

---

*В.В. Котляр, П.Г. Серафимович, В.В. Соيفер*

**ГРАДИЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ДОО  
С НАЛОЖЕННЫМИ НА ФАЗОВУЮ ФУНКЦИЮ ОГРАНИЧЕНИЯМИ  
И С РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ**

Задача расчета дифракционных оптических элементов (ДОО) с квантованной фазой сформулирована как задача минимизации функционала с ограничениями. Рассмотрена возможность регуляризации алгоритма. Приведено численное сравнение результатов работы алгоритма для градиентного и итеративного (по типу алгоритма Герчберга-Сэкстона) способов минимизации функционала.

**Введение**

ДОО - это тонкая фазовая пластинка с микро-рельефом, которая при освещении ее лазерным светом формирует с высокой эффективностью в заданной плоскости пространства требуемое распределение интенсивности.

Имеется много методов расчета ДОО с полупроводниковой фазой [1-3]. Однако с точки зрения существующих технологий изготовления ДОО важно уметь рассчитывать ДОО с фазовой функцией имеющей небольшое число (2-5) уровней квантования.

В данной работе предложен и обоснован итеративный алгоритм расчета ДОЭ, который минимизирует критерий, состоящий из функционала невязки и функционала ограничений с регуляризацией произвольного порядка.

### Градиентный алгоритм

Для решения задачи расчета ДОЭ необходимо решить нелинейное интегральное уравнение вида

$$I_0(u) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} A_0(x) \exp[i\varphi(x)] \exp[i2\pi xu] dx \right|^2, \quad (1)$$

где  $A_0(x)$  - амплитуда света, освещающего ДОЭ;  $\varphi(x)$  - искомая фаза ДОЭ;  $I_0(u)$  - требуемое распределение интенсивности, которое должен сформировать ДОЭ в плоскости изображения.

Показано [2], что алгоритм Герчберга-Сэкстона (ГС), широко применяемый для решения уравнения (1), является градиентным методом с неоптимальным выбором шага и минимизирует функционал невязки:

$$E_0(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} W(u) [|G_n(u)| - |F(u)|]^2 du, \quad (2)$$

где  $W(u)$  - весовая действительная функция,  $(F(u) = I_0^{1/2}(u))$  - заданная амплитуда в плоскости изображения, а

$$\begin{aligned} G_n(u) &= \mathfrak{F}[g_n(x)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A_0(x) \exp[i\varphi_n(x)] \exp[i2\pi xu] dx \end{aligned} \quad (3)$$

- текущее приближение к ней на  $n$ -й итерации,  $\mathfrak{F}$  - обозначение Фурье-преобразования.

Процессу сходимости алгоритма ГС присущ эффект стагнации, поэтому целесообразно использовать один из градиентных методов с точным вычислением градиентного шага. В градиентном методе минимизации функционала (2) реализуется итеративный процесс вида

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) - s_n \nabla E_0, \quad (4)$$

где  $\nabla E_0(x)$  - приближение искомой фазовой функции на  $n$ -й итерации,  $\nabla E_0 = \frac{\partial E_0}{\partial \varphi_n(x)}$  - градиент функционала (2) на  $n$ -й итерации,  $s_n$  - длина шага.

В [2] показано, что для функционала (2) имеет место следующее выражение для градиента:

$$\nabla E_0 = -2A_0(x) |g'_n(x)| \sin[\varphi_n(x) - \arg(g_n(x))], \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} g'_n(x) &= \mathfrak{F}^{-1}[G'_n(u)], \\ G'_n(u) &= \\ &= W(u) [G(u) - |F(u)| G_n(u) |G_n(u)|^{-1}] \end{aligned} \quad (6)$$

В [2] была определена длина шага  $s_n$  при допущении, что

$$E_0(s_n) = E_0(\varphi_n + s_n \nabla E_0)$$

- линейная функция:

$$s_n = E_0(\varphi_n(x)) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla E_0)^2 dx \right]^{-1}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla E_0)^2 dx &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} A_0^2(x) |g'_n(x)|^2 \times \\ &\times \sin^2[\varphi_n(x) - \arg(g_n(x))] dx \end{aligned} \quad (8)$$

