О.П.Милюкова

АПРИОРНАЯ ИНФОРМАЦИЯ В ЗАДАЧАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Задача восстановления искаженных изображений в общем виде может быть сформулирована как недоопределенная обратная задача математической физики. В такой постановке восстановление изображения сводится к решению задачи на условный или безусловный экстремум. Как и для всякой недоопределенной задачи, успех в ее решении обеспечивается полнотой априорной информации об искомом изображении. При этом чрезвычайно важно найти такой способ математической формализации наших интуитивных представлений о свойствах изображения, который бы не только адекватно описывал основные характеристики изображения, но и обеспечивал устойчивость и единственность решения экстремальной задачи.

1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Достаточно полной математической моделью многих физических процессов, происходящих при формировании и записи изображения, может служить линейное интегральное уравнение

$$\mathbf{A}z + \xi = u(x,y) + \xi(x,y) = \tilde{u}(x,y), \qquad (x,y) \in W, \tag{1}$$

где $u \in U$, $z \in Z$, (Z,U)- пара метрических пространств, A - линейный интегральный оператор, $\xi(x,y)$ - изображение шума, $\tilde{u}\,(x,y)$ - наблюдаемое искаженное изображение.

Задача восстановления изображения, как правило, формулируется следующим образом: найти (оценить) идеальное неискаженное изображение $z(\zeta,\eta)$, связанное с наблюдаемым искаженным изображением $\tilde{u}\,(x,y)$ соотношением (1).

Наиболее универсальные принципы решения этой задачи даются в теории статистического оценивания и в теории решения некорректно поставленных задач. Кроме общих подходов, многими авторами предлагаются многочисленные методы восстановления, использующие конкретную специфику задачи (простой вид искажающего оператора, существование известного фона на изображении, возможность получить большое число изображений одного и того же объекта и т. п.). Важно отметить, что при любом подходе задача восстановления не может быть решена с помощью так называемых эмпирических методов, которые эффективно применяются при решении других задач обработки изображения (фильтрации, сегментации и т.п.). Задача восстановления - типичная обратная задача математической физики и, как всякая обратная задача, может быть решена только на основе строгих математических методов.

1.1. Общие алгоритмы восстановления

Из постановки задачи следует, что каким бы способом ни было получено восстановленное изображение, оно должно удовлетворять (в некотором смысле) уравнению (1), т.е. должно обеспечивать близость правой и левой частей уравнения. Поэтому наиболее общая формулировка задачи сводится к минимизации функционала невязки

$$z^{*}(\varsigma,\eta) = \inf_{z \in Z} \rho_U\,(Az,\tilde{u}), \tag{2}$$

где ρ_U – некоторая метрика в U.

Как известно, задача (2) некорректно поставлена. Ее решение неустойчиво по отношению к погрешностям входных данных. Кроме того, в нашем случае (см. Приложение) основное уравнение (1), как правило, неоднозначно разрешимо даже при точно заданных A и u.

Как и для всякой недоопределенной задачи выбор некоторого решения основан на использовании априорной информации об искомом z, когда из всего множества решений $Z^*=\{z: \mu=\inf\rho(Az,\tilde{u})\}$ экстремальной задачи (2) выбирается то, которое обладает заданными свойствами. В случае восстановления изображений это приводит к необходимости формализовать в привычных математических терминах наши интуитивные представления об основных свойствах изображений.

