

## ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ БАЗИСОВ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ В СКОЛЬЗЯЩЕМ ОКНЕ

### 1. ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ СКОЛЬЗЯЩИМ ОКНОМ

Решение многих задач цифровой обработки изображений и распознавания зрительных образов основано на использовании простой вычислительной процедуры, суть которой состоит в следующем. задается конфигурация "окна обработки" - двумерной области, охватывающей конечное множество отсчетов входного изображения. В процессе обработки это окно смещается по изображению, последовательно занимая все возможные положения в плоскости дискретных аргументов, т.е. является "скользящим". Для каждого положения окна по содержащимся в нем входным отсчетам вычисляется значение выходного (обработанного) отсчета, соответствующего центру окна.

Описанная процедура обработки изображения скользящим окном реализуется, в частности, двумерными линейными цифровыми фильтрами с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтрами), получившими широкое применение в практике обработки изображений [1]. Такие фильтры осуществляют вычисление свертки:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{(m_1, m_2) \in D} h(m_1, m_2) x(n_1 - m_1, n_2 - m_2), \quad (1)$$

где  $x(n_1, n_2)$ ,  $y(n_1, n_2)$  - двумерные последовательности отсчетов входного и выходного изображения соответственно, заданные на плоскости целочисленных аргументов;  $h(n_1, n_2)$  - импульсная характеристика фильтра;  $D$  - область ее ненулевых значений, определяющая форму и размеры окна обработки.

При больших размерах окна расчеты непосредственно по формуле (1) могут потребовать чрезмерно большого числа арифметических операций. Известные быстрые алгоритмы свертки, построенные на базе дискретных ортогональных преобразований [1,2], также не всегда решают проблему вычислительной сложности обработки, кроме того они плохо согласуются с описанной вычислительной процедурой. Для обработки изображения в режиме скользящего окна, по мнению авторов, наиболее удобны алгоритмы параллельно-рекурсивного вычисления свертки при надлежащей аппроксимации импульсной характеристики КИХ-фильтра [3,4,5]. Целью данной работы является описание и исследование класса таких алгоритмов, отличающихся универсальностью, высокой скоростью обработки изображений, удобством программной и аппаратной реализации.

## 2. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ И ОБОБЩЕННЫЕ МОМЕНТЫ

Пусть импульсная характеристика двумерного КИХ-фильтра описывается степенным полиномом:

$$h(m_1, m_2) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \alpha_{kl} m_1^k m_2^l \quad (2)$$

при  $(m_1, m_2) \in D$ , где  $K, L$  - степени полинома по каждой из переменных;  $\{\alpha_{kl}\}_{k,l=0}^{K,L}$  - его коэффициенты. Представление (2) является весьма универсальным и может быть использовано при сглаживании изображений [5], формировании признаков двумерных объектов в скользящем окне [6], цифровом моделировании линейных искажений оптических сигналов и т.д.

Несложно показать, что, с одной стороны, степенной полином (2) всегда может быть преобразован к виду:

$$h(m_1, m_2) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \beta_{kl} p_k(m_1) p_l(m_2), \quad (3)$$

где

$$p_k(m) = \sum_{i=0}^k a_{ki} m^i \quad (4)$$

- любой "одномерный" полином  $k$ -го порядка с коэффициентами  $\{a_{ki}\}_{i=0}^k$  ( $a_{kk} \neq 0$ );  $\{\beta_{kl}\}_{k,l=0}^{K,L}$  - коэффициенты разложения импульсной характеристики по двумерному факторизуемому полиномиальному базису, введенному выражениями (3) и (4). С другой стороны, формула (2) может считаться частным случаем формулы (3), в котором у базисных функций (4) все коэффициенты кроме старших равны нулю. Таким образом, соотношения (2) и (3) эквивалентны с точки зрения описания импульсной характеристики КИХ-фильтра, однако, как будет показано ниже, (3) более перспективно в плане построения быстродействующих алгоритмов обработки изображений.

Подставив (3) в (1), получаем:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \beta_{kl} \mu_{kl}(n_1, n_2), \quad (5)$$

где

$$\mu_{kl}(n_1, n_2) = \sum_{(m_1, m_2) \in D} p_k(m_1) p_l(m_2) x(n_1 - m_1, n_2 - m_2). \quad (6)$$

По аналогии с работой [7], будем называть величины (6) "обобщенными моментами" изображения в окне обработки, вычисляемыми для заданной системы базисных функций. Их использование во взвешенной сумме (5) позволяет реализовать унифицированную процедуру линейной фильтрации двумерного сигнала, перестраиваемую простым

изменением коэффициентов суммирования. Обобщенные моменты могут играть и самостоятельную роль, выступая в качестве локальных признаков изображения [6,7].

Пусть скользящее окно перемещается по изображению в порядке построчной развертки, и значения обобщенных моментов (6) необходимо вычислять последовательно при возрастающих аргументах  $n_1$  (по строкам) и  $n_2$  (по отсчетам в строке). Поставим задачу построения алгоритмов такого вычисления, требующих по возможности минимального числа арифметических операций.

