
БЫСТРЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ РАСЧЕТ ФАЗОВЫХ ФОРМИРОВАТЕЛЕЙ МОД ГАУССА-ЛАГЕРРА

В.С. Павельев, С.Н. Хонина

Институт систем обработки изображений РАН

Аннотация

Предлагается высокоэффективная итерационная процедура расчета дифракционных оптических элементов (ДОЭ), формирующих обобщенные моды Гаусса-Лагерра из освещающего Гауссова пучка. Построение итерационной процедуры основано на разбиении плоскости наблюдения на “полезную” и “вспомогательную” радиальные области. Применение быстрой процедуры вычисления преобразования Ганкеля позволяет рассчитывать элементы с реальным количеством отсчетов, не прибегая к использованию высокопроизводительной вычислительной техники. На результатах вычислительного эксперимента показано, что предлагаемый подход позволяет рассчитывать элементы, формирующие заданное одномодовое распределение с большей энергетической эффективностью, чем существующие аналитически рассчитанные аналоги. Обсуждаются возможные применения элементов, рассчитанных предлагаемой процедурой, и целесообразные технологии их изготовления.

Введение

Моды лазерного излучения - пучки, комплексное распределение в сечении которых описывается собственными функциями оператора распространения света в среде [1]. Фундаментальными свойствами мод являются свойства сохранения своей структуры и ортогональности при распространении в среде [1]. В [1] было показано, что использование фундаментальных свойств мод лазерного излучения позволяет увеличивать число каналов в оптоволоконных системах связи и системах связи в свободном пространстве, создавать высокочувствительные оптоволоконные датчики. Таким образом, разработка элементов, позволяющих формировать и селективировать моды лазерного излучения, является важной задачей совершенствования элементной базы для построения высокоэффективных оптоэлек-

тронных систем. В [1] рассмотрен расчет и изготовление фазовых дифракционных оптических элементов (ДОЭ), формирующих заданное модовое распределение (моданов).

В [1] для перехода от комплексной функции пропускания модана к чисто фазовой предложено использовать дифракционное кодирование, основанное на внесении модулированной несущей в фазу элемента (обобщенный метод Кирка-Джонса). Применение такого подхода приводит к низкой энергетической эффективности элементов, что связано с появлением нерабочих дифракционных порядков.

В данной работе рассматривается итерационный подход к расчету фазовых моданов. В работе [2] описан итерационный алгоритм, позволяющий рассчитывать моданы, формирующие группу из че-

тырех и более мод, с энергетической эффективностью свыше 90%. Однако во многих случаях стоит задача формирования одномодового распределения из освещающего пучка в заданной области плоскости наблюдения с высокой энергетической эффективностью [1].

Для решения этой задачи в [3] был предложен итерационный алгоритм расчета ДОЭ, формирующего моду Гаусса-Эрмита (1,0) в полезной области фокальной плоскости из Гауссова пучка.

Элемент, рассчитанный процедурой [3], был впоследствии изготовлен методом равномерного травления полиметилметакрилата, нанесенного на подложку из кварцевого стекла, по 16 уровням [4]. Изготовленный элемент был рассчитан как добавка к линзе и предназначен для работы с пучком гелио-неонового лазера HNA-180. На Рис.1 представлено двумерное распределение интенсивности, измеренное CCD-камерой в ходе натурального эксперимента по исследованию изготовленного модана [4]. Измерение производилось в выходной плоскости фурье-каскада, на вход которого подавалось одномодовое распределение, сформированное рассчитанным элементом. Таким образом, результаты натурального эксперимента [4] подтверждают целесообразность применения итерационной процедуры [3] к расчету однопучковых моданов.



Рис. 1. Распределение интенсивности, сформированное элементом, согласованным с модой Гаусса-Эрмита (1,0).

