

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОТТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ С ДОО

ВВЕДЕНИЕ

Представляется актуальным использование уникальных прикладных возможностей дифракционных оптических элементов (ДОО) [1-3] при проектировании перспективных светотехнических устройств.

Использование ДОО позволяет упростить конструкцию светотехнических устройств, повысить энергетическую эффективность и оптимальным образом сформировать требуемую диаграмму направленности излучения.

Для реализации преимуществ ДОО необходима разработка математического аппарата, который позволил бы исследовать и оптимизировать работу светотехнических устройств с ДОО на стадии их проектирования.

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОПТИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ С ДОО

Рассмотрим сложную оптическую схему, состоящую из точечного источника, отражающих и преломляющих поверхностей и дифракционных оптических элементов. Оптическая установка может быть представлена как набор сред S_1, \dots, S_n .

Каждая среда характеризуется показателем преломления и уравнением границы. ДОО вводится как фазовый разрыв вдоль элемента и приводит к существованию поверхности фазовых скачков. Для дальнейшего анализа укажем, что идеальная отражающая поверхность соответствует среде с показателем преломления "-1".

Для моделирования работы светотехнического устройства необходимо определить распределение интенсивности, формируемое исследуемым устройством, на трехмерной поверхности, описываемой следующим выражением

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

где (x_1, x_2, x_3) - координаты на трехмерной поверхности.

Световое поле комплексной амплитуды E в скалярном приближении подчиняется уравнению Гельмгольца

$$\Delta E + k^2 n^2 E = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (1.1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число, λ - средняя длина волны,

$n(x_1, x_2, x_3)$ - показатель преломления в оптической системе,

$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ - функция Дирака.

Правая часть уравнения Гельмгольца описывает существование точечного источника.

Для решения уравнения Гельмгольца необходимо определить граничные условия каждой среды. Кроме того необходимо использовать информацию о поведении комплексной амплитуды светового поля вблизи ДОО.

Световое поле вдали от источников излучения может быть аппроксимировано более простыми уравнениями. Это упрощение базируется на предположении, что $kL \gg 1$, где L - характерная длина, описывающая расстояние наблюдения, размеры препятствий и неоднородностей среды.

Введем приближение Дебая [4]

$$E(\vec{x}) = \sqrt{I(\vec{x})} e^{ik\Psi(\vec{x})},$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad (1.2)$$

где I - интенсивность светового поля,
 $\Psi(\vec{x})$ - эйконал светового поля.

Подстановка уравнения (1.2) в уравнение Гельмгольца показывает, что функции I и Ψ подчиняются системе уравнений

$$\begin{cases} (\nabla\Psi)^2 = n^2(\vec{x}) \\ \text{div}[I(\vec{x})\nabla\Psi(\vec{x})] = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Граничные условия для уравнения Гельмгольца могут быть преобразованы:

1) для преломляющей поверхности

$$[\nabla\Psi_1 \times \vec{N}] = [\nabla\Psi_2 \times \vec{N}] \quad (1.4)$$

где \vec{N} - нормаль к границе между двумя средами с различными показателями преломления;

2) для отражающей поверхности

$$[\nabla\Psi_1 \times \vec{N}] = -[\nabla\Psi_2 \times \vec{N}] \quad (1.5)$$

3) для дифракционного оптического элемента

$$[(\nabla\Psi_2 - \nabla\Psi_1) \times \vec{N}] = [\nabla\varphi \times \vec{N}] \quad (1.6)$$

Наличие в оптической схеме источника светового поля описывается с помощью граничных условий на исходной поверхности.

Рассмотрим точечный источник, окруженный исходной поверхностью.

Пусть исходная поверхность задается следующей системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t_1, t_2) \\ x_2 = x_2(t_1, t_2) \\ x_3 = x_3(t_1, t_2) \end{cases} \quad (1.7)$$

где t_1, t_2 суть криволинейные координаты на начальной поверхности.

Предположим, что $\Psi(t_1, t_2)$ и $I_0(t_1, t_2)$ - распределения эйконала и интенсивности на исходной поверхности, которые определяются диаграммой направленности и положением точечного источника.