При решении данной задачи будем считать, что окно имеет прямоугольную форму:

$$D: \quad -M_1^- \leq m_1 \leq M_1^+; \quad -M_2^- \leq m_2 \leq M_2^+, \quad (7)$$

где  $M_1^-, M_1^+, M_2^-, M_2^+$  - параметры, задающие границы окна по координатам ( $M_1^- + M_1^+ \geq 0$ ,  $M_2^- + M_2^+ \geq 0$ ). В этом случае обобщенные моменты (6) можно вычислять каскадно, сверткой двумерного сигнала с соответствующей базисной функцией (4) сначала по одной, а затем по другой координате:

$$\mu_{kl}(n_1, n_2) = \sum_{m_2=-M_2^-}^{M_2^+} p_l(m_2) \left[ \sum_{m_1=-M_1^-}^{M_1^+} p_k(m_1) x(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \right]. \quad (8)$$

Из формулы (8) следует, что расчет всех двумерных обобщенных моментов до порядка (K,L) включительно производится по схеме, показанной на рис.1. Каждый блок схемы соответствует вычислению набора одномерных свертки входного сигнала с базисными функциями (4), имеющими порядки от 0 до K или L. Функциональная идентичность блоков позволяет далее ограничиться рассмотрением одного (любого) из них и переформулировать поставленную задачу в терминах обработки одномерного сигнала.

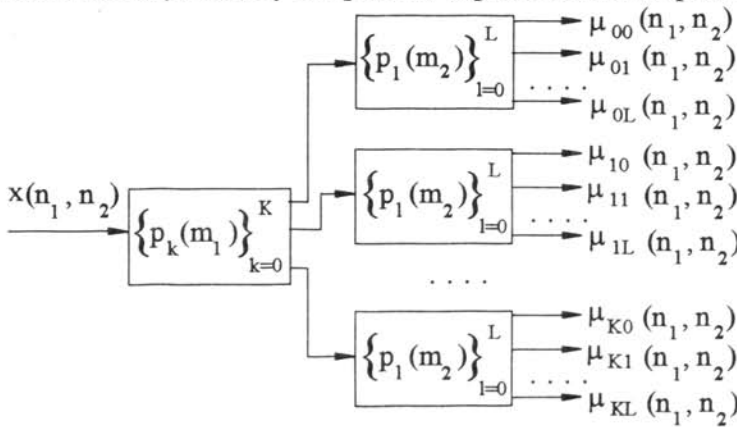


Рис. 1. Схема вычисления двумерных обобщенных моментов.

### 3. ПАРАЛЛЕЛЬНО-РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ МОМЕНТОВ

Итак, для последовательно возрастающих значений целочисленного аргумента  $n$

требуется вычислять одномерные обобщенные моменты для полиномиальных базисных функций (4):

$$\mu_k(n) = \sum_{m=-M^-}^{M^+} p_k(m) x(n-m), \quad 0 \leq k \leq K, \quad (9)$$

где  $x(n)$  - обрабатываемый сигнал;  $M^-$ ,  $M^+$  - параметры окна обработки. Эти вычисления можно выполнять рекурсивно. Для построения соответствующего алгоритма установим связь между моментами на текущем и предыдущем шаге. Согласно (4), сдвинутая на шаг базисная функция  $p_k(m+1)$  остается степенным полиномом  $k$ -го порядка и, следовательно, единственным образом разлагается по базису полиномов  $\{p_i(m)\}_{i=0}^k$ :

$$p_k(m+1) = \sum_{i=0}^k a_{ki} \sum_{j=0}^i C_i^j m^j = \sum_{i=0}^k b_{ki} p_i(m), \quad (10)$$

где  $C_i^j$  - биномиальные коэффициенты;  $\{b_{ki}\}_{i=0}^k$  - коэффициенты указанного разложения.

Заметим, что всегда

$$b_{kk} = 1, \quad (11)$$

этот факт будет использован позже. Из соотношений (9) и (10) выводится основная рекуррентная формула:

$$\mu_k(n) = \sum_{i=0}^k b_{ki} \mu_i(n-1) + p_k(-M^-) x(n+M^-) - p_k(M^++1) x(n-M^+-1). \quad (12)$$

Будем оценивать сложность вычислительных процедур числом операций сложения ( $U_\alpha$ ) и умножения ( $U_m$ ), требуемым для получения всех обобщенных моментов (9) на одном шаге. Для вычисления по формуле (12) любого обобщенного момента нужны (и, следовательно, должны также вычисляться) все моменты младших порядков. Несложно получить, что при этом

$$U_\alpha(K) = U_m(K) = (K+1)(K+4)/2. \quad (13)$$

Важно подчеркнуть, что, в отличие от расчетов непосредственно по формуле (9), вычислительная сложность здесь не зависит от числа отсчетов в окне обработки, что обеспечивает повышение относительной эффективности построенного алгоритма с увеличением размера окна.

Описанный параллельно-рекурсивный алгоритм вычисления обобщенных моментов в скользящем окне может применяться при локальном разложении сигнала по любому известному полиномиальному базису: степенному, базисам дискретных ортогональных полиномов и др. [5,7,8]. Целесообразно, однако, указать новый класс полиномиальных базисов, специально адаптированных к рассматриваемой процедуре скользящего окна и позволяющих радикально снизить вычислительную сложность обработки сигналов (даже

по сравнению с оценками (13)) за счет обнуления большей части коэффициентов в рекуррентной формуле (12).