Однако, основным недостатком процедуры [3] является необходимость больших вычислительных затрат, связанных с вычислением **двух** двумерных преобразований Фурье на итерацию. Это ограничение является существенным так как, во-первых, для изготовления реального элемента требуется полутонная маска с размерами, как минимум 2048*2048 отсчетов, во-вторых, как показывает практика, подбор оптимальных параметров требует неоднократного итерационного расчета и моделирования ДОЭ.

В работе [5] показано, что в случае, если заданное распределение обладает радиальной симметрией, **двумерное** преобразование Фурье сводится

к преобразованию Ганкеля, которое может быть вычислено с помощью **трех одномерных** преобразований Фурье. Радиальной симметрией обладают, например, моды Гаусса-Лагерра с нулевым значением второго порядкового номера [1], моды Бесселя.

Для формирования обобщенных мод Гаусса-Лагерра произвольных порядков можно использовать преобразование Ганкеля того же порядка, что и второй порядковый номер моды [5].

Данная работа посвящена расчету и исследованию элементов, формирующих обобщенные моды Гаусса-Лагерра из Гауссова пучка, и исследованию свойств сформированного одномодового пучка средствами вычислительного эксперимента.

Для расчета предлагается модификация алгоритма [3] для радиально-симметричного случая. На примере расчета моданов, формирующих обобщенные моды Гаусса-Лагерра показано, что развиваемый подход позволяет формировать заданное распределение с энергетической эффективностью, значительно большей, чем у элементов, рассчитанных методом Кирка-Джонса [1].

1. Постановка задачи формирования одномодового распределения.

Рассмотрим постановку задачи расчета фазового однопучкового модана. Пусть элемент с функцией комплексного пропускания $W_1(u, v)$, определенной на апертуре D , освещается пучком света с распределением комплексной амплитуды в сечении $W_0(u, v)$. Комплексное распределение в плоскости непосредственно за элементом имеет вид $W(u, v) = W_1(u, v)W_0(u, v)$. В случае выполнения условия параксиального приближения и условия дальней зоны, преобразование Френеля-Кирхгофа, описывающее связь комплексного распределения за элементом $W(u, v)$ с распределением в плоскости наблюдения $w(x, y)$, сводится к преобразованию Фурье [6]:

$$\begin{cases} w(x, y) = F(W(u, v)) \\ W(u, v) = F^{-1}(w(x, y)) \end{cases} \quad (1)$$

При соблюдении упомянутых условий можно сформулировать задачу синтеза фазового ДОЭ, формирующего заданное комплексное одномодовое распределение $\psi(x, y)$ в области M плоскости наблюдения, как задачу поиска такой функции $w(x, y)$, которая удовлетворяя условию

$$\iint_M |w(x, y) - \psi(x, y)|^2 dx dy = 0, \text{ имела бы амплитуду}$$

фурье-спектра $C\sqrt{I_0(u, v)}$, где $I_0(u, v) = |W_0(u, v)|^2$ - распределение интенсивности освещающего пучка, C - константа, выбираемая из условия сохранения энергии.

2. Построение процедуры расчета формируемых обобщенных мод Гаусса-Лагерра

В [3] рассмотрен подход к построению итерационной процедуры расчета однопучкового модана. Для появления свободных параметров, необходимых для работы итерационной процедуры, в плоскости наблюдения выделяется “полезная” область M , содержащая формируемое изображение $\psi(x,y)$, и некоторая “вспомогательная” область.

На каждой итерации в фокальной плоскости осуществляется замена имеющегося распределения в “полезной” области на требуемое одномодовое распределение и обнуление точек фокальной плоскости, лежащих вне “полезной” и “вспомогательной” областей. Значения комплексной амплитуды в точках “вспомогательной” области являются свободными параметрами. Затем пересчитывается распределение в плоскости ДОО, где осуществляется подстановка амплитудного распределения освещающего пучка $|W_0(u,v)|$. После этого опять выполняется переход в фокальную область элемента.