Вместо распределения эйконала на исходной поверхности возможно использование поля направлений лучей. Уравнения (1.3) включают частные производные, однако с помощью лучевых координат эти уравнения могут быть сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Введем лучевые координаты

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t_1, t_2, l) \\ x_2 = x_2(t_1, t_2, l) \\ x_3 = x_3(t_1, t_2, l) \end{cases} \quad (1.8)$$

или в векторной форме

$$\vec{r} = \vec{r}(t_1, t_2, l) \quad (1.9)$$

Функция $\vec{r}(t_1, t_2, l)$ подчиняется уравнению распространения луча

$$\frac{d}{dl} \left(n \frac{d\vec{r}}{dl} \right) = \nabla n \quad (1.10)$$

При $l=0$ уравнение $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_1, t_2, 0)$ описывает исходную поверхность.

Функция $\vec{S}_0(t_1, t_2) = \frac{d\vec{r}}{dl}(t_1, t_2, 0)$ определяет направление лучей на исходной поверхности.

Решение уравнения переноса в лучевых координатах принимает форму

$$I(t_1, t_2, l) = I_0(t_1, t_2) \frac{\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(t_1, t_2, 0)}}{\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(t_1, t_2, l)}} \quad (1.11)$$

где $I_0(t_1, t_2)$ - распределение интенсивности на исходной поверхности,

$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(t_1, t_2, l)}$ - Якобиан преобразования Декартовых координат к лучевым.

Перепишем последнее уравнение в векторной форме, так как это более удобно для дальнейших рассуждений

$$I(t_1, t_2, l) = I_0(t_1, t_2) \frac{[\vec{r}_{t_1} \times \vec{r}_{t_2}] \vec{r}_l |_{l=0}}{[\vec{r}_{t_1} \times \vec{r}_{t_2}] \vec{r}_l} \quad (1.12)$$

и введем криволинейную систему координат на поверхности регистрации

$$\vec{r} = \vec{r}(t_1, t_2, l(t_1, t_2)) = \vec{R}(t_1, t_2) \quad (1.13)$$

где $l(t_1, t_2)$ - решение уравнения

$$\Phi(\vec{r}(t_1, t_2, l)) = 0 \quad (1.14)$$

Дифференцируя по t_1 или t_2 можно получить выражения для базисных векторов

$$\vec{R}_{t_1} = \vec{r}_{t_1} - \vec{r}_l \cdot \frac{\nabla \Phi \cdot \vec{r}_{t_1}}{\nabla \Phi \cdot \vec{r}_l} \quad (1.15)$$

$$\vec{R}_{t_2} = \vec{r}_{t_2} - \vec{r}_l \cdot \frac{\nabla \Phi \cdot \vec{r}_{t_2}}{\nabla \Phi \cdot \vec{r}_l}$$

Принимая во внимание выражения для базисных векторов на исходной поверхности и поверхности регистрации уравнение (1.12) преобразуется в следующее

$$I(t_1, t_2, l) = I_0(t_1, t_2) \frac{[\vec{r}_{t_1} \times \vec{r}_{t_2}] \vec{r}_l |_{l=0}}{[\vec{R}_{t_1} \times \vec{R}_{t_2}] \vec{r}_l} \quad (1.16)$$

По сравнению с выражением (1.11) уравнение (1.16) содержит распределение интенсивности на исходной поверхности и метрические характеристики исходной поверхности и поверхности регистрации. В качестве поверхности регистрации может использоваться сфера с бесконечно большим радиусом. В этом случае направления лучей, падающих на поверхность регистрации, совпадают с нормалью к ней

$$[\vec{R}_1 \times \vec{R}_2] \vec{r}_i = |\vec{R}_1 \times \vec{R}_2| \quad (1.17)$$

То же самое соотношение возможно на исходной поверхности

$$[\vec{r}_1 \times \vec{r}_2] \vec{r}_i = |\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| \quad (1.18)$$

Можно применить эти уравнения для получения более простого выражения для распределения интенсивности на поверхности регистрации.

Однако это выражение не подходит для расчета. Неудобство связано с использованием лучевой системы координат, так как выбор лучевых координат зависит от оптической схемы.

