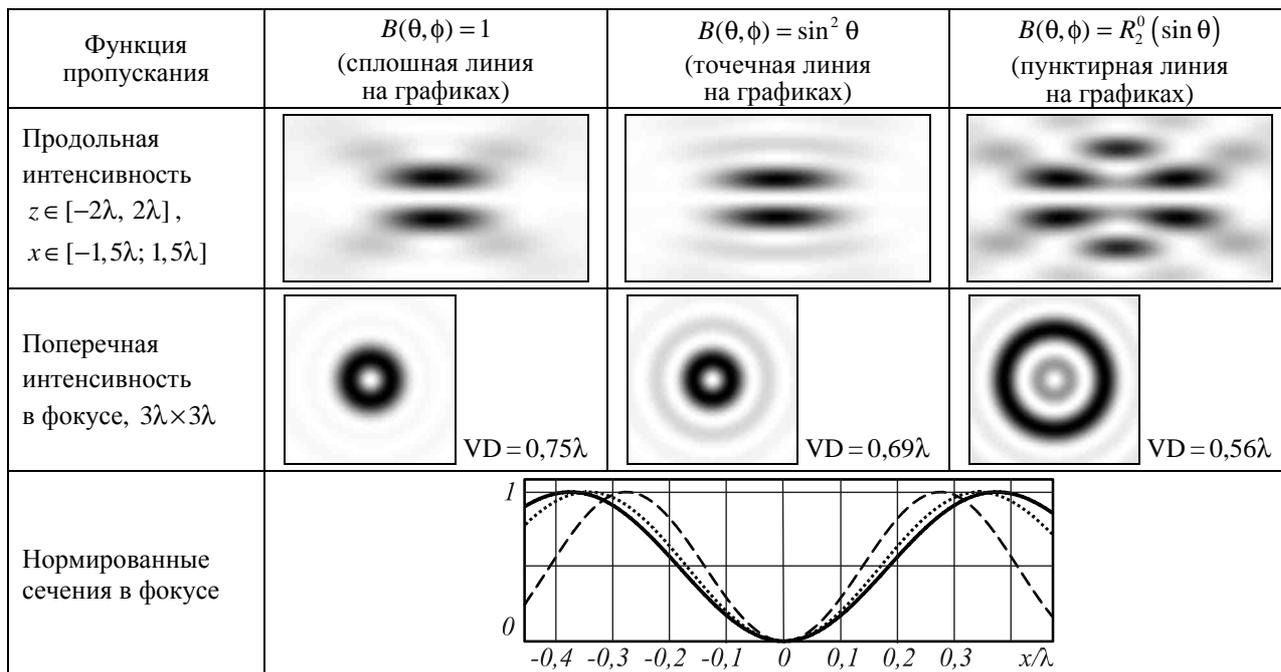


Рис. 1

3.2. Наличие вихревых составляющих первого порядка ($|m|=1$)

При $m = 1$ в (9) будут присутствовать слагаемые с номерами бesselевых функций $\nu = 0$ и $\nu = 2$, а синус в абберационных функциях (таких, как кома или дисторсия) будет иметь только нечётные степени ($\alpha = 2n + 1$). Поле (7) в фокальной плоскости ($z = 0$) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\rho, \phi, z = 0) = & \\ = \frac{kf}{2} \int_0^{\pi/2} & \begin{bmatrix} J_0(k\rho \sin \theta) + e^{i2\phi} J_2(k\rho \sin \theta) \\ iJ_0(k\rho \sin \theta) - ie^{i2\phi} J_2(k\rho \sin \theta) \\ 0 \end{bmatrix} \times & (20) \\ \times (\sin \theta)^{2n+2} & (\cos \theta)^{1/2} d\theta. \end{aligned}$$

Таким образом, каждая компонента в (20) является суперпозицией двух одинаковых слагаемых следующего вида:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^{2n+2} (1-x^2)^{-1/4} J_0(k\rho x) dx = \\ & = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(3/4)\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+9/4)\Gamma(1)} \times & (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times {}_1F_2\left(n+\frac{3}{2}; n+\frac{9}{4}, 1; -\frac{(k\rho)^2}{4}\right), \\ & \int_0^1 x^{2n+2} (1-x^2)^{-1/4} J_2(k\rho x) dx = \\ & = \frac{(k\rho)^2}{8} \frac{\Gamma(3/4)\Gamma(n+5/2)}{\Gamma(n+13/4)\Gamma(3)} \times & (22) \\ & \times {}_1F_2\left(n+\frac{5}{2}; n+\frac{13}{4}, 3; -\frac{(k\rho)^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Слагаемые, содержащиеся в интегралах функции Бесселя второго порядка, имеют меньшие абсолют-

ные значения и не вносят вклад в интенсивность на оптической оси. Таким образом, суммарную интенсивность поля вблизи оптической оси ($\rho < \epsilon$) можно приближённо описать следующим выражением:

$$I(\rho_\epsilon, \phi, z=0) \approx \left\{ \frac{kf}{2} \frac{\Gamma(3/4)\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+9/4)\Gamma(1)} \times \left[1 - \frac{(n+3/2)}{(n+9/4)} \left(\frac{k\rho_\epsilon}{2} \right)^2 \right]^2 \right\} \quad (23)$$

Как видно из (23), при $n=0$, что соответствует, например, полиному Цернике $R_1^1(\sin \theta)$, радиус центрального светового пятна будет $\rho_{\epsilon 0} \approx 0,39\lambda$. С ростом порядка полинома радиус центрального светового пятна будет стремиться к значению $\rho_{\epsilon 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda / \pi \approx 0,32\lambda$.

При отсутствии же каких-либо радиальных aberrаций, но наличии вихревой фазы первого порядка основной вклад вблизи оптической оси будет связан с выражением, которое можно вычислить, используя формулу [22]:

$$\int_0^a x^{v+1} (a^2 - x^2)^{n-1} J_v(cx) dx = \frac{2^{n-1} a^{n+v}}{c^n} \Gamma(\eta) J_{\eta+v}(ac), \quad \text{Re } v > -1. \quad (24)$$

Таким образом, при внесении в плоский азимутально-поляризованный пучок вихревой фазы первого порядка при строгой фокусировке будет формироваться световое пятно с интенсивностью, пропорциональной квадрату следующего выражения:

$$\int_0^1 x(1-x^2)^{-1/4} J_0(k\rho x) dx = \frac{\Gamma(3/4)}{2^{1/4} (k\rho)^{3/4}} J_{3/4}(k\rho). \quad (25)$$

В этом случае размер пятна будет меньше, чем для картины Эйри ($\sim J_1(x)/x$), но больше, чем для бесселевого пучка нулевого порядка.

На рис. 2 приведены результаты численного моделирования для азимутальной поляризации при использовании различных пропускающих функций, содержащих вихревую фазу первого порядка. Также приведены значения полной ширины по полуспаду интенсивности (FWHM). При использовании функций пропускания, согласованных с функцией Цернике (1, 1), удаётся получить в общей интенсивности круглое центральное световое пятно меньше дифракционного предела (FWHM = 0,46λ) с низким уровнем интенсивности в боковых лепестках. Этот факт также был обнаружен в [21]. Заметим, однако, что уменьшение размера светового пятна в этом случае достигается ценой потери энергии, т.к. радиальная зависимость выполнена с помощью амплитудной функции.

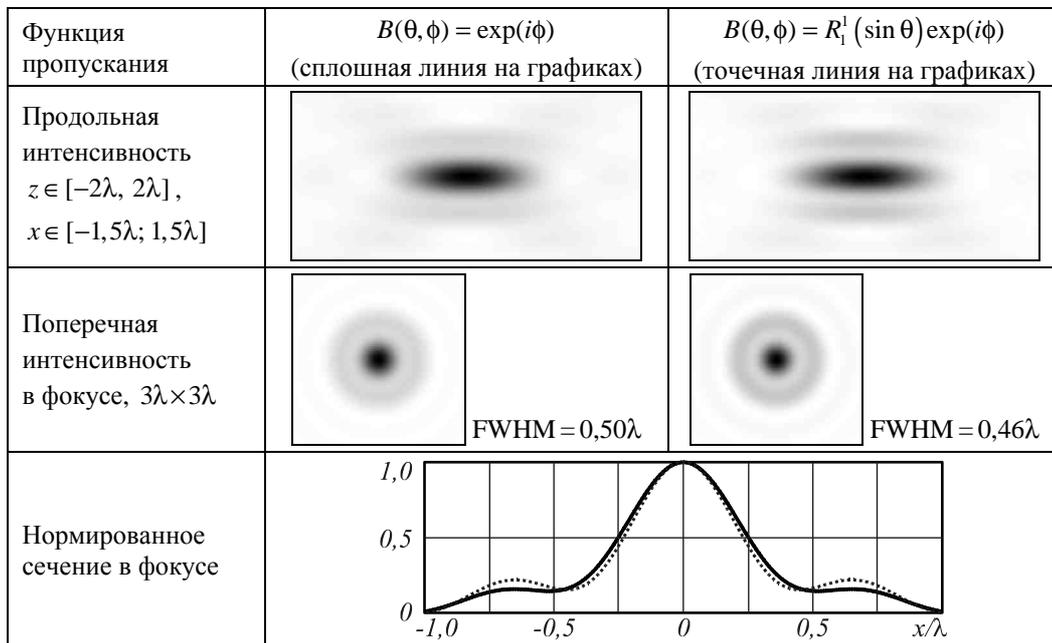


Рис. 2

4. Радиальная поляризация

При радиальной поляризации излучения, падающего на высокоапертурную фокусирующую систему, коэффициенты записываются как $a(\phi) = \cos \phi$; $b(\phi) = \sin \phi$; $c(\phi) = 0$, и тогда вектор поляризации примет вид:

$$\mathbf{P}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Вектор для вихревого поля $\mathbf{Q}_m(\rho, \phi, \theta)$ в (7) имеет следующий вид:

$$\mathbf{Q}_m(\rho, \varphi, \theta) = i^m \exp(im\varphi) \begin{bmatrix} C_m(k\rho \sin \theta) \cos \theta \\ S_m(k\rho \sin \theta) \cos \theta \\ -J_m(k\rho \sin \theta) \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Для поперечных компонент вектор (27) отличается от (13) только множителем $\cos \theta$, поэтому результаты будут аналогичны полученным в предыдущем разделе. Но в отличие от азимутальной поляризации продольная компонента не равна нулю.

4.1. Отсутствие вихревых составляющих ($m=0$)

Для функции пропускания $B(\theta, \varphi) = \sin^\alpha \theta$ ($m=0$) поле (7) в фокальной плоскости ($z=0$) для поперечных компонент:

$$\begin{pmatrix} E_x(\rho, \varphi, z=0) \\ E_y(\rho, \varphi, z=0) \end{pmatrix} = kf \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \times \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{\alpha+1} J_1(k\rho \sin \theta) (\cos \theta)^{3/2} d\theta \quad (28)$$

и для продольной компоненты:

$$E_z(\rho, \varphi, z=0) = -ikf \times \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{\alpha+2} J_0(k\rho \sin \theta) (\cos \theta)^{1/2} d\theta. \quad (29)$$

Формирование центрального светового пятна зависит от продольной компоненты:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^{\alpha+2} (1-x^2)^{-1/4} J_0(k\rho x) dx = \\ & = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(3/4) \Gamma((\alpha+3)/2)}{\Gamma(3/4 + (\alpha+3)/2)} \times \\ & \times {}_1F_2 \left(\frac{\alpha+3}{2}; \frac{\alpha+3}{2} + \frac{3}{4}, 1; -\frac{(k\rho)^2}{4} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Интенсивность вблизи оптической оси ($\rho < \varepsilon$) приближённо описывается выражением:

$$I(\rho_\varepsilon, \varphi, z=0) \approx \left\{ \frac{kf}{2} \frac{\Gamma(3/4) \Gamma((\alpha+3)/2)}{\Gamma((\alpha+3)/2 + 3/4) \Gamma(1)} \times \left[1 - \frac{(\alpha+3)}{(\alpha+3) + 3/2} \left(\frac{k\rho_\varepsilon}{2} \right)^2 \right] \right\}^2, \quad (31)$$

откуда следует, что при $\alpha = 0$ (случай безабберационной системы) радиус центрального светового пятна будет $\rho_{\varepsilon 0} \approx 0,39\lambda$. С ростом порядка полинома радиус центрального светового пятна будет стремиться к значению $\rho_{\varepsilon 0} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \lambda / \pi \approx 0,32\lambda$. Таким образом, наблюдается полная аналогия с азимутальной поляризацией в присутствии вихревой фазы первого порядка (раздел 3.2).

При использовании узкой кольцевой диафрагмы [1, 2] с радиусом, близким к радиусу фокусирующей линзы, выражение (30) примет простой вид:

$$\int_{1-\delta}^1 x^{\alpha+2} (1-x^2)^{-1/4} J_0(k\rho x) dx \approx \frac{4\delta^{3/4}}{3 \cdot 2^{1/4}} J_0(k\rho), \quad (32)$$

откуда следует, что радиус центрального светового пятна (при любых радиальных абберациях) будет $\rho_\delta \approx 0,38\lambda$.

Таким образом, пятно будет меньше, чем при использовании полноапертурной безабберационной системы, но больше, чем можно достичь введением радиальных аббераций. Заметим также, что при использовании кольцевой диафрагмы теряется большое количество входной энергии, которая блокируется в центральной части линзы. Введение функций пропускания, согласованных с функциями Цернике, позволяет существенно уменьшать размер фокального пятна ($\text{FWHM} = 0,35\lambda$) без таких существенных энергетических потерь. Причём возможно достижение ситуации, когда уровень интенсивности в боковых лепестках не слишком высок (рис. 3).

На рис. 3 приведены результаты численного моделирования для радиальной поляризации при использовании осесимметричных пропускающих функций.

4.2. Наличие вихревых составляющих первого порядка ($|m|=1$)

Для поперечных компонент ситуация будет аналогична азимутальной поляризации, а для продольной компоненты будет формироваться кольцевое распределение:

$$E_z(\rho, \varphi, z=0) = -kf \exp(i\varphi) \times \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{\alpha+2} J_1(k\rho \sin \theta) (\cos \theta)^{1/2} d\theta. \quad (33)$$

Для чётных степеней синуса ($\alpha = 2n$) воспользуемся формулой [22]:

$$\begin{aligned} & \int_0^a x^{v+2n+1} (a^2 - x^2)^{\eta-1} J_\nu(cx) dx = \\ & = \frac{1}{2} (v+1)_n \Gamma(\eta) a^{2n+2\eta+v} \left(\frac{2}{ac} \right)^{n+\eta} \times \\ & \times \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(v+1)_k} \binom{n}{k} \left(\frac{ac}{2} \right)^k J_{k+n+\eta+v}(ac), \end{aligned} \quad (34)$$

$\text{Re } v > -n - 1$.

Тогда (33) вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^{2n+2} (1-x^2)^{-1/4} J_1(k\rho x) dx = \frac{1}{2} (2)_n \Gamma(3/4) \times \\ & \times \left(\frac{2}{k\rho} \right)^{n+3/4} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2)_k} \binom{n}{k} \left(\frac{k\rho}{2} \right)^k J_{k+n+1+3/4}(k\rho). \end{aligned} \quad (35)$$

При отсутствии каких-либо радиальных аббераций (что соответствует в (35) $n=0$) получим простое выражение:

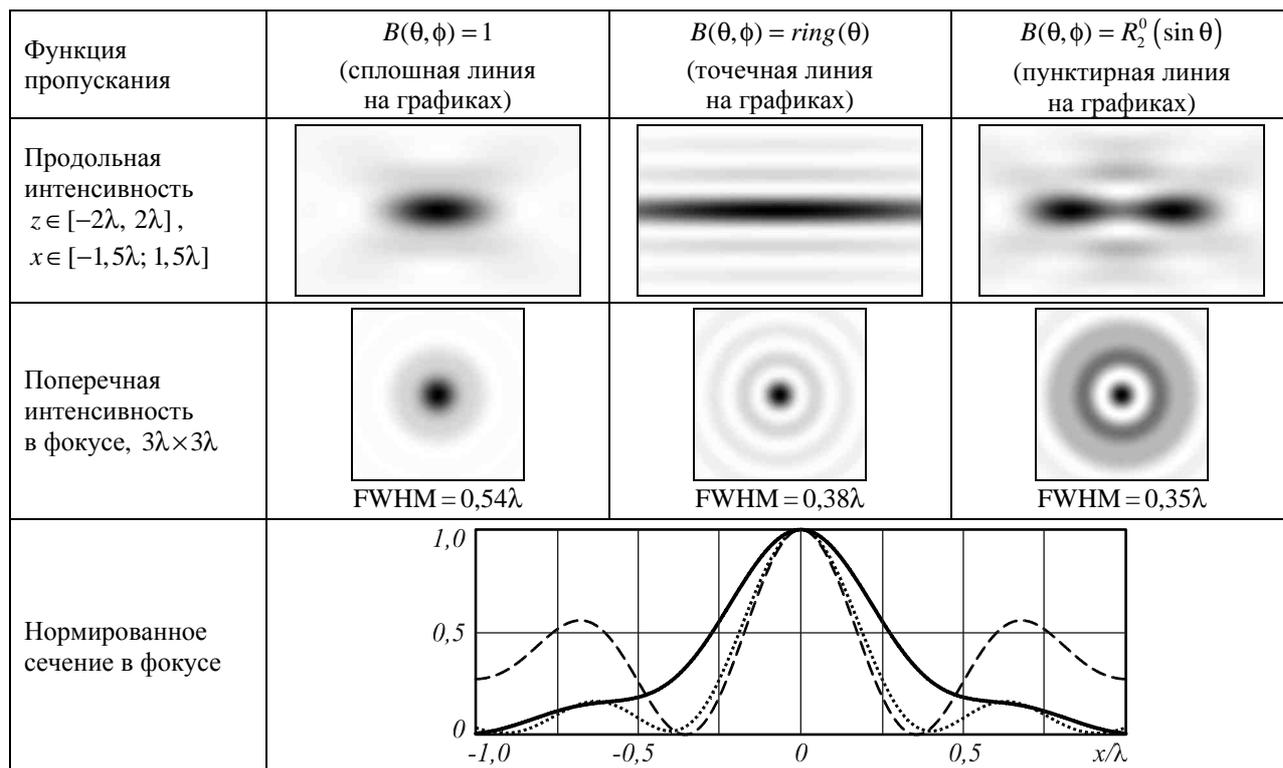


Рис. 3

$$\int_0^1 x^2 (1-x^2)^{-1/4} J_1(k\rho x) dx = \frac{1}{2} \Gamma(3/4) \left(\frac{2}{k\rho}\right)^{3/4} J_{7/4}(k\rho). \tag{36}$$

Для получения этого результата можно было воспользоваться и выражением (24).