#### 4. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЕ УСКОРЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ

Путем несложных преобразований выражение (10) приводится к виду:

$$p_k(m+1) = \begin{cases} p_0(m) & \text{при } k=0, \\ p_1(m) + \frac{a_{11}}{a_{00}} p_0(m) & \text{при } k=1, \\ p_k(m) + \frac{ka_{kk}}{a_{(k-1)(k-1)}} p_{k-1}(m) + \sum_{j=0}^{k-2} m^j \left[ \sum_{i=j+1}^k c_i^j a_{ki} - \frac{ka_{kk}}{a_{(k-1)(k-1)}} a_{(k-1)j} \right] & \text{при } k \geq 2. \end{cases} \quad (14)$$

Из формулы (14) следует подтверждение равенства (11), а также то, что и второй по старшинству коэффициент в (10):

$$b_{k(k-1)} = \frac{ka_{kk}}{a_{(k-1)(k-1)}} \quad (15)$$

всегда остается ненулевым. Надлежащей нормировкой базисных функций (4) обеспечим выполнение равенства, аналогичного (11):

$$b_{k(k-1)} = 1. \quad (16)$$

Далее, при соблюдении (16), из (14) и (15) выводятся условия равенства нулю остальных коэффициентов разложения (10):

$$\sum_{i=j+1}^k c_i^j a_{ki} - a_{(k-1)j} = 0, \quad 0 \leq j \leq k-1, \quad k \geq 1. \quad (17)$$

Система линейных уравнений (17) устанавливает взаимосвязь коэффициентов полиномиальных базисных функций (4), при которых рекуррентная формула (12) для  $k \geq 1$  записывается в существенно упрощенном виде:

$$\mu_k(n) = \mu_k(n-1) + \mu_{k-1}(n-1) + p_k(-M^-) x(n+M^-) - p_k(M^+ + 1) x(n-M^+ - 1). \quad (18)$$

Число операций сложения и умножения, необходимых для вычисления обобщенных моментов (9) на одном шаге, в этом случае равно:

$$U_\alpha(K) = 3K + 2, \quad U_m(K) = 2K + 2. \quad (19)$$

Отметим важный для практики факт существования решения системы (17) в целых числах, из которого следует, что, если и входной сигнал задается целочисленными значениями, все вычисления по представленной схеме могут быть реализованы на простых процессорных элементах, использующих арифметику с фиксированной точкой.

Отметим также, что при расчете обобщенных моментов до порядка  $K$  включительно система (17) состоит из  $K(K+1)/2$  уравнений с  $(K+1)(K+2)/2$  неизвестными, т.е. является недоопределенной и имеет бесконечное множество решений. Иными словами, условия (17) задают семейство полиномиальных базисов с  $(K+1)$  степенями свободы, которыми можно воспользоваться либо для удовлетворения специальных требований к вычисляемым обобщенным моментам, либо для дополнительного повышения эффективности построенного параллельно-рекурсивного алгоритма. В качестве иллюстрации к сказанному рассмотрим два примера.

**Пример 1.** Построение базиса при заданном полиноме старшего порядка.

Пусть является заданным вид старшего из обобщенных моментов (9), т.е. известны коэффициенты базисной функции (4) порядка  $K$ :  $\{a_{ki}\}_{i=0}^k$ . Тогда система уравнений (17) получает единственное решение, и из нее однозначно следует процедура построения всего полиномиального базиса "сверху-вниз" (т.е. последовательного расчета коэффициентов базисных функций с номерами от  $(K-1)$  до 0):

$$a_{(k-1)j} = \sum_{i=j+1}^k C_i^j a_{ki}, \quad 0 \leq j \leq k-1, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (20)$$

**Пример 2.** Построение базиса с минимальной вычислительной сложностью.

Построим полиномиальный базис, обеспечивающий параллельно-рекурсивное формирование обобщенных моментов (9) с минимальным числом выполняемых арифметических операций. Для этого используем одну степень свободы введенного семейства базисов для того, чтобы соблюдалось условие:

$$p_0(n) = a_{00} = 1, \quad (21)$$

а остальные  $K$  - для обнуления одного (для определенности, последнего) коэффициента в каждой рекуррентной формуле (18):

$$p_k(M^+ + 1) = 0, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (22)$$

При соблюдении (21) и (22) алгоритм вычисления обобщенных моментов становится наиболее простым:

$$\begin{aligned} \mu_0(n) &= \mu_0(n-1) + x(n+M^-) - x(n-M^+ - 1), \\ \mu_k(n) &= \mu_k(n-1) + \mu_{k-1}(n-1) + p_k(-M^-) x(n+M^-), \quad 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (23)$$

Число операций сложения (вычитания) и умножения на одном шаге здесь равно:

$$U_\alpha(K) = 2K + 2, \quad U_m(K) = K, \quad (24)$$

что еще примерно в 1.5 и в 2 раза меньше соответствующих оценок (19).