В качестве начального приближения в [3] выбиралось распределение, содержащее в “полезной” области заданное одномодовое распределение $\psi(x,y)$ и случайное предсказание во “вспомогательной”. Доля энергии освещающего пучка, приходящаяся на точки “вспомогательной” области является “платой” за приведение амплитуды Фурье-образа формируемого изображения $|W_n(u,v)| = |F^{-1}(w_n(x,y))|$ к форме освещающего пучка $|W_0(u,v)|$.

Разработанная процедура является, по сути, модификацией известной процедуры Фьенапа [7] со специфическим ограничением, накладываемым на распределение в плоскости наблюдения. В [8] показано, что в случае, если формируемое изображение $w(x,y) = w(r)$ и освещающий пучок $I(u,v) = I(\rho)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ обладают радиальной симметрией, преобразование (1) может быть сведено к преобразованию Ганкеля 0-го порядка:

$$\begin{cases} w(r) = H_0(W(\rho)) \\ W(\rho) = H_0(w(r)) \end{cases} \quad (2)$$

В этом случае постановка задачи расчета ДОО выглядит следующим образом: необходимо найти функцию $w(r)$, которая удовлетворяя условию $\int_{r < R_1} |w(r) - \psi(r)|^2 r dr = 0$, имела бы амплитуду Фурье-спектра $C\sqrt{I_0(\rho)}$, где $I_0(\rho) = |W_0(\rho)|^2$, R_1 - радиус полезной области (например, радиус сердцевинны градиентного оптического волновода) (Рис 2). В

работе [5] показано, что вычисление преобразования Ганкеля (2) легко сводится к вычислению *трех одномерных* преобразований Фурье. Таким образом, в предположении, что “вспомогательная” область также обладает радиальной симметрией, итерационная процедура [3] существенно упрощается и требует вычисления лишь *шести одномерных* преобразований Фурье на итерацию.

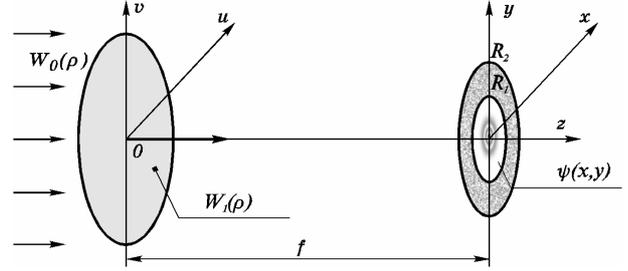


Рис. 2. Постановка задачи расчета ДОО, формирующего радиально-симметричную моду.

Интересно отметить, что, обладая эффективной процедурой расчета радиально-симметричных моданов, можно получить распределение, описываемое любой обобщенной модой Гаусса-Лагерра, формируя нерадиально-симметричную фазовую “добавку” соответствующим фазовым фильтром, выбираемым из следующих соображений. Для формирования в дальней зоне Фраунгофера обобщенной моды Гаусса-Лагерра [1]:

$$\begin{aligned} \psi_{nm}^{\pm}(r, \theta) &= \frac{2\sqrt{\pi(n-m)}}{\omega\sqrt{(n!)^3}} \left(\frac{r}{\omega}\right)^m \times \\ &\times \exp\left[-\frac{r^2}{2\omega^2}\right] L_n^m\left(\frac{r^2}{\omega^2}\right) \exp(\pm im\theta) = \\ &= \tilde{\psi}_{nm}(r) \exp(\pm im\theta) \end{aligned} \quad (3)$$

(где ω - фундаментальный радиус моды, θ - угол в полярных координатах, L -полином Лагранжа, n, m - порядковые номера мод) необходимо на входе иметь следующее распределение комплексной амплитуды:

$$\begin{aligned} \Psi(\rho, v) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \psi_{nm}^{\pm}(r, \theta) \times \\ &\times \exp[-i 2\rho r \cos(\theta - v)] r dr d\theta = \\ &= \exp(\pm imv) \int_0^{\infty} \tilde{\psi}_{nm}(r) \left[\int_0^{2\pi} \exp(\pm imt) \times \right. \\ &\left. \times \exp[-i 2\pi r \cos(t)] dt \right] r dr \end{aligned} \quad (4)$$