При использовании функций Цернике радиальная часть будет зависеть от нечётных степеней синуса ($\alpha = 2n + 1$):

$$\int_0^1 x^{2n+3} (1-x^2)^{-1/4} J_1(k\rho x) dx = \frac{k\rho}{4} \frac{\Gamma(3/4)\Gamma((2n+5)/2)}{\Gamma(3/4+(2n+5)/2)\Gamma(2)} \times {}_1F_2\left(\frac{2n+5}{2}; \frac{2n+5}{2} + 3/4, 2; -\frac{(k\rho)^2}{4}\right). \tag{37}$$

В этом случае интенсивность продольной компоненты вблизи оптической оси приближённо описывается выражением:

$$I_z(\rho_e, \phi, z=0) \approx \left\{ \frac{k^2 f \rho}{4} \frac{\Gamma(3/4)\Gamma((\alpha+4)/2)}{\Gamma(3/4+(\alpha+4)/2)\Gamma(2)} \times \left[1 - \frac{(\alpha+4)}{2(\alpha+4)+3} \left(\frac{k\rho}{2}\right)^2 \right] \right\}^2. \tag{38}$$

Радиус тёмного пятна в (38) можно определить, приравняв производную по ρ нулю:

$$\rho_0 \approx \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{2\alpha+11}{3\alpha+12}}. \tag{39}$$

С ростом α радиус тёмного пятна будет уменьшаться до предельного значения $\rho_{\min} \approx 0,26\lambda$ аналогично случаю с азимутальной поляризацией (раздел 3.1).

При наложении узкой кольцевой диафрагмы (37) примет простой вид, не зависящий от aberrаций:

$$\int_{1-\delta}^1 x^{2n+3} (1-x^2)^{-1/4} J_1(k\rho x) dx \approx \frac{4\delta^{3/4}}{3 \cdot 2^{1/4}} J_1(k\rho). \tag{40}$$

В этом случае радиус тёмного пятна будет $\rho_8 \approx 0,29\lambda$. Таким образом, пятно будет меньше, чем при использовании полноапертурной безабберационной системы, но больше, чем можно достичь введением радиальных aberrаций.

На рис. 4 приведены результаты численного моделирования для пучка с радиальной поляризацией, содержащего вихревую фазу первого порядка при использовании узкой кольцевой диафрагмы, а также для пучка, согласованного с функцией Цернике (1,1). В последнем случае удастся только для z -компоненты уменьшить диаметр тёмного кольца VD до $0,52\lambda$, причём за счёт существенного роста боковых лепестков. Улучшить результат для общей интенсивности по сравнению с азимутальной поляризацией не удастся.

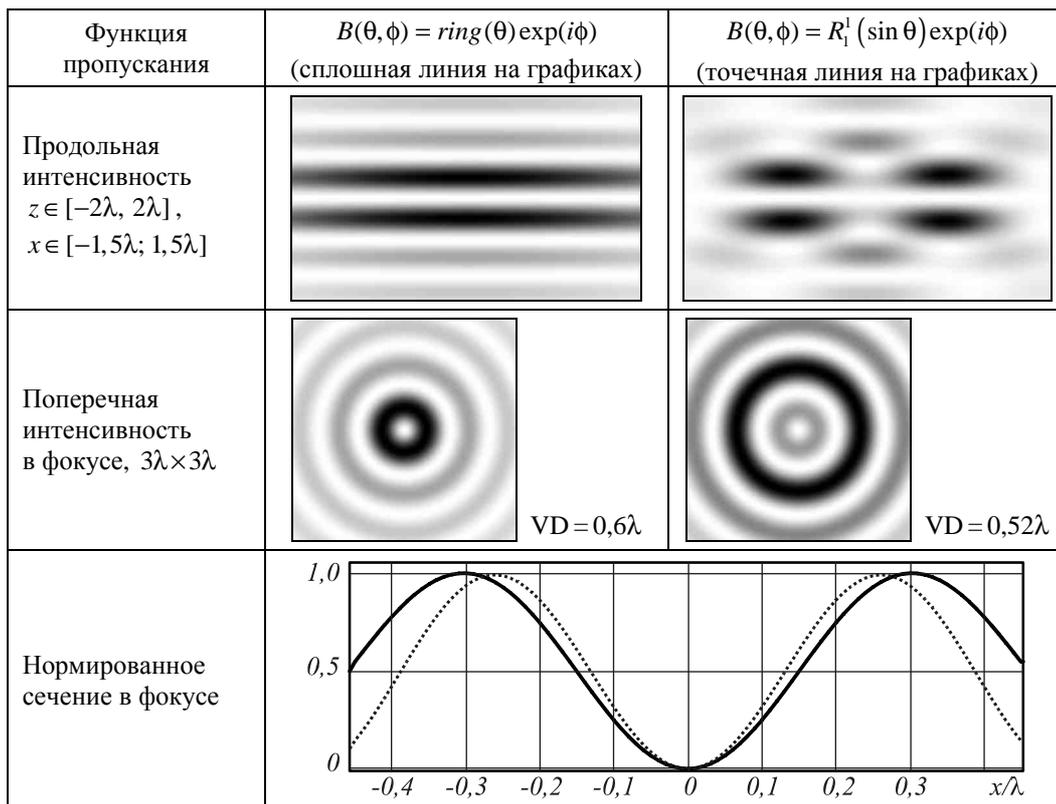


Рис. 4. Продольная компонента

Как видно из результатов разделов 3 и 4, с помощью вихревой фазовой функции можно менять структуру пучков с цилиндрической поляризацией, но пучки с азимутальной поляризацией целесообразно использовать для формирования тёмных пятен, а с радиальной – для световых.

5. Линейная x-поляризация

Поскольку большинство современных лазеров генерируют излучение с линейной поляризацией, то остаётся актуальным вопрос прямого (без использования устройств преобразования поляризации) уменьшения размера фокального пятна при линейной поляризации.

При линейной x-поляризации соответствующие коэффициенты освещающего пучка равны: $a(\phi) = 1$; $b(\phi) = 0$; $c(\phi) = 0$ и поляризационное преобразование (5) сводится к виду:

$$P(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} 1 + \cos^2 \phi (\cos \theta - 1) \\ \sin \phi \cos \phi (\cos \theta - 1) \\ -\cos \phi \sin \theta \end{bmatrix}. \tag{41}$$

Для вихревых функций пропускания (6) вектор $Q_m(\rho, \phi, \theta)$ в (7) может быть представлен выражением:

$$Q_m(\rho, \phi, \theta) = i^m \exp(im\phi) \times \begin{bmatrix} J_m(t) + C2_m(t)(\cos \theta - 1) \\ SC_m(t)(\cos \theta - 1) \\ -C_m(t) \sin \theta \end{bmatrix}, \quad t = k\rho \sin \theta, \tag{42}$$

где

$$C2_m(t) = \frac{1}{4} [2J_m(t) - e^{i2\phi} J_{m+2}(t) - e^{-i2\phi} J_{m-2}(t)],$$

$$SC_m(t) = \frac{i}{4} [e^{i2\phi} J_{m+2}(t) - e^{-i2\phi} J_{m-2}(t)].$$

В фокальной плоскости ($z=0$) будет соответствующая суперпозиция:

$$E(\rho, \phi, z) = -kf \sum_m c_m i^{m+1} \exp(im\phi) \times \int_0^{\pi/2} D_m(\theta) \begin{bmatrix} J_m(t) + C2_m(t)(\cos \theta - 1) \\ SC_m(t)(\cos \theta - 1) \\ -C_m(t) \sin \theta \end{bmatrix} \times \sqrt{\cos \theta \sin \theta} d\theta. \tag{43}$$

На оптической оси ($\rho=0$) выражение (43) будет содержать ненулевые компоненты только для порядков вихревой сингулярности $|m| \leq 2$. При этом, как было показано в [21], осевое распределение имеет определённую поляризацию: исходную линейную x-поляризацию при $m=0$, продольную – при $|m|=1$ и круговую – при $|m|=2$.