В данном случае из формул (17) и (22) следует рекуррентная процедура расчета коэффициентов базисных функций (4) "снизу-вверх" и "справа-налево", т.е. в порядке возрастания их первого индекса и убывания второго:

$$a_{kk} = \frac{1}{k} a_{(k-1)(k-1)}, \quad a_{k(j+1)} = \frac{1}{j+1} \left[ a_{(k-1)j} - \sum_{i=j+2}^k C_i^j a_{ki} \right],$$

$$a_{k0} = - \sum_{i=1}^k a_{ki} (M^+ + 1)^i, \quad j = k-2, k-1, \dots, 0, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (25)$$

## 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ МОМЕНТОВ НА ИЗОБРАЖЕНИИ

Построенный параллельно-рекурсивный алгоритм вычисления обобщенных моментов одномерного сигнала очевидным образом переносится на двумерный случай. Основываясь на выражениях (8) и (12), запишем рекуррентные формулы расчета моментов для системы базисных полиномиальных функций общего вида на прямоугольном окне (7):

$$\mu_k(n_1, n_2) = \sum_{i=0}^k b_{ki} \mu_i(n_1-1, n_2) + p_k(-M_1^-) x(n_1+M_1^-, n_2) - p_k(M_1^+ + 1) x(n_1-M_1^+-1, n_2),$$

$$\mu_{k1}(n_1, n_2) = \sum_{i=0}^k b_{1i} \mu_{ki}(n_1, n_2-1) + p_1(-M_2^-) \mu_k(n_1, n_2+M_2^-) -$$

$$- p_1(M_2^+ + 1) \mu_k(n_1, n_2-M_2^+-1), \quad 0 \leq k \leq K, \quad 0 \leq l \leq L, \quad (26)$$

где  $\mu_k$  - одномерные моменты, вычисляемые для каждого столбца изображения. При обработке изображения скользящим окном моменты  $\mu_k$  и  $\mu_{k1}$  вычисляются за один проход по изображению, при этом требуется память для хранения  $(K+1)$  массивов значений одномерных моментов в текущей и предыдущей строках.

Отметим некоторые возможности обобщения алгоритма (26). Во-первых, полиномиальные базисы, используемые для расчета одномерных моментов  $\mu_k$  и для вычисления каждой строки матрицы моментов  $\mu_{k1}$ , могут быть различными. Во-вторых, более общие ограничения, налагаемые на порядок моментов  $\mu_{k1}$ , очевидно, могут задаваться множеством индексов:

$$Q_\mu: \quad 0 \leq k \leq K, \quad 0 \leq l \leq L_k. \quad (27)$$

Так, например, для расчета набора моментных инвариантов [9] достаточно определять треугольную матрицу моментов, т.е. положить  $L_k = K - k$ .

При использовании базисов, обеспечивающих ускоренное вычисление моментов, соотношения (26) (аналогично одномерным рекурсивным формулам (18) и (23)) упрощаются за счет обнуления части коэффициентов  $b_{ki}$  и, возможно, значений базисных функций на границах окна обработки.

Вычислительная сложность алгоритма (26), как и ранее в одномерном случае, не зависит от размеров окна и определяется только наивысшими порядками рассчитываемых моментов. С учетом сделанных замечаний и дополнений число операций сложения и

умножения, необходимых для вычисления набора моментов  $\mu_{kl}$  при каждом положении скользящего окна, равно соответственно:

$$U_{\alpha}^{2D} = U_{\alpha}(K) + \sum_{k=0}^K U_{\alpha}^{(k)}(L_k), \quad U_m^{2D} = U_m(K) + \sum_{k=0}^K U_m^{(k)}(L_k), \quad (28)$$

где  $U_{\alpha}$  и  $U_{\alpha}^{(k)}$  ( $U_m$  и  $U_m^{(k)}$ ) - число операций в рекурсиях соответственно по столбцам и по строкам изображения, которое для различных систем базисных функций задается соотношениями (13), (19) или (24). Естественно, что при модификации функциональной схемы вычисления моментов (рис.1), состоящей в исключении из нее некоторых параллельных ветвей, соответствующие значения оценок  $U_{\alpha}^{(k)}(L_k)$  и  $U_m^{(k)}(L_k)$  должны быть приравнены к нулю.

При расчете квадратной матрицы моментов ( $L_k = K$  при  $0 \leq k \leq K$ ) с использованием полиномиального базиса с наименьшей вычислительной сложностью оценки (28) принимают вид:

$$U_{\alpha}^{2D} = 2(K+1)(K+2), \quad U_m^{2D} = K(K+2). \quad (29)$$

Если вычисляется единственный момент порядка  $(K,L)$  для заданных старших полиномов  $p_K(m_1)$  и  $p_L(m_2)$ , то в формуле (28) следует положить:

$$L_k = L, \quad L_k = U_{\alpha}^{(k)}(L_k) = U_m^{(k)}(L_k) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq k \leq K-1,$$