Введем новую криволинейную систему координат (T_1, T_2) на поверхности регистрации

$$\vec{r} = \hat{\Phi}(T_1, T_2) \quad (1.19)$$

Предположим, что криволинейные координаты (T_1, T_2) связаны с лучевыми координатами (t_1, t_2) с помощью следующего уравнения

$$\begin{aligned} T_1 &= F_1(t_1, t_2) \\ T_2 &= F_2(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Подставляя (1.18) и (1.19) в (1.16) получаем

$$I(t_1, t_2, l) = I_0(t_1, t_2) \frac{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}{|\Phi_{F_1} \times \Phi_{F_2}| \left| \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(t_1, t_2)} \right|} \quad (1.21)$$

Используя свойства функции Дирака можно переписать последнюю формулу в интегральной форме

$$I = \int I_0(t_1, t_2) \frac{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}{|\Phi_{F_1} \times \Phi_{F_2}|} \delta[T_1 - F_1(t_1, t_2), T_2 - F_2(t_1, t_2)] dt_1 dt_2 \quad (1.22)$$

Уравнение (1.22) обеспечивает базис для компьютерного моделирования оптических схем.

Предположим, что исходная поверхность и поверхность регистрации описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \vec{r}(t_1, t_2) &= \epsilon (\sin t_1 \cos t_2 \cdot \vec{e}_1 + \sin t_1 \sin t_2 \cdot \vec{e}_2 + \cos t_1 \cdot \vec{e}_3) \\ \Phi(T_1, T_2) &= R_0 (\sin T_1 \cos T_2 \cdot \vec{e}_1 + \sin T_1 \sin T_2 \cdot \vec{e}_2 + \cos T_1 \cdot \vec{e}_3) \end{aligned} \quad (1.23)$$

ϵ - радиус исходной поверхности, R_0 - радиус поверхности регистрации, (e_1, e_2, e_3) - базисные вектора прямоугольной системы координат.

В этом случае распределение интенсивности на исходной поверхности представляется как

$$I(t_1, t_2) = \frac{I_0}{\varepsilon^2} \quad (1.24)$$

а распределение интенсивности на поверхности регистрации принимает вид

$$I(T_1, T_2) = \int \frac{I_0}{R_0^2} \frac{\sin t_1}{\sin F_1(t_1, t_2)} \delta[T_1 - F_1(t_1, t_2), T_2 - F_2(t_1, t_2)] dt_1 dt_2 \quad (1.25)$$

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТРОЙСТВ С КВАНТОВАННЫМИ ДОО

В предыдущем разделе предложен метод моделирования светотехнических устройств с ДОО. Однако описанные выше ДОО обладают непрерывной фазовой функцией, что возможно только при использовании уникальных технологий изготовления дифракционного микрорельефа, например, на основе эффекта темного роста в слоях жидких фотополимеризующихся композиций [5-7] или на основе прямой лазерной записи на фоторезист [8-9].

Однако большинство разработанных технологий и существующего технологического оборудования не обеспечивает формирование ДОО с непрерывной фазовой функцией [10-11]. В частности, для изготовления ДОО успешно используется технология фотолитографического травления, позволяющая сформировать многоуровневый микрорельеф.

В настоящем разделе предлагается метод расчета диаграммы направленности светотехнических устройств, включающих многоуровневые ДОО.

Моделирование аналогичных оптических систем основано на модифицированном методе расчета лучевых траекторий. Для понимания предлагаемого метода рассмотрим прохождение светового пучка через многоуровневый ДОО.

Эйконал ДОО со ступенчатым профилем микрорельефа может быть представлен как

$$\tilde{\varphi} = \Phi(\text{mod}_L \varphi(t_1, t_2)) \quad (2.1)$$

где (t_1, t_2) - Декартовы координаты на дифракционном оптическом элементе, $\Phi(z)$ - функция предискажения [12,13].

Функция предискажения описывает преобразование функции эйконала ДОО в результате использования конкретной технологии формирования ДОО и возникших при изготовлении технологических погрешностей микрорельефа.

Решение уравнения Гельмгольца может быть записано в форме

$$E(x_1, x_2, x_3) = \frac{i}{\lambda} \int E_0(t_1, t_2) \frac{z}{L} \frac{e^{ikL}}{L} e^{ik\tilde{\varphi}(t_1, t_2)} dt_1 dt_2 \quad (2.2)$$

Для вычисления интеграла Кирхгофа разложим функцию $\exp(ik\tilde{\varphi})$ в ряд Фурье

$$\exp(ik\tilde{\varphi}) = \sum C_n e^{ikn\varphi(t_1, t_2)} \quad (2.3)$$

Подставляя формулу (2.3) в уравнение (2.2) и вычисляя все интегралы методом стационарной фазы [14] получаем выражение для комплексной амплитуды светового поля

$$E = - \sum C_n E_0(t_1^n, t_2^n) \frac{e^{ikn\varphi(t_1^n, t_2^n)}}{\sqrt{J_n(t_1^n, t_2^n, l^n)}} \quad (2.4)$$