Из физических моделей формирования изображений, описывающих взаимодействие входного поля с чувствительными элементами изображающей системы, получают общее математическое описание изображения простейшего типа (плоского, стационарного, монохромного) в виде ограниченной неотрицательной действительной функции двух переменных. В этом случае задача восстановления сводится к задаче на условный экстремум:

$$\begin{cases} z^* = \inf \rho_U(Az,\tilde{u}), \\ 0 \le z(\varsigma,\eta) \le C, \quad (\varsigma,\eta) \in V. \end{cases} \tag{3}$$

Если, например, мы имеем дело с астрономическими снимками, то можно задать значение z в некоторой области $D \subset V$. Тогда

$$\begin{cases} z^* = \inf \rho_U(Az,\tilde{u}), \\ z(\varsigma,\eta) = Const, \quad (\varsigma,\eta) \in D. \end{cases} \tag{4}$$

Однако ограничения на z, аналогичные (3) и (4), не обеспечивают в общем случае единственность и устойчивость решения z^* этих экстремальных задач. Для того чтобы гарантировать устойчивость и единственность решения задачи восстановления, априорную информацию об идеальном изображении представляют в виде ограничения на некоторый функционал $\Omega(z)$, обладающий стабилизирующими свойствами [1]. В этом случае

$$\begin{cases} z^* = \inf \rho_U(Az,\tilde{u}), \\ \Omega(z) \le C. \end{cases} \tag{5}$$

При определенных условиях [1] экстремальная задача (5) может быть сведена к задаче на безусловный экстремум, в частности, к задаче минимизации тихоновского функционала

$$z^* = \inf_{z \in Z} \{\rho_U(A,\tilde{u}) + \alpha\Omega(z)\}, \tag{6}$$

где α - параметр регуляризации.

Чаще всего изображение интерпретируется как гладкая функция с ограниченной соболевской нормой, при этом полагается $\Omega(z) = \|z\|^q_{W^p_q}$. В качестве метрики в U используют евклидову или взвешенную евклидову норму (u,Bu), где B - положительно определенный оператор . Тогда (6) принимает вид

$$z^* = \inf_{z \in Z} \left\{\|Az - \tilde{u}\|^2_B + \alpha\Omega(z)\right\}. \tag{7}$$

Важно отметить, что последовательное применение методов статистического оценивания к задаче восстановления приводит к экстремальным задачам, аналогичным (6). Так, например, использование байесовского подхода или критерия максимума апостериорной вероятности приводит к оптимальной оценке вида

$$z^* = \inf_{z \in Z} \left\{-\ln q(Az-\tilde{u}) - \ln p(z)\right\}, \tag{8}$$

где $p(z)$ и $q(\xi)$ - априорные плотности вероятностей изображения и аддитивного шума $\xi(x,y)=(\tilde{A}z-\tilde{u})$. Если в (8) использовать наиболее распространенные вероятностные модели шума и изображения, а именно: $q(\xi)$ - гауссову, $p(z)$ - распределение Гиббса, то получим

$$z^* = \inf_{z \in Z} \left\{\left\|Az-\tilde{u}\right\|_B^2 + U(z)\right\}, \tag{9}$$

где U - потенциал Гиббса, B^{-1} - ковариационный оператор шума.

Основное существенное отличие решения (7), которое получено методом регуляризации, от статистической оценки изображения (9) состоит в наличии в (7) параметра регуляризации α. Отметим, что для задач восстановления изображений возможность получить семейство решений, зависящих от параметра, чрезвычайно важна. Это позволяет в отсутствии математических критериев визуального качества изображений контролировать результат восстановления в диалоговом режиме.

1.2. Линейные методы

Как правило, для восстановления изображений используют линейные алгоритмы. В общем виде линейный восстанавливающий алгоритм может быть записан как поиск минимума квадратичного функционала

$$z^* = \inf_{z \in Z} \left\{\left\|Az-\tilde{u}\right\|_B^2 + \alpha(z, Cz)\right\}, \tag{10}$$

где B и C - положительно определенные операторы.

Заметим, что методы статистического оценивания, а также винеровская фильтрация приводят к минимизации функционала (10) в предположении гауссовой природы вероятностных свойств изображения и шума (при $\alpha=1$). В этом случае B и C - обратные ковариационные операторы шума и изображения : $B=[Cov(\xi)]^{-1}$, $C=[Cov(z)]^{-1}$.

К алгоритму (10) приводит также предположение о принадлежности изображения к соболевскому пространству $W^2{}_p(z)$.