Используя справочный интеграл [8]:

$$J_m(x) = \frac{i^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\pm imt) \exp[-ix \cos(t)] dt \quad (5)$$

легко свести (4) к следующему виду:

$$\Psi(\rho, \nu) = \exp(\pm im\nu) \frac{2\pi}{i^m} \times \int_0^\infty \tilde{\psi}_{nm}(r) J_m(r\rho) r dr = \tilde{\Psi}(\rho) \exp(\pm im\nu) \quad (6)$$

Таким образом, для формирования функции (3) нам нужно рассчитать только радиальный множитель искомой функции:

$$\tilde{\Psi}(\rho) = \frac{2\pi}{i^m} \int_0^\infty \tilde{\psi}_{nm}(r) J_m(r\rho) r dr, \quad (7)$$

который представляет собой преобразование Ганкеля m -го порядка.

3. Экспериментальные результаты.

В данной работе производился итерационный расчет ДОЭ, формирующего из Гауссова пучка с распределением интенсивности

$$I_0(\rho) = \exp\left[-\frac{2\rho^2}{\sigma^2}\right] \quad (8)$$

эталонное распределение, описываемое модой лазерного излучения $\psi(r)$, внутри области M с радиусом R_1 . В качестве эталонных распределений выбирались обобщенные моды Гаусса-Лагерра (1,0), (4,0), (2,2).

В качестве начального приближения выбиралась функция

$$w_0(r) = \begin{cases} \psi(r) & r \leq R_1 \\ \tilde{\mu}\chi(r) & R_1 < r < R_2 \\ 0 & r \geq R_2 \end{cases} \quad (9)$$

В качестве $\chi(r)$ выбиралась случайная вещественнозначная функция, равномерно распределенная на отрезке $[0, \max|\psi(x)|]$, параметр $\tilde{\mu}$ определяет соотношение долей энергии, приходящихся на "полезную" и "вспомогательную" области начального приближения. R_2 - внешний радиус вспомогательной области. Введение случайного предвыскажения во "вспомогательную" область приводит к появлению свободных параметров, необходимых для работы процедуры. Для пересчета поля из плоскости элемента в фокальную плоскость и обратно использовалась процедура быстрого вычисления преобразования Ганкеля [5].

Элементы рассчитывались как добавка к линзе со следующими значениями физических параметров: фокусное расстояние $f=50$ мм, длина волны $\lambda=0.6328$ мкм, радиус апертуры ДОЭ $R_{ap}=10$ мм, фундаментальный радиус формируемой моды $\omega=5.6$ мкм, радиус освещающего Гауссова пучка $\sigma=3-3.5$ мм, количество итераций $N=10$.

В качестве критериев качества формирования заданного распределения были определены энергетическая эффективность

$$e_n = \frac{M \iint |w_n(x, y)|^2 dx dy}{\iint_D I_0(u, v) du dv}, \quad (10)$$

где $w_n(x, y)$ - комплексная амплитуда сформированного распределения на n -ой итерации, и удельная мощность эталонной моды в полезной области [1].

$$\zeta_n = \left| C_0 \iint_M w_n(x, y) \psi(x, y) dx dy \right|^2, \quad (11)$$

Константа C_0 выбирается из условия ортогональности базиса модовых функций,

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y) \psi^*(x, y) dx dy = 1:$$

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{M \iint |w_n(x, y)|^2 dx dy}}. \quad (12)$$

Для строгой оценки доли энергии освещающего пучка, идущей на формирование эталонной моды в полезной области M фокальной плоскости вычислялось значение приведенной энергетической эффективности

$$E_n = e_n \zeta_n. \quad (13)$$

Предлагаемая процедура естественным образом обобщается на случай расчета ДОЭ для формирования любого комплексного распределения вида $w(r) \exp(im\theta)$, $m=0,1,2,\dots$, если входной пучок обладает радиальной симметрией. Однако соотношение энергетической эффективности и точности формирования заданного распределения будет определяться конкретной спецификой задачи. Отметим также, что в случае, если формируемое изображение содержит только нулевые значения в точках вблизи оптической оси, пересчет поля с апертуры в фокальную плоскость и обратно может осуществляться, используя вычисление всего лишь **двух одномерных** преобразований Фурье на итерацию [9]. Примером такого распределения являются обобщенные моды Гаусса-Лагерра с равными значениями порядковых номеров (Рис. 5).