где

$$J_n(t_1^n, t_2^n, l^n) = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(t_1^n, t_2^n, 0)} \cdot \frac{\partial(x_1^n, x_2^n, x_3^n)}{\partial(t_1^n, t_2^n, l^n)} - \text{лучевые координаты.}$$

Функция преобразования лучевых координат в Декартовы подчиняется системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dl^n} \left(\frac{dx_i}{dl^n} (t_1^n, t_2^n, l^n) \right) = 0 \quad (2.5)$$

с начальными условиями

$$x_i(t_1^n, t_2^n, 0) = t_i, \quad i=1,2$$

$$x_3(t_1^n, t_2^n, 0) = 0$$

$$\frac{dx_i}{dl} (t_1^n, t_2^n, 0) = \frac{\partial [n\varphi(t_1^n, t_2^n)]}{\partial t_i^n}, \quad i=1,2 \quad (2.6)$$

$$\frac{dx_3}{dl} (t_1, t_2, 0) = \sqrt{1 - \left(\frac{dx_1}{dl} \right)^2 - \left(\frac{dx_2}{dl} \right)^2}$$

На основе формулы (2.4) можно получить распределение интенсивности

$$I(x_1, x_2, x_3) = \sum \frac{|C_n|^2 I_0(t_1^n, t_2^n)}{J_n(t_1^n, t_2^n, l)} + \frac{\sum_{m \neq n} C_n C_m E_0(t_1^n, t_2^n) E_0^*(t_1^m, t_2^m) e^{ik(n\varphi(t_1^n, t_2^n) - m\varphi(t_1^m, t_2^m))}}{\sqrt{J_n(t_1^n, t_2^n, l^n)} \sqrt{J_m(t_1^m, t_2^m, l^m)}} \quad (2.7)$$

Попробуем проанализировать полученное выражение. Первый член в уравнении (2.7) представляет собой интенсивность светового поля, сформированного дифракционным оптическим элементом с функцией эйконала $n\varphi$. Второй член этого выражения описывает интерференцию между световыми полями. Обычно источник света в исследуемых светотехнических устройствах является некогерентным, поэтому интерференцией между различными световыми пучками можно пренебречь.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОТТЕХНИЧЕСКОГО УСТРОЙСТВА С ДОО

Полученные в предыдущих разделах соотношения положены в основу разработанного в ИСОИ РАН с участием С.Г.Волотовского и А.Е.Царегородцева программного обеспечения "RAY TRACING DOE". Разработанное для IBM PC совместимого компьютера программное обеспечение предназначено для моделирования сложных оптических схем, содержащих отражающие и преломляющие поверхности и дифракционные оптические элементы, включая градиентные линзы и дифракционные решетки. Программное обеспечение позволяет рассчитывать, проектировать и анализировать сложные оптические установки, в том числе учитывая влияние тепловых эффектов на работу устройства.

В качестве примера моделирования оптической установки на основе разработанного математического обеспечения рассмотрим простейшее светотехническое устройство, схематически изображенное на рисунке 1. Устройство состоит из параболического отражателя, в фокусе которого расположен центр осевой нити накаливания, и дифракционного оптического элемента. Целью работы исследуемого светотехнического устройства будем считать формирование диаграммы направленности излучения в форме латинской буквы F. Результат полученный для буквы F, может быть легко обобщен на любую требуемую диаграмму направленности.