Из (10) следует, что линейные алгоритмы отличаются друг от друга выбором операторов B и C. Однако многочисленные эксперименты, проведенные автором показывают, что результаты восстановления мало зависят от вида оператора B , т.е. от корреляционных свойств изображения. По-видимому это связано с тем , что реальные изображения существенно не гауссовы. Во всех случаях качество линейного восстановления зависит от свойств искажающего оператора A (см. Приложение) и от величины шума $\|\xi\| = \sigma$.

1.3. Нелинейные методы

Существенно новый результат можно получить, используя нелинейные методы восстановления, когда априорная информация об изображении задается не в виде квадратичной формы, как в (10). В работе [2] предлагается интерпретировать изображение как функцию с ограниченными вариациями. Тогда

$$z^* = \inf_{z \in Z} \left\{ \left\| Az - \tilde{u} \right\|_B^2 + \alpha Var(z) \right\}. \tag{11}$$

Для функций нескольких переменных существует много различных определений вариации (вариация Витали, Арцела, Тонелли и т.д.). Неоднозначность определения многомерной вариации связана, в первую очередь, с различными процедурами выделения соседних точек в многомерном пространстве, в частности на плоскости. С аналогичными проблемами сталкиваются при создании марковских вероятностных моделей изображения, когда вводятся одномарковские, полуторамарковские, двумарковские и т.д. модели.

Все традиционные определения многомерных вариаций сводятся к тому, что, по аналогии с одномерным случаем, определяется один функционал, ограниченность которого гарантирует наличие у функции ряда свойств. Однако список этих свойств для всех определений оказывается слишком бедным. Очень плодотворным является принципиально иной подход, предложенный Кронродом. Им было доказано, что свойства функции двух переменных описываются не одним, а двумя функционалами (вариациями), которые в некотором смысле независимы. Эти функционалы были определены следующим образом:

$$w_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} v_0(e_t)dt, \qquad w_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(e_t)dt, \tag{12}$$

где множество e_t - это t-уровень функции $z(\zeta,\eta)$, т.е. множество тех точек (ζ,η), в которых значение функции равно t, $v_0\ (e_t)$ - число компонент множества, $v_1(e_t\,)$ - длина множества [3]. Эти функционалы были названы линейной w_1 и плоской w_2 вариациями двумерной функции z. Для функции, у которой обе вариации конечны, выполняются утверждения, аналогичные тем, которые имеют место для функции одной переменной.

Для непрерывно дифференцируемых функций

$$w_2(z) = \int_a^b \int_c^d \left| grad\, z(x,y) \right| dxdy \quad . \tag{13}$$

Используя определения (12), можно получить нелинейный алгоритм восстановления

$$\begin{cases} z^* = \inf \left\| Az - \tilde{u} \right\|^2 \\ w_1 \le C_1, \\ w_2 \le C_2, \end{cases} \tag{14}$$

или, при определенных условиях:

$$z^* = \inf_{z \in Z} \left\{ \left\| Az - \tilde{u} \right\|^2 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \right\}. \tag{15}$$

Из сказанного выше можно сделать вывод о том, что многочисленные попытки создать математическую модель изображения, основанную на определении одного функционала, не могут привести к полноценному описанию свойств изображения. Гладкость, изменчивость, сложность изображения следует описывать двумя независимыми (в некотором смысле) функционалами. Важно отметить, что нулевая вариация v_0

множества e_t, входящая в определение линейной вариации функции в (12), является не метрической, а топологической характеристикой изображения, не изменяющейся даже при гомеоморфизме множества. Переход от линейных методов восстановления (10) к нелинейным (11) позволяет существенно расширить возможности цифрового восстановления изображений.