при этом

$$U_{\alpha}^{2D} = 3K + 3L + 4, \quad U_m^{2D} = 2K + 2L + 4. \quad (30)$$

## 6. РАСЧЕТ ПАРАЛЛЕЛЬНО-РЕКУРСИВНЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ БАЗИСОМ

Для применения в задачах обработки изображений КИХ-фильтров, построенных на основе полиномиального представления (3) импульсной характеристики, необходимо указать коэффициенты  $\beta_{kl}$ . Имея в виду требование малой вычислительной сложности обработки, следует по возможности минимизировать число слагаемых в суммах (3) и (5), т.е. приравнять часть коэффициентов нулю. Иными словами, из полного множества индексов суммирования нужно выделить подмножество  $Q$ , задающее набор реально используемых базисных функций

$$\left\{ h_{kl}(m_1, m_2) = p_k(m_1) p_l(m_2) \right\}_{(k,l) \in Q}. \quad (31)$$

Ниже для удобства обозначений упорядочим (например, лексикографически) базисные функции (31) и коэффициенты  $\beta_{kl}$  на множестве  $Q$ . После этого импульсную характеристику (3) фильтра можно записать в виде:

$$h(m_1, m_2) = \sum_{i=0}^{I-1} \beta_i h_i(m_1, m_2), \quad (32)$$



где  $I$  - число элементов в множестве  $Q$ . Таким образом, построение фильтра заключается в выборе множества  $Q$ , задающего базисные функции, и расчете коэффициентов разложения (32).

Как показано в [4,10], для многих задач обработки изображений схема расчета вектора коэффициентов  $\mathbf{B} = \{\beta_i\}_{i=0}^{I-1}$  в (32) при заданном  $Q$  является одинаковой: этот вектор задается матричным соотношением

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}, \quad (33)$$

где  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=0}^{I-1}$ ,  $\mathbf{C} = \{c_i\}_{i=0}^{I-1}$  - симметрическая невырожденная матрица и вектор, которые определяются условиями конкретной решаемой задачи.

Так, в задаче аппроксимации импульсной характеристики (ИХ) методом наименьших квадратов, т.е. при расчете фильтра из условия

$$\varepsilon^2 = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} (g(m_1, m_2) - h(m_1, m_2))^2 \rightarrow \min, \quad (34)$$

где  $g(m_1, m_2)$  - требуемая ИХ, имеем

$$a_{ij} = \sum_{(m_1, m_2) \in D} h_i(m_1, m_2) h_j(m_1, m_2),$$

$$c_i = \sum_{(m_1, m_2) \in D} h_i(m_1, m_2) g(m_1, m_2). \quad (35)$$

При расчете КИХ-фильтра по формулам (35), (33) достигаемое минимальное значение ошибки (34) задается выражением:

$$\varepsilon_{\min}^2 = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} g^2(m_1, m_2) - R, \quad (36)$$

где  $R$  вычисляется по формуле:

$$R = \mathbf{B}^t \mathbf{C} = \mathbf{C}^t \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}, \quad (37)$$

(верхний индекс  $-1$  означает обращение матрицы,  $t$  - транспонирование матрицы).

Пусть решается задача восстановления изображения при модели наблюдения

$$x(n_1, n_2) = f(n_1, n_2) ** x_0(n_1, n_2) + v(n_1, n_2),$$

где  $f(n_1, n_2)$  - ИХ линейной искажающей системы;  $x_0(n_1, n_2)$ ,  $v(n_1, n_2)$  - соответственно полезный сигнал и помеха, взаимно некоррелированные стационарные случайные поля с нулевыми средними и автоковариационными функциями (АКФ)  $B_{x_0}(m_1, m_2)$ ,  $B_v(m_1, m_2)$ ;  $**$  - оператор двумерной свертки. При расчете фильтра из

условия минимизации дисперсии ошибки восстановления:

$$\varepsilon^2 = E \left\{ \left( x_0(n_1, n_2) - y(n_1, n_2) \right)^2 \right\} \rightarrow \min, \quad (38)$$

(  $E \{ \cdot \}$  - оператор математического ожидания ), получаем:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{(m_1, m_2) \in D} \sum_{(n_1, n_2) \in D} h_i(m_1, m_2) h_j(n_1, n_2) B_x(n_1 - m_1, n_2 - m_2), \\ c_i &= \sum_{(m_1, m_2) \in D} h_i(m_1, m_2) B_{x_0 x}(-m_1, -m_2), \end{aligned} \quad (39)$$

где, в свою очередь,

$$B_x(m_1, m_2) = f(m_1, m_2) ** f(-m_1, -m_2) ** B_{x_0}(m_1, m_2) + B_v(m_1, m_2),$$

$$B_{x_0 x}(m_1, m_2) = f(m_1, m_2) ** B_{x_0}(m_1, m_2).$$

Подставив рассчитанные по (33) и (39) коэффициенты фильтра в выражение для ошибки (38), несложно получить:

$$\epsilon_{\min}^2 = D_{x_0} - R,$$

где  $D_{x_0}$  - дисперсия полезного сигнала,  $R$  определяется по формуле (37).