5.1. Отсутствие вихревых составляющих ($m=0$)

При $m=0$ на оптической оси ненулевой будет только x-компонента:

$$E_x(\rho, \phi, 0) = -ikf \int_0^{\pi/2} \left\{ J_0(k\rho \sin \theta) + \frac{1}{2} \left[J_0 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (k\rho \sin \theta) - \cos 2\phi J_2(k\rho \sin \theta) \right] (\cos \theta - 1) \right\} \times \\ \times (\sin \theta)^{\alpha+1} (\cos \theta)^{1/2} d\theta, \quad (44)$$

где $B(\theta, \phi) = \sin^\alpha \theta$.

При наложении узкой кольцевой диафрагмы выражение (44) примет простой вид, не зависящий от aberrаций:

$$\int_{1-\delta}^1 x^{\alpha+1} (1-x^2)^{-1/4} \times \\ \times \left[\frac{3}{2} J_0(k\rho x) - \frac{\cos 2\phi}{2} J_2(k\rho x) \right] dx \approx \\ \approx \frac{4\delta^{3/4}}{6 \cdot 2^{1/4}} \left[3J_0(k\rho) - \cos 2\phi J_2(k\rho) \right]. \quad (45)$$

На рис. 5 приведены результаты численного моделирования для линейной x -поляризации при использовании осесимметричных пропускающих функций.

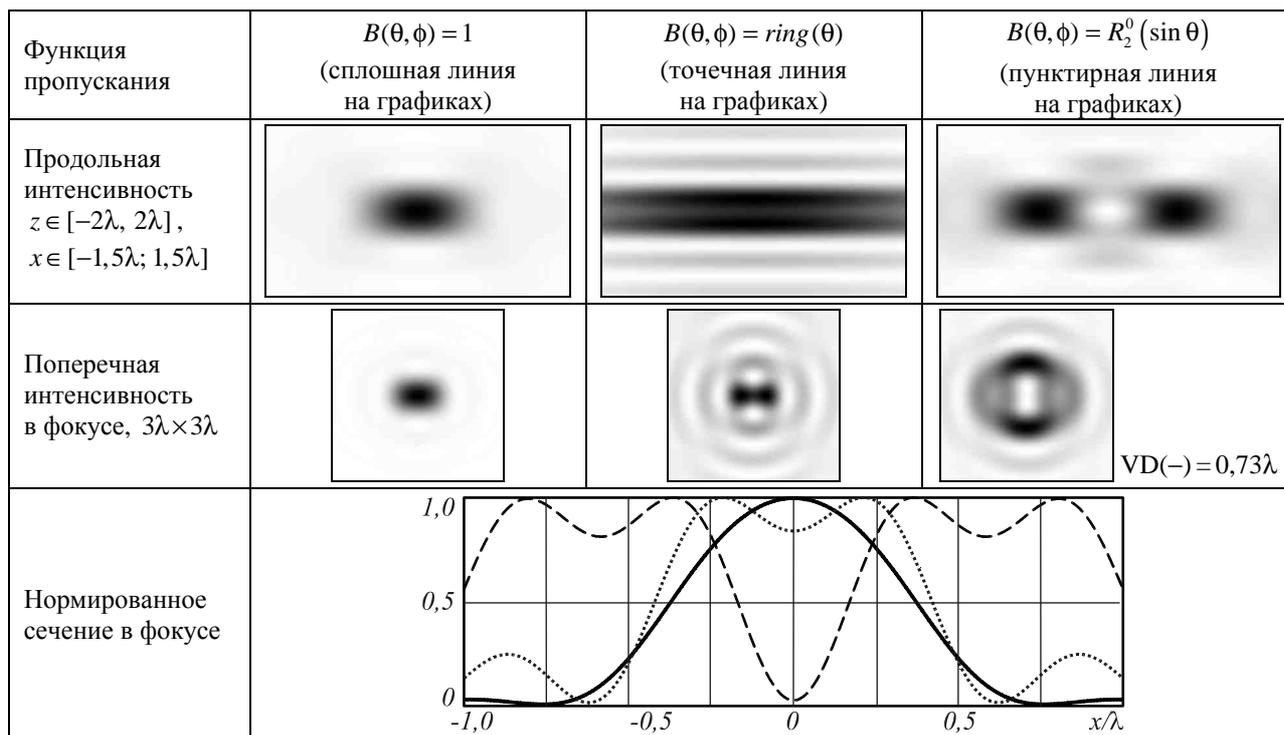


Рис. 5

Заметим, что при использовании функции Цернике $(2, 0)$ в фокальной области формируется тёмное пятно, окружённое со всех сторон световым барьером (см. продольное распределение интенсивности) – так называемая оптическая бутылка. Это основное отличие от случаев тёмного пятна, полученного в предыдущих разделах. Диаметр тёмного пятна даже в горизонтальном направлении довольно большой и составляет $VD(-) = 0,73\lambda$.

5.2. Наличие вихревых составляющих первого порядка ($|m| = 1$)

В этом случае основной вклад в область вблизи оптической оси вносит z -компонента:

$$E_z(\rho, \phi, z = 0) = \\ = \frac{ikf}{2} \int_0^{\pi/2} \left[J_0(k\rho \sin \theta) - e^{i2\phi} J_2(k\rho \sin \theta) \right] \times \\ \times (\sin \theta)^{\alpha+2} (\cos \theta)^{1/2} d\theta, \quad (44)$$

где $B(\theta, \phi) = \sin^\alpha \theta \exp(i\phi)$.

Фокальное пятно также не имеет осевой симметрии и зависит от угла ϕ . При использовании функций Цернике степень α будет нечётной и можно воспользоваться выражением (34):

$$\int_0^1 x^{2n+3} (1-x^2)^{-1/4} \left[J_0(k\rho x) - e^{i2\phi} J_2(k\rho x) \right] dx = \\ = \frac{\Gamma(3/4)}{2} \left(\frac{2}{k\rho} \right)^{n+7/4} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \left(\frac{k\rho}{2} \right)^k \times \\ \times J_{k+n+7/4}(k\rho) - \exp(i2\phi) \frac{(3)_n \Gamma(3/4)}{2} \times \\ \times \left(\frac{2}{k\rho} \right)^{n+3/4} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(3)_k} \binom{n}{k} \left(\frac{k\rho}{2} \right)^k J_{k+n+11/4}(k\rho). \quad (45)$$

На рис. 6 приведены результаты численного моделирования для линейной x -поляризации в присутствии вихревой фазы первого порядка. Для продольной компоненты наблюдается существенное уменьшение размера центрального пятна в горизонтальном направлении, которое совпадает с направлением поляризации. При использовании узкой

кольцевой диафрагмы фокальная область вытягивается вдоль оптической оси, а в плоскости фокуса общая интенсивность сплющивается до $FWHM(-) = 0,4\lambda$ ($FWHM_z(-) = 0,3\lambda$). Введение полноапертурной функции пропускания Цернике (3, 1) приводит к формированию слабого светового пятна в центре довольно большой оптической бутылки. Размер этого слабого пятна по горизонтали существенно меньше дифракционного предела $FWHM(-) = 0,24\lambda$ ($FWHM_z(-) = 0,21\lambda$), но использовать его проблематично из-за высоких боковых лепестков.

5.3. Наличие вихревых составляющих второго порядка ($|m| = 2$)

На оптической оси ненулевыми будут x - и y -компоненты [21]. Вблизи оптической оси будет формироваться поле, которое является суперпозицией интегралов типа (9).

На рис. 7 приведены результаты численного моделирования для линейной x -поляризации в присутствии вихревой фазы второго порядка. Для y -компоненты формируется круглое центральное пятно меньше дифракционного предела. Также для продольной компоненты возникает компактное тёмное пятно. Однако интенсивность в обоих этих компонентах значительно ниже, чем в x -компоненте. При использовании узкой кольцевой диафрагмы в центральной части сосредоточено больше энергии, чем при введении функции пропускания Цернике. В последнем случае

уменьшение размеров центрального пятна (светового до $FWHM_y = 0,34\lambda$ и тёмного до $VD_z = 0,48\lambda$) происходит за счёт роста боковых лепестков.

При острой фокусировке линейно-поляризованного излучения фокальное пятно вытягивается вдоль оси поляризации. Скомпенсировать это вытягивание можно введением вихревой фазовой сингулярности первого порядка $\exp(i\phi)$, которое позволяет получить компактное пятно только для z -компоненты [20]. Однако чтобы получить компактное световое пятно в общей интенсивности, необходимы дополнительные амплитудные вариации, которые обеспечивает либо узкая кольцевая щель, либо радиальная часть рассматриваемых функций Цернике. При этом наблюдается существенный рост энергии в боковых лепестках.

Использование вихревой фазовой сингулярности второго порядка $\exp(i2\phi)$ с соответствующими полиномами Цернике обеспечивает формирование для продольной компоненты (E_z) компактного тёмного пятна ($VD_z = 0,48\lambda$).