В работе [1] было показано, что Гауссовы моды не только являются собственными функциями оператора распространения света в градиентных оптических волноводах, но также сохраняют свою структуру и ортогональность при распространении в пространстве.

В [10] было показано, что Гауссовы моды не меняют своей структуры и при прохождении Фурье-каскада. В этом случае меняется лишь значение фундаментального радиуса моды ω на ω_F , определяемое параметрами Фурье-каскада:

$$\omega_F = \frac{\lambda f}{\omega \pi}. \quad (14)$$

Распределения фазы и амплитуды, полученные в результате расчета и моделирования моданов, а также в результате моделирования распространения сформированных одномодовых пучков, приведены на Рис. 3-5.

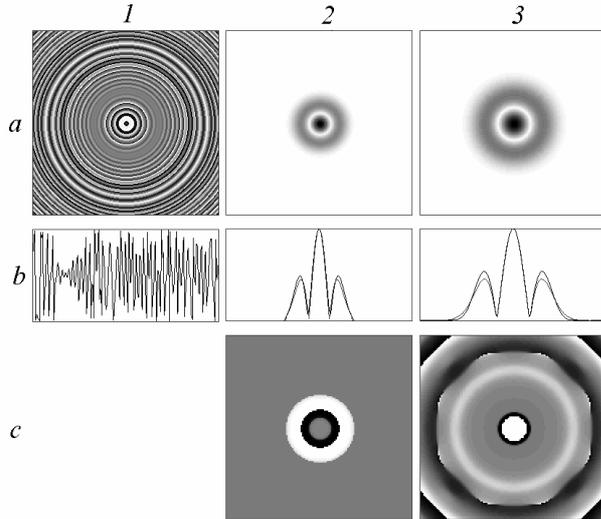


Рис. 3. Формирование моды Гаусса-Лагерра (1,0): распределение фазы ДОЭ (1a), ее радиальное сечение (1b), сформированное амплитудное распределение в полезной области (2a), его радиальное сечение (штриховой линией показано сечение эталонной моды) (2b), сформированное фазовое распределение в полезной области (2c) (диапазон значений $[-\pi, \pi]$), в третьем столбце приведены результаты моделирования прохождения сформированной моды через Фурье-каскад.

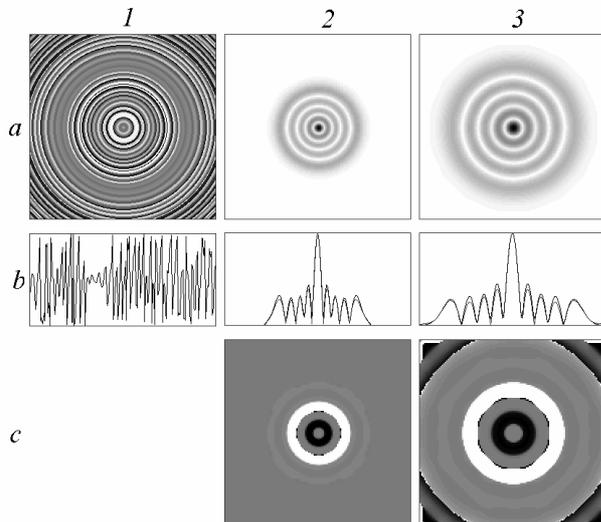


Рис. 4. Формирование моды Гаусса-Лагерра (4,0): распределение фазы ДОЭ (1a), ее радиальное сечение (1b), сформированное амплитудное распределение в полезной области (2a), его радиальное сечение (штриховой линией показано сечение эталонной моды) (2b), сформированное фазовое распределение в полезной области (2c) (диапазон значений $[-\pi, \pi]$), в третьем столбце приведены результаты моделирования прохождения сформированной моды через Фурье-каскад.