В задаче обнаружения объектов при модели наблюдения

$$x(n_1, n_2) = \begin{cases} T(n_1, n_2) + v(n_1, n_2), \\ v(n_1, n_2). \end{cases} \quad (40)$$

где  $T(n_1, n_2)$  - обнаруживаемый детерминированный объект;  $v(n_1, n_2)$  - стационарный фон с нулевым средним и АКФ  $B_v(m_1, m_2)$ , имеем:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{(m_1, m_2) \in D} \sum_{(n_1, n_2) \in D} h_i(m_1, m_2) h_j(n_1, n_2) B_v(n_1 - m_1, n_2 - m_2), \\ c_i &= \sum_{(m_1, m_2) \in D} h_i(m_1, m_2) T(-m_1, -m_2). \end{aligned} \quad (41)$$

Показателем качества рассчитанного по (41) и (33) фильтра-обнаружителя является величина (37), которая в данном случае имеет смысл расстояния Махаланобиса между классами сигналов (40) [11].

Вычислительная сложность обработки изображения параллельно-рекурсивным КИХ-фильтром с полиномиальным базисом определяется числом операций (28), требуемых для расчета набора моментов  $\mu_{kl}$  при  $(k, l) \in Q_\mu$ , и, дополнительно, числом операций, выполняемых при применении фильтра (32), построенного на множестве  $Q$ :

$$U_\alpha^{\text{Pr}} = U_\alpha^{2D} + I - 1, \quad U_m^{\text{Pr}} = U_m^{2D} + I. \quad (42)$$

Очевидно, что для устранения избыточности множества  $Q_\mu$  следует использовать в (27) ограничения, обусловленные выбранным множеством  $Q$ :

$$K = \max_{(k, l) \in Q} \{k\}, \quad L_k = \max_{(k, l) \in Q} \{l\}.$$

Выбор множества  $Q$  для используемых базисных функций целесообразно производить из соображений минимальной вычислительной сложности при заданном качестве обработки изображения. Оптимальное множество в общем случае может быть найдено только путем полного перебора  $Q$  в  $Q_\mu$  при постепенном наращивании  $Q_\mu$ . Однако такая процедура требует неприемлемо большого объема вычислений. Существуют многочисленные алгоритмы направленного перебора, которые позволяют найти субоптимальное решение при сравнительно небольших затратах вычислительных ресурсов [12], в рамках данной работы эти алгоритмы не рассматриваются.

При построении КИХ-фильтра в форме (32) на основе рассмотренного общего подхода можно использовать любые одномерные полиномиальные базисы (например, базис, обеспечивающий минимальную вычислительную сложность при расчете моментов). Однако можно предложить альтернативный способ синтеза фильтра для случая, когда существует возможность аппроксимации требуемой ИХ единственной двумерной разделимой полиномиальной функцией. Оптимальная аппроксимация ИХ двумерным разделимым полиномом в общем случае сводится к весьма трудоемкому решению системы нелинейных уравнений. Но если требуемая ИХ задается функцией, разделимой по координатам:

$$g(m_1, m_2) = g_1(m_1) g_2(m_2), \quad (43)$$

то нетрудно показать, что условие (34) трансформируется к виду:

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} (g_1(m_1) - p_K(m_1))^2 \rightarrow \min,$$

$$\sum_{m_2=-\infty}^{\infty} (g_2(m_2) - p_L(m_2))^2 \rightarrow \min.$$

При этом задача оптимизации сводится к решению систем линейных уравнений с  $(K+1)$  и  $(L+1)$  неизвестными - коэффициентами полиномов  $p_K(m_1)$  и  $p_L(m_2)$ .

При обработке изображения фильтром с ИХ

$$h(m_1, m_2) = h_{KL}(m_1, m_2) = p_K(m_1) p_L(m_2) \quad (44)$$

достаточно определить единственный обобщенный момент  $\mu_{KL}$  в базисе, построенном по заданным старшим полиномам  $p_K(m_1)$  и  $p_L(m_2)$  (см. п.4). Оценки числа операций при этом определяются непосредственно по формулам (42), и фильтр достигает, видимо, нижнего предела вычислительной сложности.

## 7. АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ФИЛЬТРА

Анализ эффективности предлагаемого класса алгоритмов обработки изображений проведем на простых примерах решения задач обнаружения объектов и аппроксимации заданной ИХ.

В задаче обнаружения в качестве объекта примем изображение "креста" (размером 9x9 элементов) единичной яркости на нулевом фоне, подвергнутое линейному искажению путем двукратного усреднения квадратным окном 3x3 элемента и зашумлению аддитивным белым шумом с дисперсией  $D_v$ . При построении фильтра используем одномерный полиномиальный базис с минимальной вычислительной сложностью (см. п.4). Набор двумерных базисных функций, используемых при обработке, будем строить на множестве

$$Q = Q_\mu : \quad 0 \leq k \leq K, \quad 0 \leq l \leq K. \quad (45)$$

Качество полиномиального фильтра при обнаружении объектов характеризуется зависимостью произведения  $RD_v$  от приведенной вычислительной сложности обработки:

$$U = U_a^{\text{Pr}} + \eta U_m^{\text{Pr}}, \quad (46)$$

где  $\eta$  - коэффициент относительной сложности операции умножения (при построении зависимостей примем типичное значение  $\eta = 3$ ). На рис.2а приведены графики зависимостей, соответствующие обработке изображения: 1 - фильтром на основе быстрой свертки; 2 - фильтром на основе обычной свертки; 3 - полиномиальным фильтром. Сложность первых двух фильтров регулировалась путем изменения размеров окна обработки. Для быстрой свертки использовался "стандартный" алгоритм Кули-Тьюки по основанию 2 и процедура оптимального секционирования свертки [13].