6. Круговая поляризация

Круговая (циркулярная) поляризация также является распространённым и простым в реализации типом поляризации. Для круговой поляризации входного поля коэффициенты с учётом нормировки равны $a(\phi) = 1/\sqrt{2}$; $b(\phi) = \pm i/\sqrt{2}$; $c(\phi) = 0$, а вектор поляризации имеет вид:

$$P(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [1 + \cos^2 \phi (\cos \theta - 1)] \pm i [\sin \phi \cos \phi (\cos \theta - 1)] \\ [\sin \phi \cos \phi (\cos \theta - 1)] \pm i [1 + \sin^2 \phi (\cos \theta - 1)] \\ - \sin \theta [\cos \phi \pm i \sin \phi] \end{bmatrix}. \tag{46}$$

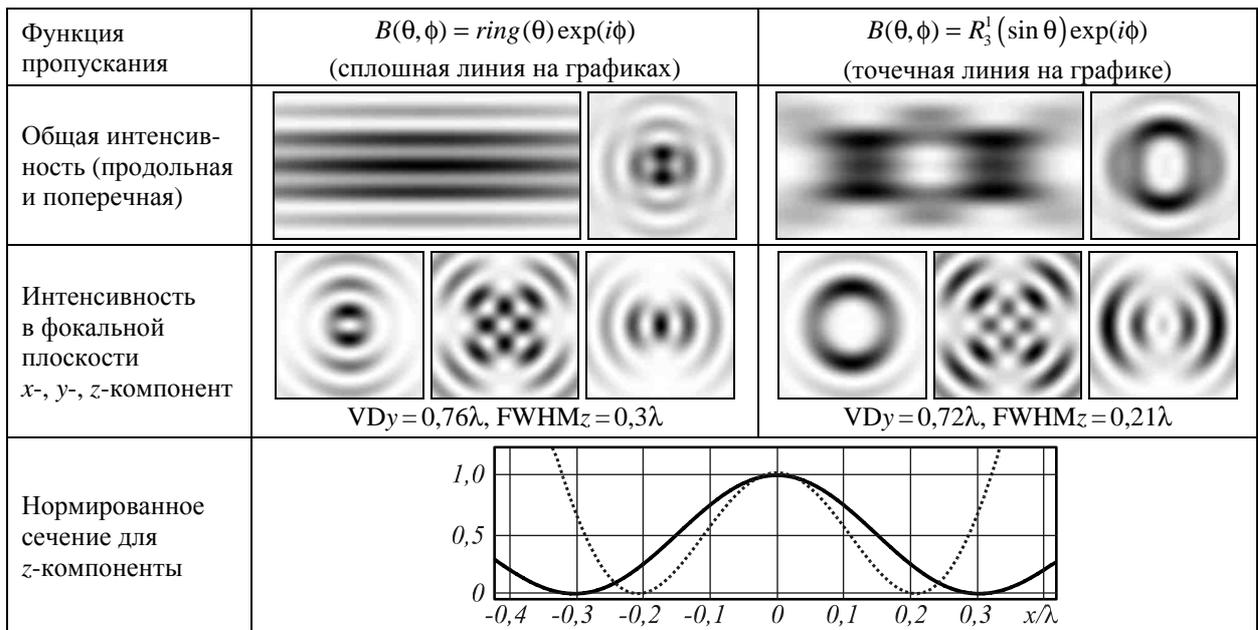


Рис. 6

Вектор для вихревого поля в (7):

$$Q_m(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{2} i^m \exp(im\varphi) \operatorname{sgn}(p) i \left\{ \begin{array}{l} J_m(t) + \frac{1}{2} [J_m(t) + E2_m(t)] (\cos \theta - 1) \\ J_m(t) + \frac{1}{2} (J_m(t) - E2_m(t)) (\cos \theta - 1) \\ -E1_m(t) \sin \theta \end{array} \right\}, \quad (47)$$

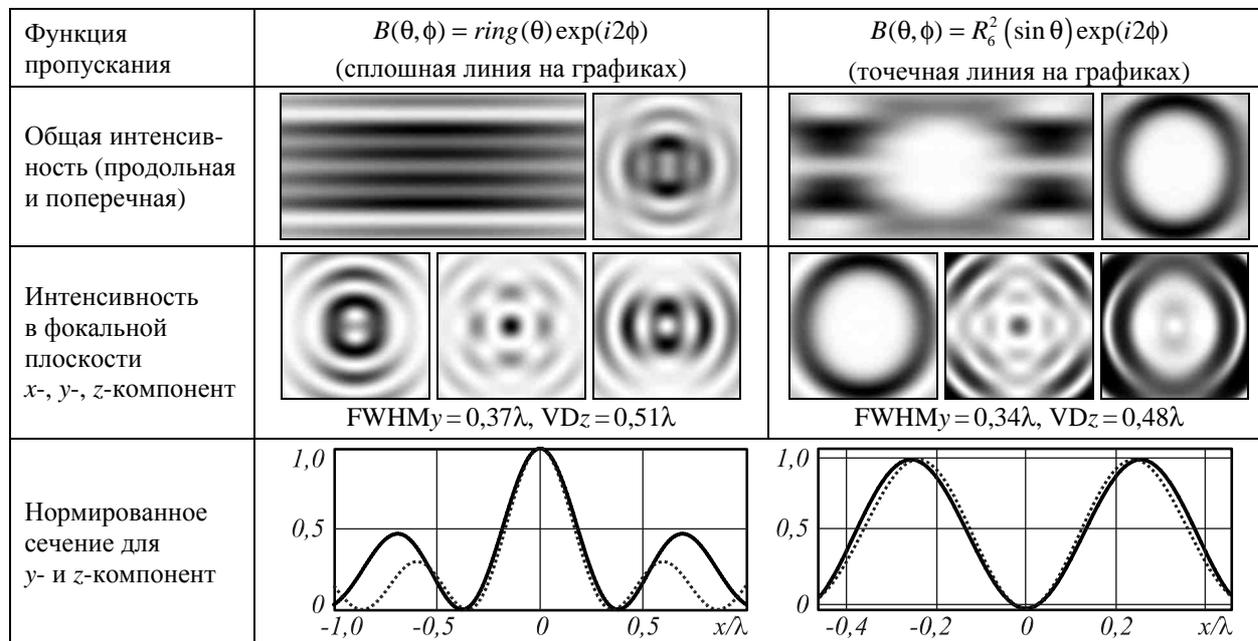


Рис. 7

где $E1_m(t) = \operatorname{sgn}(p) i e^{\operatorname{sgn}(p)i\varphi} J_{m+\operatorname{sgn}(p)1}(t)$,

$$E2_m(t) = -e^{\operatorname{sgn}(p)i2\varphi} J_{m+\operatorname{sgn}(p)2}(t), \quad t = k\rho \sin \theta,$$

$\operatorname{sgn}(p)$ – знак входной поляризации.

Выражение (47) обеспечивает ненулевые значения на оптической оси ($\rho=0$) при значениях вихревого индекса $|m| \leq 2$ [21]: $m=0$ соответствует круговой поляризации того же знака, что и входное поле; при $m=1$ и знаке входной поляризации «-» (аналогичный результат при $m=-1$ и знаке входной поляризации «+») имеется только продольная составляющая; при $m=2$ и $\operatorname{sgn}(p)=-1$ (аналогично при $m=-2$ и знаке входной поляризации $\operatorname{sgn}(p)=1$) будет круговая поляризация того же знака, что и входное поле.

Ситуация похожа на случай линейной поляризации, но участвуют обе поперечные компоненты, поэтому распределение в фокальной плоскости имеет осевую симметрию.

6.1. Отсутствие вихревых составляющих ($m=0$)

Вблизи оптической оси ($\rho < \epsilon$) интенсивность будет определяться вкладом поперечных компонент:

$$I_{xy}(\rho_\epsilon, \varphi, 0) = 0,25 \left| k f \int_0^{\pi/2} D(\theta) J_0 \times \right. \quad (48)$$

$$\left. \times (k\rho \sin \theta) (\cos \theta + 1) \sin \theta (\cos \theta)^{1/2} d\theta \right|^2,$$

где $D(\theta)$ – радиальная зависимость функции пропускания.

При наложении узкой кольцевой диафрагмы выражение (48) примет простой вид, не зависящий от $D(\theta)$:

$$\int_{1-\delta}^1 J_0(k\rho x) \left[(1-x^2)^{-1/4} + (1-x^2)^{1/4} \right] dx \approx \quad (49)$$

$$\approx J_0(k\rho) \left[\frac{4\delta^{3/4}}{3 \cdot 2^{1/4}} + \frac{4 \cdot 2^{1/4} \delta^{5/4}}{5} \right].$$

Как следует из (49), размер светового пятна будет определяться радиусом центрального пятна функции Бесселя нулевого порядка, т.е. минимальный радиус $\rho_{\epsilon 0} = 0,38\lambda$.

При использовании функции Цернике (2,0) $D(\theta) = 2 \sin^2 \theta - 1 = 1 - 2 \cos^2 \theta$ и (48) представляется через суперпозицию выражений вида:

$$\int_0^1 x (1-x^2)^{\eta-1} J_0(k\rho x) dx = \frac{2^{\eta-1}}{(k\rho)^\eta} \Gamma(\eta) J_\eta(k\rho), \quad (50)$$

где $\eta = 3/4, 7/4, 11/4, 15/4$. В этом случае размер центрального светового пятна может оказаться очень малого размера.