Интересно отметить “вращение” моды (2,2) при прохождении Фурье-каскада, что объясняется наличием винтовой фазовой добавки (Рис. 5).

Кроме того, в данной работе проводилось сравнение элементов, рассчитанных предложенной процедуры, с элементами, рассчитанными методом Кирка-Джонса для того же набора физических параметров. Значение оценки e_k энергетической эффективности элементов, рассчитанных методом Кирка-Джонса, находилось по методике, приведенной в [1]. Для выбранного набора параметров значение e_k не превышало 14.5%.

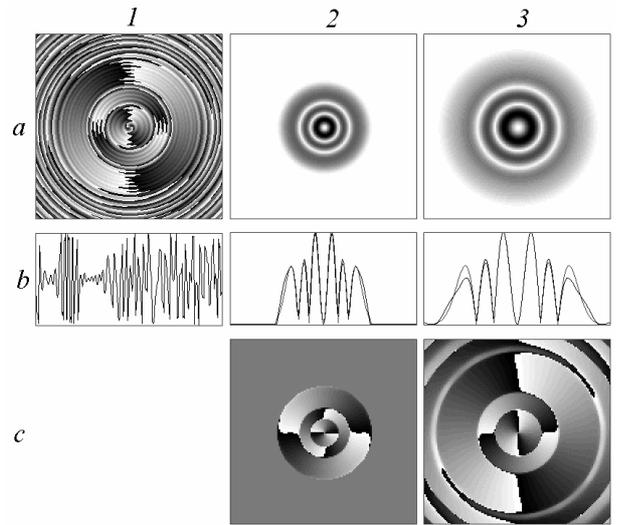


Рис. 5. Формирование моды Гаусса-Лагерра (2,2): распределение фазы ДОЭ (1a), ее радиальное сечение (1b), сформированное амплитудное распределение в полезной области (2a), его радиальное сечение (штриховой линией показано сечение эталонной моды) (2b), сформированное фазовое распределение в полезной области (2c) (диапазон значений $[-\pi, \pi]$), в третьем столбце приведены результаты моделирования прохождения сформированной моды через Фурье-каскад.

Результаты вычислительного эксперимента (Таб. 1) показали, что предложенная итерационная процедура позволяет рассчитывать моданы, формирующие обобщенные моды Гаусса-Лагерра с энергетической эффективностью в 2-3 раза большей, чем моданы, рассчитанные с помощью метода [1]. При этом содержание заданной моды в формируемом пучке составило свыше 95%.

Таблица 1.

Номера моды	$\sigma, \text{ мт}$	$e, \%$	$\zeta, \%$	$E, \%$
(1,0)	3	40.1	97.5	39.0
(2,0)	3.3	35.4	96.4	34.1
(2,2)	3.5	62.8	96.7	60.6
(4,0)	3.5	33.7	96.4	32.4

Заключение

В данной работе рассмотрен высокоэффективный итерационный метод расчета формирователей мод Гаусса-Лагерра. Результаты вычислительных экспериментов демонстрируют весьма ощутимый выигрыш в энергетической эффективности по сравнению с методом Кирка-Джонса.

В то же время, применение эффективной процедуры расчета, использующий вычисление всего **шести одномерных преобразований Фурье** на итерацию, позволяет рассчитывать моданы с реальным числом отсчетов, не прибегая к использованию высокопроизводительных вычислительных систем. Используя предлагаемый подход, нетрудно рассчитать элемент, формирующий любую обобщенную моду Гаусса-Лагерра с числом отсчетом 10000×10000 и более, на обычном персональном компьютере.