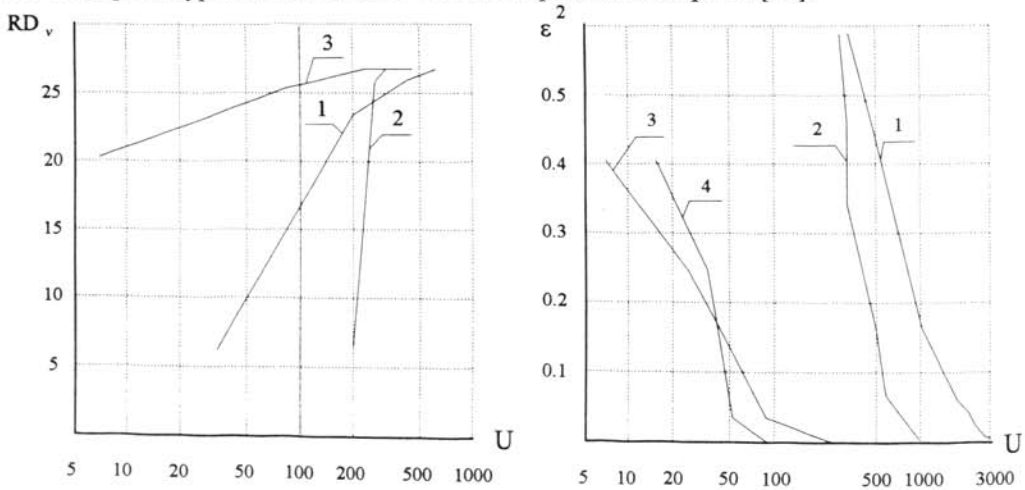


Рис. 2. Исследование эффективности применения полиномиального фильтра  
а) в задаче обнаружения объекта; б) в задаче аппроксимации ИХ.

В задаче аппроксимации ИХ с помощью полиномиальных функций рассмотрим двумерную "гауссоиду", т.е. разделимую по координатам функцию вида

$$g(m_1, m_2) = \exp(-0.01(m_1^2 + m_2^2)), \quad (47)$$

заданную на симметричном окне  $|m_1| \leq 15, |m_2| \leq 15$ .

При построении фильтра по формулам (32), (33) и (35) снова будем использовать одномерный полиномиальный базис с минимальной вычислительной сложностью и набор

двумерных базисных функций, соответствующих (45). Используя альтернативный способ синтеза фильтра, аппроксимируем каждую из одномерных составляющих функции (47):

$$g(m) = \exp(-0.01 m^2)$$

полиномом  $p_K(m)$ , примем его в качестве базисной функции старшего порядка и построим по формулам (20) остальные функции полиномиального базиса. Этот базис обеспечивает вычисление обобщенного момента  $\mu_{KK}$ , соответствующего синтезируемому фильтру (44) при  $K=L$ .

На рис.2б показаны зависимости погрешности аппроксимации (34) от приведенной вычислительной сложности (46) для фильтров: 1 - реализованного в форме прямой свертки; 2 - реализованного в форме быстрой свертки; 3 - полиномиального, синтезированного с учетом разделимости ИХ; 4 - полиномиального, синтезированного без учета разделимости ИХ.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты исследований позволяют сделать следующие выводы:

1) применение фильтров, построенных с помощью полиномиальных базисов, радикально снижает сложность обработки изображений (по сравнению с применением прямой и даже быстрой свертки) и устраняет ее зависимость от размеров скользящего окна;

2) наиболее значительное снижение вычислительной сложности достигается в частном случае, при возможности аппроксимации ИХ двумерной разделимой полиномиальной функцией;

3) применение полиномиальных базисов позволяет построить унифицированные процедуры обработки изображений, обладающие гибкостью, эффективностью, малой вычислительной сложностью, удобством программной и аппаратной реализации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Проект 93-01-00486).

## Л и т е р а т у р а

1. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. - М.: Мир, 1988. - 488 с.

2. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления свертки. - М.: Радио и связь, 1985. - 248 с.

3. Ярославский Л.П. О возможности параллельной и рекурсивной организации цифровых фильтров // Радиотехника. - 1984. - N 3. - С.87-91.

4. Сергеев В.В. Параллельно-рекурсивные КИХ-фильтры в задачах обработки изображений // Радиотехника. - 1990. - N 8. - С.38-41.

5. *Glumov N.I., Krainukov N.I., Sergeyev V.V., Khramov A.G.* The Fast Algorithm of Image Approximation in a Sliding Window // Pattern Recognition and Image Analysis. - 1991. - N4. - pp. 424-426.