На рис. 8 приведены результаты численного моделирования для круговой «+»-поляризации при использовании осесимметричных пропускающих функций. При использовании функции Цернике (2,0) в фокальной области формируется оптическая бутылка. В центре тёмной области имеется очень слабое световое пятно, которое формируется за счёт поперечных компонент. Это световое пятно имеет

круглую форму и размер его значительно меньше дифракционного предела ($\text{FWHM}_{xy} = 0,15\lambda$).

6.2. Наличие вихревых составляющих первого порядка ($|m|=1$)

В этом случае основной вклад в область вблизи оптической оси вносит z -компонента:

$$E_z(\rho, \phi, z=0) = \frac{ikf}{2} \int_0^{\pi/2} J_0(k\rho \sin \theta) (\sin \theta)^{\alpha+2} (\cos \theta)^{1/2} d\theta, \quad (51)$$

где $B(\theta, \phi) = \sin^\alpha \theta \exp(-i\phi)$.

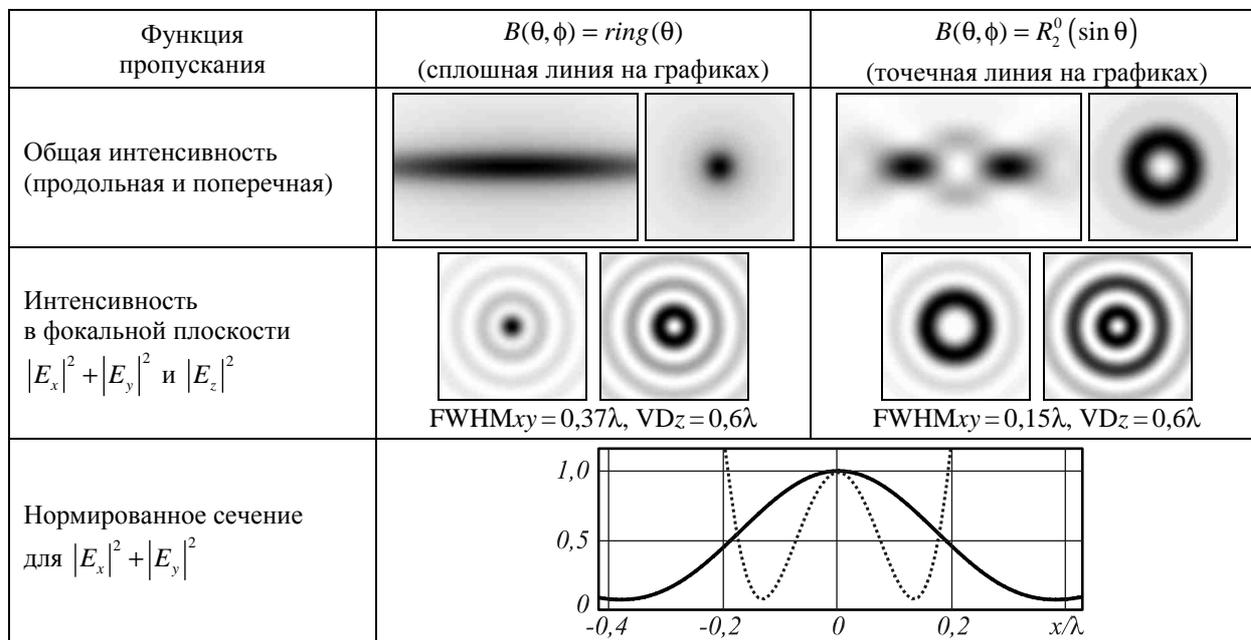


Рис. 8

В отличие от линейной поляризации (44) здесь наблюдается осевая симметрия.

На рис. 9 приведены результаты численного моделирования для круговой «+»-поляризации в присутствии вихревой фазы первого порядка $\exp(-i\phi)$. Для продольной компоненты формируется компактное круглое световое пятно. При использовании узкой кольцевой диафрагмы формируется z -компонента, пропорциональная функции Бесселя нулевого порядка ($\text{FWHM}_z = 0,37\lambda$), однако размер фокального пятна для общей интенсивности за счёт вклада поперечных компонент превышает дифракционный предел $\text{FWHM} = 0,59\lambda$. Введение полноапертурной функции пропускания Цернике (3, 1) приводит к формированию слабого, но заметного светового пятна в центре довольно большой оптической бутылки $\text{FWHM} = 0,35\lambda$. Это световое пятно имеет круглую форму и обеспечивается вкладом продольной компоненты с экстремально компактным центральным лепестком ($\text{FWHM}_z = 0,26\lambda$).

6.3. Наличие вихревых составляющих второго порядка ($|m|=2$)

На оптической оси ненулевыми будут x - и y -компоненты [21]. Вблизи оптической оси будет формироваться поле, которое является суперпозицией интегралов типа (9). Ситуация аналогична линейной поляризации, но структура фокального поля имеет осевую симметрию.

На рис. 10 приведены результаты численного моделирования для круговой «+»-поляризации в

присутствии вихревой фазы второго порядка $\exp(-i2\phi)$.

Для поперечных компонент формируется круглое центральное пятно меньше дифракционного предела. Для продольной компоненты в этом случае формируется компактное световое кольцо. В общей интенсивности они накладываются друг на друга, и, чтобы воспользоваться распределением в отдельных компонентах, нужно применять избирательно чувствительные материалы [23]. При использовании узкой кольцевой диафрагмы в центральной части сосредоточено больше энергии, чем при введении функции пропускания Цернике. Однако в последнем случае формируются наиболее компактные распределения центрального пятна (световое $\text{FWHM}_{xy} = 0,31\lambda$ и тёмное $\text{VD}_z = 0,44\lambda$). При этом, конечно, происходит рост боковых лепестков, но они располагаются на достаточном расстоянии от центрального пятна.

Интересные результаты в этом случае получают в отдельных компонентах электрического поля в фокальной области: при использовании функций пропускания, согласованных с функцией Цернике (4, 2), можно получить для поперечных компонент круглое центральное световое пятно меньше дифракционного предела $\text{FWHM}_{xy} = 0,31\lambda$ и одновременно в продольной компоненте световое кольцо экстремально малого размера $\text{VD}_z = 0,44\lambda$. Данный факт может быть полезен при использовании материалов, избирательно чувствительных к различным компонентам электрического поля [23].

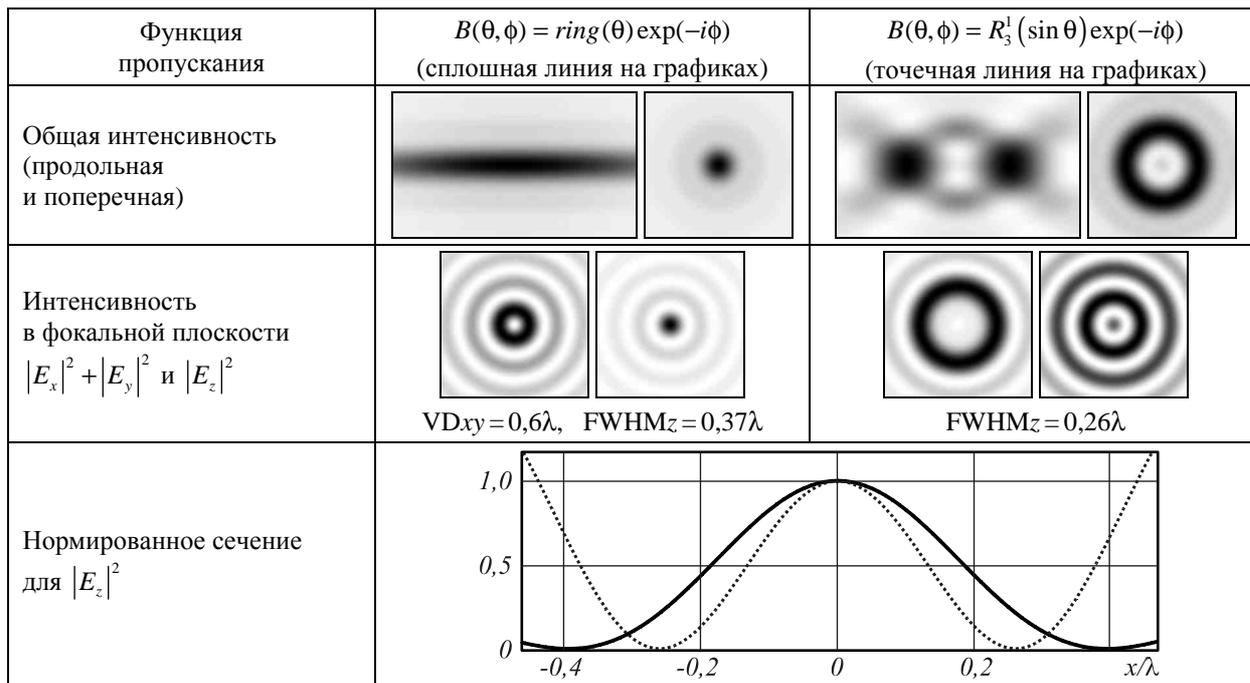


Рис. 9

Заключение

В работе рассмотрено введение пропускающих функций, соответствующих волновым aberrациям, в высокоапертурных фокусирующих системах с различной поляризацией в модели Дебая. В результате подтверждена возможность уменьшения размера фокального пятна. Причём уменьшение фокального пятна для линейной поляризации вдоль одного направления оказывается меньшим, чем для радиальной поляризации: для линейной поляризации получено вытянутое фокальное пятно шириной по уровню

полусапада интенсивности вдоль оси поляризации FWHM(-) = 0,24λ, для радиальной поляризации получено круглое пятно диаметром по полусападу интенсивности FWHM = 0,35λ.