Итак, задача восстановления в наиболее общей постановке - это задача отыскания решения основного уравнения (1) с заданными свойствами. Будем ли мы решать задачу на условный экстремум (6) или на безусловный экстремум (5) зависит от характера априорной информации об идеальном неискаженном изображении . Основной вопрос о единственности и устойчивости решения этих экстремальных задач подробно рассмотрен в теории регуляризации [1]. Отметим, что при статистическом подходе к решению задачи восстановления выбор вероятностной модели изображения, в частности выбор гиббсовского потенциала U, должен быть основан не только на адекватном описании априорных свойств изображения, но должен также обеспечивать единственность и устойчивость решения экстремальной задачи (9).

2. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ В НЕДООПРЕДЕЛЕННЫХ ЗАДАЧАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Главная трудность при восстановлении изображений заключается в реализации алгоритмов минимизации. Из-за больших объемов вычислений даже линейный алгоритм (10) для двумерных изображений реальной размерности трудно реализуем, не говоря уже о нелинейных алгоритмах. Возможность упростить вычислительные алгоритмы минимизации, как правило, связаны с использованием специфики конкретных интегральных операторов A.

Так, решение некоторых видов интегральных уравнений 1-ого рода можно эффективно получить, применяя к обеим частям уравнения те или иные линейные преобразования [1], что позволит упростить левую часть уравнения (1) и перейти от интегрального преобразования функции z к более простому.

Часто изображающая система описывается с помощью однородного интегрального преобразования, что приводит к уравнению вида

$$\iint_V h(x-\varsigma, y-\eta) z(\varsigma,\eta) d\varsigma d\eta = u(x,y) \qquad (x,y)\in W, \tag{16}$$

Если бы наблюдаемое изображение $u(x,y)$ было задано на всей плоскости OXY, то уравнение (16) перешло бы в уравнение типа свертки

$$\iint_{-\infty}^{\infty} h(x-\varsigma, y-\eta) z(\varsigma,\eta) d\varsigma d\eta = u(x,y), \quad -\infty \le (x,y) \le \infty \tag{17}$$

и с помощью преобразования Фурье **F**[*] (при соответствующей интегрируемости функций) могло бы быть сведено к простой операции умножения: **F**[Az]=**F**[h]**F**[z]. Однако искаженное изображение u всегда задано в ограниченной области W . Это не позволяет нам применить преобразование Фурье к уравнению (16) без предварительной процедуры расширения функций h, z, u на всю плоскость. Такая процедура расширения становится самостоятельной задачей, решение которой для случая дискретного приближения уравнения (16) предлагается ниже.

Дискретный аналог уравнения (16) - система линейных интегральных уравнений

$$Az=u \qquad (18)$$

с прямоугольной $(M \times N)$ теплицевой матрицей

$$A = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_L & & & \\ & A_1 & A_2 & \dots & A_L & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & A_1 & A_2 & \dots & A_L \end{vmatrix}, \qquad (19)$$

где z - вектор размерности n^2 , u m^2-вектор, $m^2 = M, n^2 = N$; A_i , i=1,...L представляет собой $(m \times n)$ блоки, m<n . Если бы матрица A была циклической, то для решения системы (18) можно было бы использовать теорему о циклической свертке: **F**[Cz]=**F**[C$^{(1)}$]$\times$ **F**[z] (где **F**[*] - дискретное преобразование Фурье) .

В нашем случае хотя прямоугольная матрица A не является циклической , теплицева структура (19) позволяет дополнить ее до квадратной $(N \times N)$ циклической матрицы

$$C = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_L & & & \\ & A_1 & A_2 & \dots & A_L & & \\ & & & \dots & \dots & \dots & \\ A_L & & & & A_1 & \dots & A_{L-1} \\ \dots & \dots & & & & \dots & \dots \\ A_2 & \dots & A_L & & & & A_1 \end{vmatrix}, \qquad (20)$$