### Расчет ДОЭ с квантованной фазой

Для решения задачи расчета ДОЭ с квантованной фазой сформируем вспомогательный функционал, который назовем функционалом ограничений  $B$ . Для этого воспользуемся результатом, полученным в [4]: если фазу произвольной комплексной функции  $g(x) = (g(x) \exp[i\varphi(x)])$  квантовать по  $N$  эквидистантным уровням, то фурье-образ полученной функции будет удовлетворять соотношению

$$\hat{G}(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m G_m(u), \quad (9)$$

где

$$G_m(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g_m(x) \exp[i2\pi xu] dx,$$

$$g_m(x) = |g(x)| \exp[i(Nm+1)\varphi(x)],$$

$$d_m = \sin c[m + (1/N)],$$

$$\sin c(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}.$$

Исходя из этого функционал ограничений запишем в виде

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \left| G(u) - \sum_{m=-M}^M d_m G_m(u) \right|^2 du, \quad (10)$$

где  $M$  - конечное число членов ряда (9).

Тогда решение задачи расчета градиентного ДОЭ сводится к минимизации общего функционала

$$E = E_0 + \beta B \quad (10)$$

где  $\beta \geq 0$  - действительное число.

Градиент функционала по фазовой функции  $\varphi(x)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial \varphi(x)} &= \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[ G(u) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m G_m(u) \right]^* \times \right. \\ &\times \left. \left[ \frac{\partial G(u)}{\partial \varphi} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m \frac{\partial G_m(u)}{\partial \varphi} \right] du \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i|g(x)|^2 - \\
&-i \sum_{m=-M}^M d_m [(Nm+1)g^*(x)g_m(x) + \\
&+ g_m^*(x)g(x)] + \\
&+ i \sum_{m=-M}^M d_m g_m^*(x) \sum_{n=-M}^M d_n (Nn+1)g_n(x) = \\
&= -2 \sum_{m=-M}^M d_m Nm (g(x))^2 \sin(Nm\varphi(x)) - \\
&-2 \sum_{m=-M}^M d_m \sum_{n=-M}^M d_n (Nn+1) |g(x)|^2 \times \\
&\times \sin(N(m-n)\varphi(x)) \quad (11)
\end{aligned}$$

### 3. Регуляризация задачи расчета ДОЭ

Запишем регуляризирующий функционал  $g$ -й степени [5]:

$$Q_r = \int_{-\infty}^{\infty} p_r(u) (G(u))^2 du, \quad (12)$$

где  $p_r(u) = \sum_{l=0}^r c_l u^{2l}$ ,  $c_l \geq 0$  - действительные константы.

Вычислим градиент функционала регуляризации

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_r}{\partial \varphi(x)} &= \\
&= 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} p_r(u) G^*(u) \frac{\partial G(u)}{\partial \varphi(x)} du \right\} =, \quad (13) \\
&= 2 \operatorname{Im}[g(x)g_p^*(x)]
\end{aligned}$$

где

$$g_p(x) = \mathfrak{F}^{-1}[G_p(u)],$$

$$G_p(u) = p_r(u)G(u).$$

Тогда решение задачи расчета ДОЭ с регуляризацией сводится к минимизации общего функционала

$$E = E_0 + \alpha Q_r$$

где  $\alpha \geq 0$  - действительное число.

### Численные результаты

В численном эксперименте проводилось сравнение стандартного и регуляризованного [6] алгоритмов ГС со стандартным градиентным (СГ) и регуляризованным градиентным (РГ) методами.

Стандартный алгоритм ГС состоит из следующих шагов:

- выбирается начальная оценка фазы  $e_{T_0}(x)$ ;
- выполняется преобразование (3), и полученная функция  $G_0(u)$  заменяется на функцию  $G'_n(u)$

$$G'_n(u) = |F(u)|G_n(u)|G_n(u)|^{-1} \quad (14)$$

в) выполняется обратное к (3) преобразование, и рассчитанная функция  $g'_n(x)$  в плоскости ДОЭ заменяется на  $g_n(x)$

$$g_n(x) = \begin{cases} A_0(x)g'_n(x)|g'_n(x)|^{-1}, & x \in D, \\ 0, & x \notin D, \end{cases} \quad (15)$$

где  $D$  - форма апертуры ДОЭ. После пункта (в) переходят к пункту (б) и так далее.