Недостатком такого подхода является перераспределение энергии в боковые лепестки. Использование азимутальной поляризации в сочетании с наличием вихревой фазовой функции первого порядка позволяет получить в общей интенсивности круглое центральное световое пятно меньше дифракционного предела (FWHM = 0,46λ) с низким уровнем интенсивности в боковых лепестках.

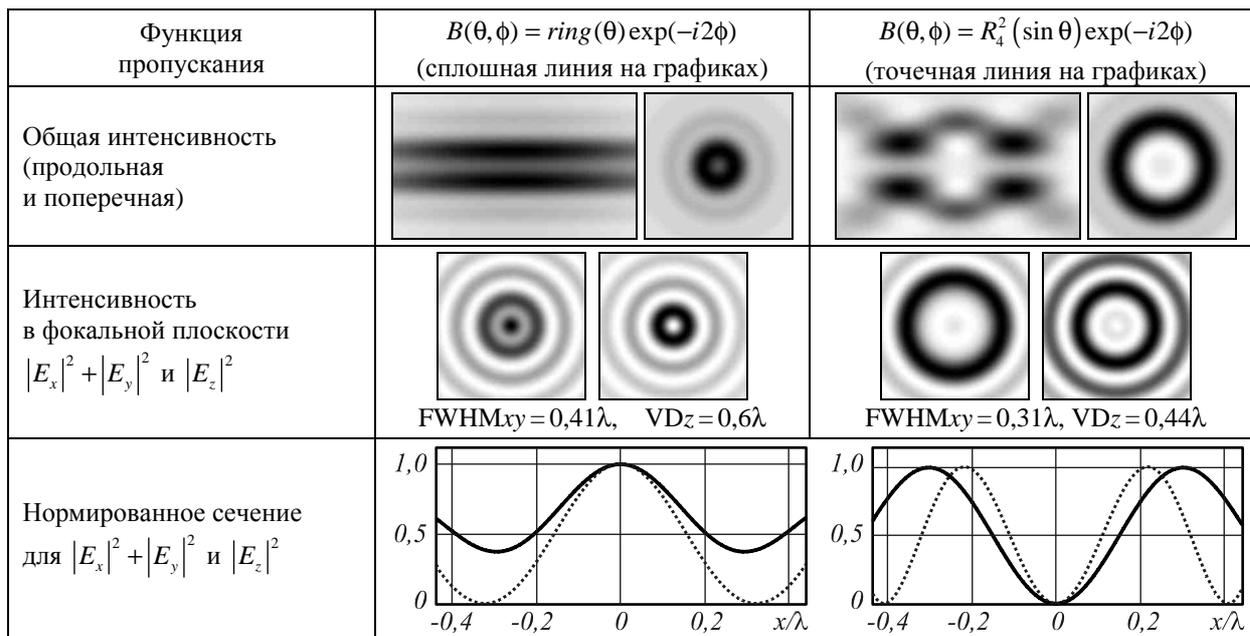


Рис. 10

Также нужно отметить, что в отдельных компонентах электрического вектора уровень боковых лепестков не столь существенный, как в суммарной интенсивности. В частности, при круговой поляризации для z -компоненты получено круглое фокальное пятно с диаметром по полуспаду интенсивности $\text{FWHM}_z = 0,26\lambda$, а также теневое пятно диаметром $\text{VD}_z = 0,44\lambda$. Эти результаты лучше, чем для радиальной поляризации ($\text{FWHM}_z = 0,34\lambda$ и $\text{VD}_z = 0,52\lambda$), для генерации которой необходимы достаточно сложные или дорогостоящие устройства.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант CRDF PG08-014-1), грантов РФФИ 10-07-00109-а, 10-07-00438-а и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-7414.2010.9.

Литература

1. **Quabis, S.** Focusing light to a tighter spot / S. Quabis // *Opt. Commun.* – 2000. – V. 179. – P. 1-7.
2. **Dorn, R.** Sharper focus for a radially polarized light beam / R. Dorn // *Phys. Rev. Lett.* – 2003. – V. 91. – P. 233901.
3. **Sheppard, Colin J.R.** Annular pupils, radial polarization, and superresolution / Colin J.R. Sheppard // *Appl. Opt.* – 2004. – V. 43(22). – P. 4322-4327.
4. **Хонина, С.Н.** Исследование применения аксиконов в высокоапертурной фокусирующей системе / С.Н. Хонина, С.Г. Волотовский // *Компьютерная оптика.* – 2010. – Т. 34, № 1. – С. 35-51.
5. **Хонина, С.Н.** Управление вкладом компонент векторного электрического поля в фокусе высокоапертурной линзы с помощью бинарных фазовых структур / С.Н. Хонина, С.Г. Волотовский // *Компьютерная оптика.* – 2010. – Т. 34, № 1. – С. 58-68.
6. **Visser, T.D.** Spherical aberration and the electromagnetic field in high-aperture systems / T.D. Visser, S.H. Wiersma // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1991. – V. 8, N 9. – P. 1404-1410.
7. **Visser, T.D.** Diffraction of converging electromagnetic waves / T.D. Visser, S.H. Wiersma // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1992. – V. 9, N 11. – P. 2034-2047.
8. **Kant, R.** An analytical solution of vector diffraction for focusing optical systems with Seidel aberrations / R. Kant // *J. Mod. Opt.* – 1993. – Vol. 40. – P. 2293-2311.
9. **Kant, R.** Superresolution and increased depth of focus: an inverse problem of vector diffraction / R. Kant // *J. Mod. Opt.* – 2000. – Vol. 47(5). – P. 905-916.
10. **Braat, J.J.M.** Extended Nijboer–Zernike approach to aberration and birefringence retrieval in a high-numerical-aperture optical system / J.J.M. Braat, P. Dirksen, A.J.E.M. Janssen, S. van Haver, A.S. van de Nes // *Opt. Soc. Am. A.* – 2005. – V. 22, N 12. – P. 2635-2650.
11. **Braat, J.J.M.** Energy and momentum flux in a high-numerical-aperture beam using the extended Nijboer–Zernike diffraction formalism / J.J.M. Braat, S. van Haver, A.J.E.M. Janssen, P. Dirksen // *Journal of the European Optical Society.* – 2007. – Rapid Publications 2, 07032. – P. 1-13.
12. **Biss, D.P.** Primary aberrations in focused radially polarized vortex beams / D.P. Biss and T.G. Brown // *Opt. Express.* – 2004. – Vol. 12. – P. 384-393.
13. **Rao, R.** Field confinement with aberration correction for solid immersion lens based fluorescence correlation spectroscopy / R. Rao, J. Mitic, A. Serov, R.A. Leitgeb, T. Lasser // *Optics Communications.* – 2007. – Vol. 271. – P. 462-469.
14. **Singh, R.K.** Effect of primary spherical aberration on high-numerical-aperture focusing of a Laguerre–Gaussian beam / R.K. Singh, P. Senthilkumaran, K. Singh // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2008. – V. 25, N 6. – P. 1307-1318.
15. **Singh, R.K.** Tight focusing of vortex beams in presence of primary astigmatism / R.K. Singh, P. Senthilkumaran, K. Singh // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2009. – V. 26, N 3. – P. 576-588.
16. **Singh, R.K.** Structure of a tightly focused vortex beam in the presence of primary coma / R.K. Singh, P. Senthilkumaran, K. Singh // *Optics Communications.* – 2009. – Vol. 282. – P. 1501-1510.
17. **Born, M.** Principles of Optics / M. Born, E. Wolf. – Oxford: Pergamon Press, 1968.
18. **Khonina, S.N.** Diffractive optical element matched with Zernike basis / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, Ya. Wang // *Pattern Recognition and Image Analysis.* – 2001. – Vol. 11(2). – P. 442-445.
19. **Sheppard, C.J.R.** Orthogonal aberration functions for high-aperture optical systems / C.J.R. Sheppard // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2004. – Vol. 21, N 5. – P. 832-838.
20. **Richards, B.** Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system / B. Richards and E. Wolf // *Proc. R. Soc. London Ser. A.* – 1959. – V. 253. – P. 358-379.
21. **Хонина, С.Н.** Анализ возможности субволновой локализации света и углубления фокуса высокоапертурной фокусирующей системы при использовании вихревой фазовой функции пропускания / С.Н. Хонина, С.Г. Волотовский // *Электромагнитные волны и электронные системы.* – 2010. – № 11. – С. 6-25.
22. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Т. 2. Специальные функции. / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Марищев. – М.: Наука, 1983. – 753 с.
23. **Grosjean, T.** Photopolymers as vectorial sensors of the electric field / T. Grosjean and D. Courjon // *Optics Express.* – 2006. – Vol. 14, Issue 6. – P. 2203-2210.