и получить новую систему

$$Cz = u_\Delta = \begin{vmatrix} u \\ \Delta \end{vmatrix}, \qquad (21)$$

где расширенный вектор u_Δ={u,Δ} состоит из наблюдаемого изображения u, дополненного произвольным вектором $\Delta=\{\Delta_1,\Delta_2,...\Delta_T\}$, $T=N-M$ до размерности неискаженного изображения N. Новая система (21) отличается от исходной по крайней мере тем, что она однозначно разрешима. Другими словами, вместо недоопределенной системы (18) с прямоугольной матрицей A мы имеем задачу (21), единственное решение которой $z=C^{-1}\ u_\Delta$ или устойчивое приближение к этому единственному решению (оптимальную статистическую оценку) $z(\Delta)=R_C\tilde{u}_\Delta$ можно легко получить с помощью дискретного преобразования Фурье, используя теорему о циклической свертке. Существует обширная литература, посвященная выбору восстанавливающих операторов R_C для уравнения типа свертки (17). Выбрав один из хорошо известных восстанавливающих операторов R_C , например $R_C = (C^{\mathrm{T}}C+\alpha E)^{-1}\ C^{\mathrm{T}}$ или популярный винеровский восстанавливающий оператор, мы можем получить устойчивое приближение $z(\Delta)$ к единственному решению $z=C^{-1}\ u_\Delta$ для произвольного дополняющего вектора Δ

$$z(\Delta) = R_C\tilde{u}_\Delta = |R_{\mathrm{I}}, R_{\mathrm{II}}| \times \begin{vmatrix} \tilde{u} \\ \Delta \end{vmatrix} = R_{\mathrm{I}}\tilde{u} + R_{\mathrm{II}}\Delta, \qquad (22)$$

где R_C - заданная $(N \times N)$ матрица, полученная с помощью дискретного преобразования Фурье, R_{I} - $(N \times M)$ блок матрицы R_C, R_{II} - $(N \times T)$ блок матрицы R_C.

Таким образом, решая систему (21) вместо исходной системы (18), мы переносим недоопределенность задачи (см. Приложение) в правую часть уравнения (21). Число T произвольных параметров Δ_i, $i=1,2,...,T$ совпадает с размерностью ядра $kerA$.

Теперь осталось связать полученное решение $z(\Delta)$ (22) с решением исходной задачи (18). Для этого естественно искать значение дополняющего вектора Δ из тех же условий, из которых находится решение недоопределенной задачи. Так, например, подставляя выражение (22) в тихоновский функционал (7), мы получим значение вектора Δ, решив новую экстремальную задачу

$$\Delta(\alpha) = \inf_{\Delta \in K} \left\{ \left\| AR_{\mathrm{II}}\Delta + Av - \tilde{u} \right\|^2 + \alpha\Omega(R_{\mathrm{II}}\Delta + v) \right\}, \tag{23}$$

где $v = R_{\mathrm{I}}\tilde{u}$ - известный вектор, R_{I} и R_{II} - блоки восстанавливающей матрицы R_C, которая легко вычисляется с помощью дискретного преобразования Фурье. Определив из (23) дополняющий вектор Δ, мы получаем восстановленное изображение $z(\Delta)$ из соотношения (22), где R_C - заранее вычисленная матрица.

Итак, в случае однородного искажающего оператора A (16) использование дискретного преобразования Фурье для определения того или иного линейного восстанавливающего оператора R_C в (22) позволяет нам свести задачу восстановления к отысканию T-мерного вектора Δ (23) вместо N-мерного вектора z в исходной экстремальной задаче (7), где T во всех практических задачах на порядок меньше N.

3. ПРИЛОЖЕНИЕ

Основные трудности при решении некорректно поставленных задач связывают, как правило, с неустойчивостью решения по отношению к погрешностям входных данных [1]. Однако при решении задачи восстановления изображений возникает еще одна существенная проблема, которая, на наш взгляд, мало исследована - это неоднозначная разрешимость точного уравнения (1).

Вопрос о единственности решения основного уравнения - вопрос о принципиальной возможности "идеального" восстановления изображения при точно заданных A и u, т.е. вопрос о том, возможна ли такая апостериорная обработка результатов наблюдения, которая была бы эквивалентна приведению реальной линейной изображающей системы к идеальной. Неоднозначность решения уравнения (1) означает, что часть информации об исходном изображении отсутствует в наблюдаемом изображении u, даже когда входные данные заданы без погрешностей.