В регуляризованном алгоритме ГС согласно [6] вместо замены (14) используется замена

$$G'_n(u) = (F(u)(G_n(u)[(G_n(u) + \alpha p_r(u))]^{-1} \quad (16)$$

где  $\alpha \geq 0$  - стабилизирующая постоянная.

В численном эксперименте рассчитывался ДОЭ с фазовой функцией 64x64 отсчетов фокусирующий излучение в равномерный прямоугольник 32x16 отсчетов.

На рис.1 представлены центральные сечения распределения интенсивности в плоскости наблюдения:

- для стандартного ГС (отклонение рассчитанного распределения интенсивности от заданного в плоскости наблюдения - 15.1%, эффективность - 96.4%;
- для регуляризованного ГС (13.4%, 92.3%),
- для СГ метода (7.5%, 84.2%),
- для РГ метода (6.2%, 83.4%).

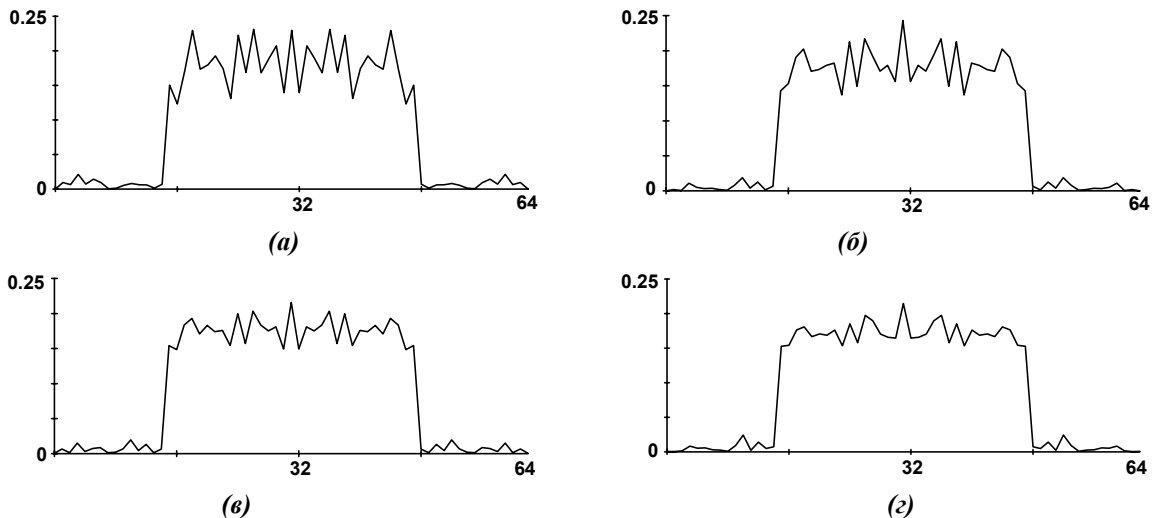


Рис. 1. Сечения интенсивности света прямоугольника с постоянной интенсивности, рассчитанная различными методами: а) ГС методом, б) регуляризованным ГС методом, в) СГ методом, г) РГ методом.

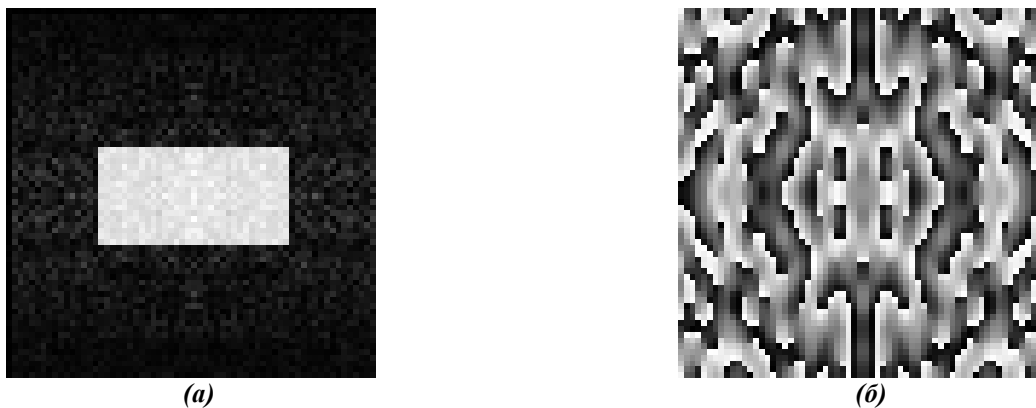


Рис. 2. Двумерное изображение распределения интенсивности в фокальной плоскости, рассчитанное РГ методом за 40 итераций (а) и фазовая функция ДОЭ (б) формирующего данное распределение интенсивности.