References

1. **Quabis, S.** Focusing light to a tighter spot / S. Quabis // *Opt. Commun.* – 2000. – V. 179. – P. 1-7.
2. **Dorn, R.** Sharper focus for a radially polarized light beam / R. Dorn // *Phys. Rev. Lett.* – 2003. – V. 91. – P. 233901.
3. **Sheppard, Colin J.R.** Annular pupils, radial polarization, and superresolution / Colin J.R. Sheppard // *Appl. Opt.* – 2004. – V. 43(22). – P. 4322-4327.
4. **Khonina, S.N.** Investigation on axicon application in high-aperture focusing system / S.N. Khonina, S.G. Volotovskiy // *Computer Optics.* – 2010. – V. 34, N 1. – С. 35-51. – (In Russian).
5. **Khonina, S.N.** Control by contribution of components of vector electric field in focus of a high-aperture lens by means of binary phase structures / S.N. Khonina, S.G. Volotovskiy // *Computer Optics.* – 2010. – V. 34, N 1. – P. 58-68. – (In Russian).
6. **Visser, T.D.** Spherical aberration and the electromagnetic field in high-aperture systems / T.D. Visser, S.H. Wiersma // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1991. – V. 8, N 9. – P. 1404-1410.
7. **Visser, T.D.** Diffraction of converging electromagnetic waves / T.D. Visser, S.H. Wiersma // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1992. – V. 9, N 11. – P. 2034-2047.

8. **Kant, R.** An analytical solution of vector diffraction for focusing optical systems with Seidel aberrations / R. Kant // *J. Mod. Opt.* – 1993. – Vol. 40. – P. 2293-2311.
9. **Kant, R.** Superresolution and increased depth of focus: an inverse problem of vector diffraction / R. Kant // *J. Mod. Opt.* – 2000. – Vol. 47(5). – P. 905-916.
10. **Braat, J.J.M.** Extended Nijboer–Zernike approach to aberration and birefringence retrieval in a high-numerical-aperture optical system / J.J.M. Braat, P. Dirksen, A.J.E.M. Janssen, S. van Haver, A.S. van de Nes // *Opt. Soc. Am. A.* – 2005. – V. 22, N 12. – P. 2635-2650.
11. **Braat, J.J.M.** Energy and momentum flux in a high-numerical-aperture beam using the extended Nijboer–Zernike diffraction formalism / J.J.M. Braat, S. van Haver, A.J.E.M. Janssen, P. Dirksen // *Journal of the European Optical Society.* – 2007. – Rapid Publications 2, 07032. – P. 1-13.
12. **Biss, D.P.** Primary aberrations in focused radially polarized vortex beams, / D.P. Biss and T.G. Brown // *Opt. Express.* – 2004. – Vol. 12. – P. 384-393.
13. **Rao, R.** Field confinement with aberration correction for solid immersion lens based fluorescence correlation spectroscopy / R. Rao, J. Mitic, A. Serov, R.A. Leitgeb, T. Lasser // *Optics Communications.* – 2007. – Vol. 271. – P. 462-469.
14. **Singh, R.K.** Effect of primary spherical aberration on high-numerical-aperture focusing of a Laguerre–Gaussian beam / R.K. Singh, P. Senthilkumaran, K. Singh // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2008. – V. 25, N 6. – P. 1307-1318.
15. **Singh, R.K.** Tight focusing of vortex beams in presence of primary astigmatism / R.K. Singh, P. Senthilkumaran, K. Singh // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2009. – V. 26, N 3. – P. 576-588.
16. **Singh, R.K.** Structure of a tightly focused vortex beam in the presence of primary coma / R.K. Singh, P. Senthilkumaran, K. Singh // *Optics Communications.* – 2009. – Vol. 282. – P. 1501-1510.
17. **Born, M.** Principles of Optics / M. Born, E. Wolf. – Oxford: Pergamon Press, 1968.
18. **Khonina, S.N.** Diffractive optical element matched with Zernike basis / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, Ya. Wang // *Pattern Recognition and Image Analysis.* – 2001. – Vol. 11(2). – P. 442–445.
19. **Sheppard, C.J.R.** Orthogonal aberration functions for high-aperture optical systems / C.J.R. Sheppard // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2004. – Vol. 21, N 5. – P. 832-838.
20. **Richards, B.** Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system / B. Richards and E. Wolf // *Proc. R. Soc. London Ser. A.* – 1959. – V. 253. – P. 358–379.
21. **Khonina, S.N.** Possibility Analysis of Subwavelength Light Localization and Focus Extending for High-Aperture Focusing System Using Vortical Phase Transmission Function / S.N. Khonina, S.G. Volotovskiy // *Electromagnetic Waves and Electronic Systems.* – 2010. – N 11. – P. 6-25. – (In Russian).
22. **Prudnikov, A.P.** Integrals and Series. Vol. 2. Special Functions / A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov and O.I. Marichev. – New York: Gordon & Breach Sci. Publ., 1990.
23. **Grosjean, T.** Photopolymers as vectorial sensors of the electric field / T. Grosjean and D. Courjon // *Optics Express.* – 2006. – Vol. 14, Issue 6. – P. 2203-2210.

ANALYSIS OF WAVE ABERRATION INFLUENCE ON REDUCING FOCAL SPOT SIZE IN A HIGH-APERTURE FOCUSING SYSTEM

S.N. Khonina^{1,2}, A.V. Ustinov¹, E. A. Pelevina²

¹ Image Processing Systems Institute of Russian Academy of Sciences,

² S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (National Research University)

Abstract

It was shown that the addition of transmittance functions corresponding to the wave aberrations in the form of Zernike functions to the high-numerical-aperture focusing systems results in narrowing of the transverse dimension of focal spot below the diffraction limit. Moreover, for linear polarization, the most common for modern lasers, the results achieved along one direction are better than for the radial polarization, obtaining of which requires complex or expensive devices. Overcoming of the diffraction limit happens due to a substantial reduction of energy in the central part of the focal region. However, the possibility of registration of light fields that have a very low intensity provides perspectives of the received results. For linear polarization an elongated focal spot that has full width at half of maximum along the polarization axis $\text{FWHM}(-)=0.24\lambda$ was obtained, for the radial polarization a round spot that has $\text{FWHM}=0.35\lambda$ and also for the circular polarization with $\text{FWHM}=0.35\lambda$ was obtained. For the azimuthal polarization the vortex phase function of the first order allows us to obtain the total intensity of the central circular spot of light narrower than the diffraction limit: $\text{FWHM}=0.46\lambda$ with low intensity in the sidelobes. It was also shown that not only the size of light spot can be reduced, but also the shadow area, formed by a light ring with very small radius.

Key words: Focal spot size, Zernike basis, high-aperture focusing system, aberration, overcoming of the diffraction limit.

Сведения об авторах

Хонина Светлана Николаевна, доктор физико-математических наук, профессор Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва; ведущий научный сотрудник Учреждения Российской академии наук Институт систем обработки изображений РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, сингулярная оптика, модовые и поляризационные преобразования, оптическое манипулирование, оптическая и цифровая обработка изображений.

E-mail: khonina@smr.ru .

Svetlana Nikolaevna Khonina, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; Professor of the Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov. Leading researcher of the Image Processing Systems Institute of the RAS. Research interests: diffractive optics, singular optics, mode and polarization transformations, optical manipulating, optical and digital image processing.



Устинов Андрей Владимирович, 1968 года рождения, в 1991 году окончил Куйбышевский авиационный институт имени академика С.П. Королёва (КуАИ) по специальности «Прикладная математика», работает ведущим программистом в Учреждении Российской академии наук Институт систем обработки изображений РАН. Область научных интересов: разработка программ моделирования работы оптических элементов; обработка изображений, в частности, гидродинамических процессов и биомедицинских.

E-mail: andr@smr.ru .

Andrey Vladimirovich Ustinov, (b. 1968) graduated from Kuibyshev Aviation Institute named after academician S.P. Korolyov (KuAI) on a specialty “Applied mathematics”, works as the leading programmer in the Image Processing Systems Institute of the RAS. Research interests: software design for modeling of optical elements operating; images processing, particularly images of hydrodynamic processes and biomedical images.



Пелевина Екатерина Александровна, студентка Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва. Область научных интересов: дифракционная оптика.

E-mail: yekaterina.pelevina@gmail.com .

Ekaterina Aleksandrovna Pelevina, student of Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov. Research interests: diffractive optics.

Поступила в редакцию 30 марта 2011 г.