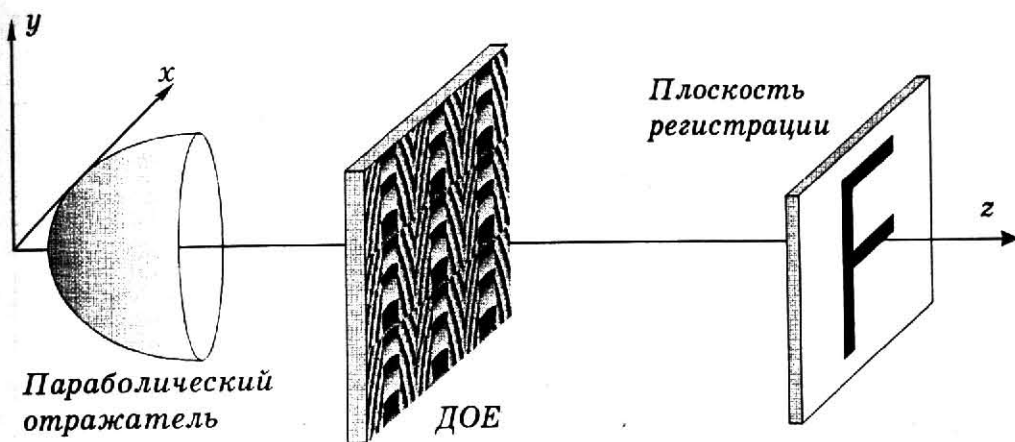


Рис.1. Оптическая схема моделируемого светотехнического устройства

Для оценки качества работы светотехнического устройства на стадии проектирования необходимо проанализировать световое поле, формируемое исследуемой оптической схемой в заданной области пространства. В рамках численного моделирования исследуется диаграмма направленности и анализируется связь между параметрами оптической схемы и качеством формируемой диаграммы направленности.

Для характеристики качества диаграммы направленности используются следующие величины

$$\delta = \frac{\sqrt{\int (I(\bar{x}) - I_0(\bar{x}))^2 d\bar{x}}}{\int I_0(\bar{x}) d\bar{x}} \quad (3.1)$$

$$\varepsilon = \frac{E_1}{E_0} \quad (3.2)$$

где ε - значение энергетической эффективности устройства, а δ - значение среднеквадратичного отклонения $I_0(\bar{x})$ от $I(\bar{x})$; $I_0(\bar{x})$ - идеальное (требуемое) распределение интенсивности, $I(\bar{x})$ - результат моделирования; E_1 - энергия, попадающая в требуемую область, E_0 - энергия источника излучения. Энергетическая эффективность характеризует долю энергии источника, попадающую в заданную область пространства.

В рассматриваемой оптической схеме (рис.1) ДОО вычислялся в приближении геометрической оптики на основе метода согласованных прямоугольников [15] с последующим повторением полученной фазовой функции по вертикали и горизонтали. Сложность расчета ДОО в подобном устройстве заключается в том, что в каждую точку оптического элемента приходит конус лучей от протяженного источника и отражателя. В результате практически невозможно рассчитать ДОО, оптимально управляющий приходящими разнородными пучками, что подтверждается результатами моделирования (рис.2 и табл.1).

Численное моделирование показывает, что качество формируемой диаграммы направленности может быть улучшено при уменьшении отношения d/f , где d - размер (длина нити накаливания) источника, а f - фокусное расстояние параболического отражателя (см. табл.1 и рис.2). Этот факт может быть подтвержден и с помощью аналитического исследования.

При моделировании были зафиксированы глубина отражателя и размер источника излучения (т.е. длина нити накаливания), а величина параметра d/f регулировалась за счет увеличения фокусного расстояния отражателя. При фиксированной глубине это приводило к увеличению раскрытия отражателя, и, как следствие, уменьшению энергетической эффективности светотехнического устройства (см. табл.1).