Из теории интегральных уравнений известно, что решение интегрального уравнения первого рода не единственно, если существуют не равные нулю функции такие, что

$$A\varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, L \quad , \tag{24}$$

т.е. если ядро интегрального оператора нетривиально: $kerA \neq 0$. При этом любое точное решение интегрального уравнения может быть представлено в виде

$$z^* = z^{(0)} + \sum_{j=1}^{L} \beta_j \varphi_j, \tag{25}$$

где $z^{(0)}$ - некоторое точное решение интегрального уравнения, например, исходное изображение , L - размерность *kerA*, β_j – произвольные параметры, $\{\varphi_j\}$ - некоторый базис в *kerA*.

Как пример рассмотрим интегральное уравнение, которое используется в качестве математической модели формирования изображения при равномерном прямолинейном смещении плоскостей объекта и изображения. Это уравнение имеет вид

$$\frac{1}{V}\int_{x-L}^{x} z(\varsigma)d\varsigma = u(x), \quad c \le x \le d \quad . \tag{26}$$

Легко убедиться, что всякая непрерывная периодическая функция $z(\varsigma) = z(\varsigma - L)$ с периодом L удовлетворяет однородному уравнению

$$\int_{x-L}^{x} z(\varsigma)d\varsigma = \Phi(x) - \Phi(x-L) = 0. \tag{27}$$

Следовательно, ядро интегрального оператора (26) включает в себя множество всех непрерывных периодических функций с периодом *L*. Таким образом, если мы тем или иным способом находим некоторое решение (25), то оно может отличаться от исходного изображения $z^{(0)}$ на любую периодическую функцию с периодом *L*.

Такой же результат можно получить и для двумерного аналога уравнения (25).

Итак, если точное уравнение неоднозначно разрешимо, то оно не несет в себе информацию, позволяющую отыскать исходное изображение среди всего множества решений .

Анализ применяемых на практике математических моделей изображающих систем свидетельствует о том, что, как правило, мы сталкиваемся с ситуацией, когда в принципе невозможно восстановить исходное изображение даже в отсутствии шума. Поэтому прежде чем приступить к решению задачи восстановления искаженного изображения, необходимо ответить на вопрос о единственности решения для конкретной изображающей системы, описываемой оператором *A*, найти базис в *kerA*, если уравнение *Az=u* неоднозначно разрешимо, и тем самым определить характер регулярных ошибок (отличий от идеального изображения), которые не связаны с неустойчивостью решения по отношению к погрешностям входных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1983.
2. *Милюкова О.П.* Цифровое восстановление искаженных изображений. М.: ИППИ РАН, 1988.
3. *Витушкин А.Г.* О многомерных вариациях. М.: Гостехиздат, 1955.

A priori information in the problems of restoration

O.P. Milyukova

Abstract

The problem of restoration of distorted images can generally be formulated as an undetermined inverse problem of mathematical physics. In such a setting, image restoration is reduced to solving a problem of a conditional or unconditional extremum. Similarly to any undetermined problem, the success in its solution is ensured by the completeness of a priori information about the target image. It is extremely important to find a method to formalize mathematically our intuitive ideas about the image properties that would not only adequately describe the main characteristics of the image, but also ensure the stability and uniqueness of solution of the extremum problem.

Citation: Milyukova OP. A priori information in the problems of restoration. Computer Optics 1995; 14-15(1): 148-155.

References

[1] Tikhonov AN, Arsenin ZY. Methods for Solving the Ill-Conditioned Problems. Moscow: Nauka; 1983.
[2] Milyukova OP. Digital restoration of distorted images. Moscow: IPPI RAS; 1988.
[3] Vitushkin AG. On multidimensional variations. Moscow: Gostekhizdat; 1955.