6. *Глумов Н.И., Коломиец Э.И., Сергеев В.В.* Информационная технология обнаружения объектов на изображении в режиме скользящего окна // Научное приборостроение. - 1993. - N 1. - С.72-88.

7. *Teh C.-H., Chin R.T.* On Image Analysis by the Methods of Moments // IEEE Trans. Pattern Anal. and Mach. Intell. - 1988. - Vol.10. - N 4. - pp.496-513.

8. *Dedus F.F., Dedus A.F., Ustinin M.N.* A New Data Processing Technolgy for Pattern Recognition and Image Analysis Problems // Pattern Recognition and Image Analysis. - 1992. - N2. - pp.195-207.

9. *Майтра С.* Моментные инварианты // ТИИЭР. - 1979. - N 4. - С.297-299.

10. *Сергеев В.В., Фролова Л.Г.* Расчет параллельных КИХ-фильтров для некоторых задач обработки сигналов и изображений // Компьютерная оптика. - М., 1992. - Вып.12. - С.204-230.

11. *Ту Дж., Гонсалес Р.* Принципы распознавания образов. - М.: Мир, 1978. - 412с.

12. *Кутин Г.И.* Методы ранжировки комплексов признаков. Обзор // Зарубежная радиоэлектроника. - 1981. - N 9. - С.54-70.

13. *Голд Б., Рэйдер Ч.* Цифровая обработка сигналов.- М.: Сов. радио, 1973. - 367с.

#### Вниманию читателей!

Международный центр научной и технической информации

предлагает заинтересованным государственным, коммерческим и частным организациям и фирмам страницы международных журналов:

- "Проблемы машиностроения и автоматизации";
- "Высокотемпературная сверхпроводимость";
- "Экономика. Предпринимательство. Окружающая среда",

для публикации рекламы своей деятельности, продукции и услуг.

Мы готовы рассмотреть предложения заинтересованных организаций и фирм о подготовке специальных номеров журналов, посвященных их деятельности, на коммерческих условиях.

Справки и информация по адресу:

Россия, 125252, Москва, ул. Куусинена, 21б, МЦНТИ,  
Сектор организации, подготовки и распространения изданий.

телефон: (095) 198-72-10

телекс: 411925 МСНТИ

факс: (095) 943-00-89

# Application of polynomial bases for image processing using sliding window

*N.I. Glumov, V.V. Myasnikov, V.V. Sergeev*

## *Abstract*

The solution of many issues of digital image processing and visual recognition is based on the use of a simple computational procedure, the essence of which is as follows. The configuration of the “processing window”, a two-dimensional area covering a finite set of the input image readings, is specified. In the course of processing, this window moves over the image, and takes sequentially all possible positions in the plane of discrete arguments, i.e. “slides”. For each window position, the output (processed) reading corresponding to the center of the window is calculated based on the input readings contained in it.

*Citation:* Glumov NI, Myasnikov VV, Sergeev VV. Application of polynomial bases for image processing using sliding window. *Computer Optics* 1995; 14-15(1): 55-68.

## *References*

- [1] Dudgeon D, Mersereau R. *Multidimensional Digital Signal Processing*; Moscow: Mir Publisher; 1988; 488.
- [2] Nussbaumer H. *Fast Fourier Transform and Convolution Computation Algorithms*; Moscow: Radio i Svyaz; 1985; 248.
- [3] Yaroslavsky LP. On the possibility of parallel and recursive organization of digital filters. *Radiotekhnika* Publisher; 1984; 3: 87-91.
- [4] Sergeev VV. Parallel-recursive FIR-filters for image processing. *Radiotekhnika* Publisher; 1990; 8: 38-41.
- [5] Glumov NI, Krainukov NI, Sergeyev VV, Khramov AG. The Fast Algorithm of Image Approximation in a Sliding Window. *Pattern Recognition and Image Analysis*; 1991; 4: 424-426.
- [6] Glumov NI, Kolomiets EI, Sergeev VV. Information technology for detection of objects on the image using a sliding window mode. *Nauchnoe Priborostroenie* Publisher; 1993; 1: 72-88.
- [7] Teh SN, Chin RT. On Image Analysis by the Methods of Moments. *IEEE Trans. Pattern Anal. and mach. Intell*; 1988; 10(4): 496-513.
- [8] Dedus FF, Dedus AF, Ustinin MN. A New Data Processing Technology for Pattern Recognition and Image Analysis Problems. *Pattern Recognition and Image Analysis*; 1992; 2: 195-207.
- [9] Maitra S. Moment invariants. *TIER*; 1979; 4: 297-299.
- [10] Sergeev VV, Frolova LG. Calculation of parallel FIR filters for some tasks of signal and image processing. *Computer Optics*; Moscow: 1992; 12: 204-230.
- [11] Tu J, Gonzalez R. *Principles of pattern recognition*; Moscow: Mir Publisher; 1978; 412.
- [12] Kutin GI. Ranking methods for feature complexes. Overview. *Foreign Radio Electronics*; 1981; 9: 54-70.
- [13] Gold B, Raider C. *Digital signal processing*; Moscow: Sov. Radio Publisher; 1973; 367.