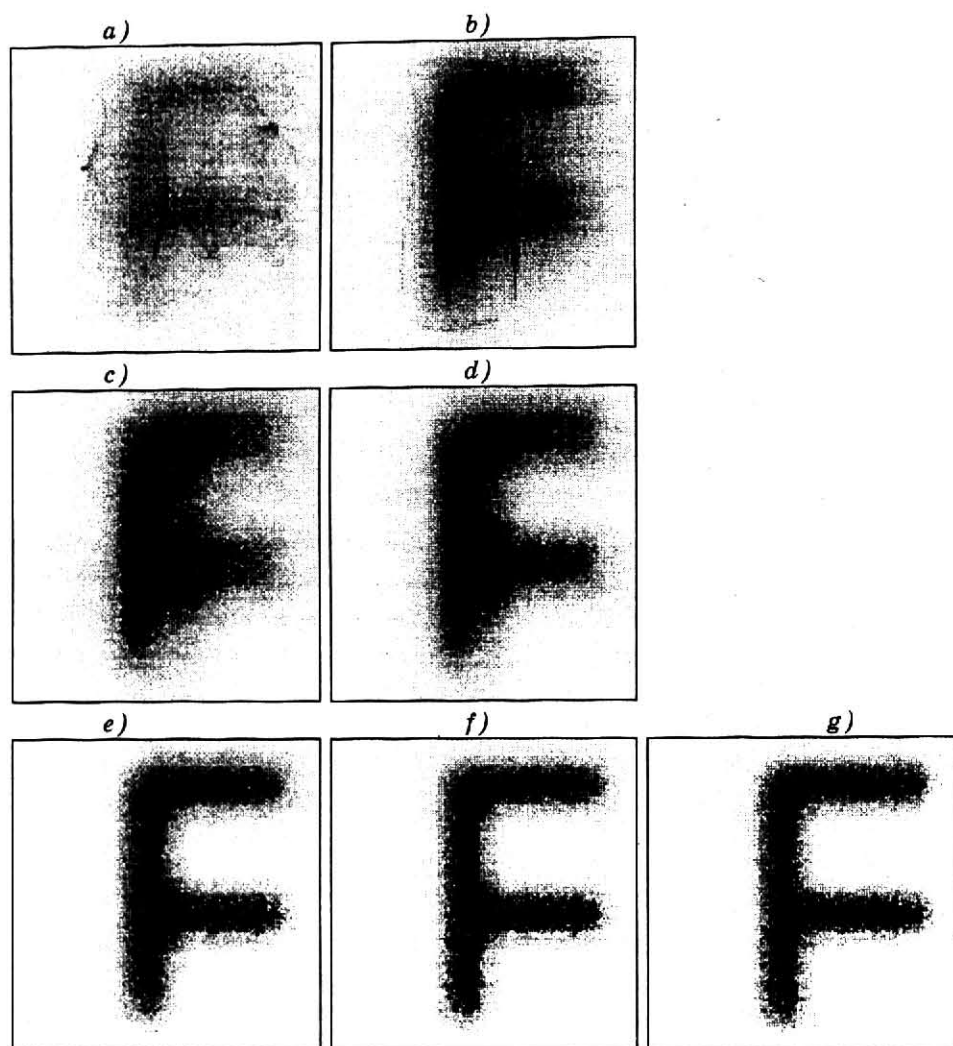


Рис.2. Распределение интенсивности в плоскости регистрации для параметров табл. 1

Таблица 1. Результаты моделирования светотехнического устройства

| Δ/f | $E(\%)$ | δ | N рисунка |
|------------|---------|----------|-------------|
| 2/3 | 69.00 | 1.485 | 2.a |
| 2/5 | 70.89 | 1.435 | 2.b |
| 4/15 | 59.63 | 1.357 | 2.c |
| 1/5 | 47.88 | 1.243 | 2.d |
| 2/15 | 30.44 | 1.009 | 2.e |
| 4/35 | 24.60 | 0.907 | 2.f |
| 1/10 | 20.22 | 0.837 | 2.g |

Другое направление проведенных исследований - это необходимая точность юстировки светотехнического устройства для формирования требуемой диаграммы направленности. На рисунке 3 и в таблице 2 показано изменение формы диаграммы направленности при перемещении центра нити накаливания вдоль оси симметрии отражателя в зависимости от значения относительной величины сдвига $\Delta z/f$, где f - фокусное расстояние отражателя. В результате такого сдвига при принципиальном изменении энергетической

эффективности падающего на область регистрации светового потока происходит существенное искажение формируемой диаграммы направленности.

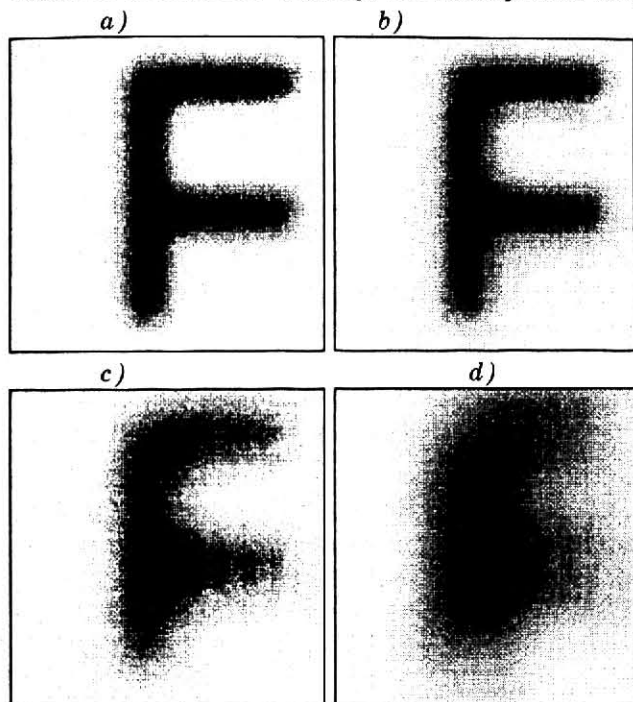


Рис.3. Изменение диаграммы направленности для параметров таблицы 2.