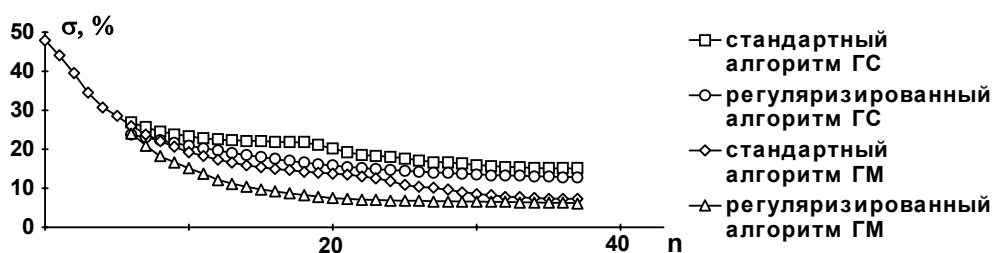


Рис. 3. Зависимость среднеквадратичного отклонения рассчитанной интенсивности в фокальной плоскости от заданного постоянного значения от числа итераций.

На рис.2 изображена рассчитанное регуляризованным ГМ распределение интенсивности в плоскости наблюдения (а) и фазовая функция (б).

На рис.3 показаны зависимости среднеквадратичной ошибки рассчитанной интенсивности от числа итераций для различных алгоритмов расчета.

#### Литература:

1. Lesem L.B., Hirsch P.M., Jordan J.A. "The kinoform: new wavefront reconstruction device", IBM J.Res. Devel. 13, 150-155, (1969)

2. J.R. Fienup, "Phase retrieval algorithms: a comparison," Appl. Opt. 21, 2758-2769 (1982).

3. J.R.Fienup, "Phase-retrieval algorithms for a complicated optical system", Appl. Opt. 32(10), 1737-1746 (1993).

4. J.W. Goodman, A.M. Silvestri, "Some effects of Fourier-domain phase quantization", IBM J. Res. Develop. 9, 478-484 (1970).

5. Тихонов А.И., Арсенин В.Я., Методы решения некорректных задач. М., 1979, 286 с.

6. Котляр В.В., Серафимович П.Г., Адаптивный итеративный метод расчета киноформов., Оптика и спектроскопия, 77, 678-681 (1994),

# A gradient algorithm for designing diffractive optical elements with the phase function restrictions and regularization

V.V. Kotlyar, P.G. Serafimovich, V.A. Soifer

## *Abstract*

The problem of designing diffractive optical elements (DOE) with a quantized phase is defined as the problem of minimizing the functional with restrictions. The possibility of regularizing the algorithm is considered. A numerical comparison of the results of applying the algorithm for gradient and iterative (according to the Herchberg-Sexton algorithm) methods of minimizing the functional is provided.

*Citation:* Kotlyar VV, Serafimovich PG, Soifer VA. A gradient algorithm for designing diffractive optical elements with the phase function restrictions and regularization. *Computer Optics* 1996; 16: 50-53.

## *References*

- [1] Lesem LB, Hirsh PM, Jordan JA. The kinoform: a new wave front reconstruction device. *IBM J.Res.Develop.*; 1969; 13: 150-155.
- [2] Fienup JR. Phase retrieval algorithms: a comparison. *Appl. Opt.*; 1982; 21: 2758-2769.
- [3] Fienup R. Phase-relief algorithm for a complicated optical system. *Appl.Opt.*; 1993; 32(10): 1737-1746.
- [4] Goodman JW, Silvestri AM. Some effects of Fourier-domain phase quantization. *IBM Journ. Res. Develop*; 1970; 14: 478-484
- [5] Tikhonov AN, Arsenin ZY. *Methods for solving the ill-posed problems*. Moscow: Nauka Publisher; 1979; 286.
- [6] Kotlyar VV, Serafimovich PG. Adaptive iterative method of calculating kinoforms. *Optics and Spectroscopy*; 1994: 77: 678-681.