Таблица 2. Характеристики изменения формы диаграммы направленности при перемещении нити накаливания вдоль оптической оси

| Δ/f | Сдвиг $\Delta z/f$ | δ | <i>N рисунка</i> |
|------------|--------------------|----------|------------------|
| 1/10 | 1/60 | 0.876 | 3.a |
| 1/10 | 1/30 | 1.027 | 3.b |
| 1/10 | 1/20 | 1.273 | 3.c |
| 1/10 | 1/15 | 1.495 | 3.d |

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сложность расчета светотехнических устройств, формирующих требуемую диаграмму направленности, требует не только использования уникальных возможностей дифракционной оптики, но и обязательного моделирования и оптимизации работы такого класса оптических систем на этапе их проектирования. Разработанное программное обеспечение позволяет моделировать сложные оптические системы, включающие преломляющую, отражающую и дифракционную оптику, в том числе многоуровневые (квантованные) ДОЭ. Проведенные исследования светотехнического устройства, состоящего из ДОЭ, параболического отражателя и протяженного источника, демонстрируют возможности нового программного обеспечения и дифракционных оптических элементов.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Работа выполнена в рамках Государственной научно-технической программы "Наукоемкие технологии" при поддержке Министерства науки и технической политики РФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Morkry P. Unique applications of computer-generated diffractive optical elements // *Proceedings SPIE*, 1989, vol.1052, pp.163-170.
2. Leger J.R., Morris G.M. Diffractive optics: an introduction to the feature // *Applied Optics*, 1993, vol.32, No 14, pp.2481-2482.
3. Behrmann G.P., Bowen J.P. Influence of temperature on diffractive lens performance // *Applied Optics*, 1993, vol.32, No 14, pp.2483 - 2489.
4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. - М.: Наука, 1973. - 720 с.
5. Карпеев С.В., Соловьев В.С. Методы получения рельефных изображений с непрерывным профилем // *Компьютерная оптика*, 1989, No 4, с.60-61.
6. Соловьев В.С. Исследование поведения слоя ЖФПК во время рельефообразования // *Компьютерная оптика*, 1992, No 10-11, с.145-149.
7. Boiko Yu.B., Solovjev V.S., Calixto S., Loughnot D.-J. Dry photopolymer films for computer-generated infrared radiation focusing elements // *Applied Optics*, 1994, vol. 33, No 5, pp. 787-793.
8. Gale M.T., Rossi M., Schutz H., Ehbets P., Herzig H.P., Prongue D. Continuous-relief diffractive optical elements for two-dimensional array generation // *Applied Optics*, 1993, vol.32, No 14, pp.2526-2533.
9. Gale M.T., Rossi M., Pedersen J., Schutz H. Fabrication of continuous-relief micro-optical elements by direct laser writing in photoresist // *Optical Engineering*, 1994, vol.33, No 11, pp. 3556-3566.
10. Попов В.В. Материалы и методы для создания плоских фокусирующих элементов // *Компьютерная оптика*, 1987, No 1, с.160-163.
11. Бобров С.Т., Грейсх Г.И., Туркевич Ю.Г. Оптика дифракционных элементов и систем. - Л.: Машиностроение, 1986. - 224с.
12. Golub M.A., Doskolovich L.L., Kazanskiy N.L., Kharitonov S.I., Soifer V.A. Computer generated diffractive multi-focal lens // *Journal of Modern Optics*, 1992, vol.39, No 6, pp.1245-1251.
13. Soifer V.A., Doskolovich L.L., Kazanskiy N.L. Multifocal diffractive elements // *Optical Engineering*, 1994, vol. 33, No 11, pp. 3610-3615.
14. Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. - М.: Наука, 1987. - 544с.
15. Голуб М.А., Досколович Л.Л., Казанский Н.Л., Сисакян И.Н., Сойфер В.А., Харитонов С.И. Метод согласованных прямоугольников для расчета фокусаторов в плоскую область // *Компьютерная оптика*, 1992, No 10-11, с.100-110.