Результаты моделирования прохождения сформированной моды через Фурье-каскад подтверждает высокое качество формирования квазиодномодового пучка. Результаты натуральных испытаний моданов Гаусса-Эрмита [4], рассчитанных процедурой [3] дают основание полагать, что элементы, рассчитанные с помощью предлагаемой в данной статье процедурой, могут быть успешно реализованы, например, методом многоуровневого литографического травления резиста, нанесенного на подложку из кварцевого стекла. Кроме того, может быть использована технология [11] синтеза радиально-симметричных ДОЭ. В заключение отметим, что развитие методов расчета элементов, формирующих заданное модовое распределение, позволяет эффективно решать не только задачи, связанные с уплотнением каналов связи в оптических телекоммуникационных системах. Элементы формирующие радиально-симметричные моды, рассмотренные в данной статье, могут найти применение для создания высокочувствительных акустооптических преобразователей, основанных на использовании свойств распространения мод в волокне с параболическим профилем показателя преломления [1].

В [1] на результатах натурального эксперимента показано, что оптоволоконные датчики, основанные на селективном возбуждении мод Гаусса-Лагерра (1,0) или (2,0) в волокне, в 4-8 раз чувствительнее, чем у традиционных оптоволоконных датчиков, основанных на измерении полной энергии света, прошедшего через деформированное оптоволокно.

Литература

1. Soifer V.A., Golub M.A., Laser Beam Mode Selection by Computer Generated Holograms, CRC Press, 1994.
2. V.V. Kotlyar, I.V. Nikolsky, V.A. Soifer An algorithm for calculating multichannel formers of Gaussian modes.// *Optik* V. 98, No. 1, (1994) P. 26-30
3. Голуб М.А., Павельев В.С., Соифер В.А. Построение итерационного алгоритма расчета фазовых дифракционных элементов, формирующих заданное одномодовое распределение на основе применения метода обобщенных проекций// *Компьютерная оптика*. - М.: МЦНТИ, 1995.- Вып.14-15.- ч.2 - С.85-93.
4. Duparre, M.; Pavelyev, V.; Luedge, B.; Kley, B.; Kowarschik, R.; Soifer, V. "Forming of selected unimodal complex amplitude distributions by means of novel DOEs of MODAN-type"// *Proceedings SPIE* 3134, P. 357 - 368
5. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Fast Hankel transform for focusator synthesis// *Optik*, v.88, No.4, P.182-184 (1991)
6. Born M., Wolf E., Principles of Optics, Pergamon Press, Oxford, 1970.
7. Fienup J.R. Phase retrieval algorithms: a comparison// *Applied optics*.- 1982.-Vol. 21, N 15-P. 2758-2769.
8. Korn G.A., Korn T.A. Mathematical Handbook , McGraw-Hill Book Company, 1968
9. Soifer V.A., Doskolovich L.L., Kazanskiy N.L., Pavelyev V.S. A hybrid method for calculating DOEs focusing into radial focal domain // *Proceedings SPIE*. 9th Meeting on Optical Engineering in Israel.- Vol.2426.- P. 358-365.
10. Yariv A., Optical electronics, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1985.
11. V.P. Koronkevich, V.P. Kiryanov, V.P. Korol'kov, A.G. Poleshchuk, V.V. Cherkashin, E.G. Churin, A.A. Kharissov Fabrication of diffractive optical elements by direct writing with circular scanning// *Proceedings SPIE*. 2363 (1995) P. 290-297.
12. A. W. Snyder, J.D. Love. Optical waveguide theory. Chapman and Hall. 1984
13. Solimeno S., Crosignani B., Di Porto P., Guiding, diffraction and confinement of optical radiation, Academic Press, Inc., 1986.

Fast iterative calculation of phase shapers of Laguerre-Gaussian modes

V.S. Pavelyev, S.N. Khonina
Image Processing Systems Institute of RAS

Abstract

The paper proposes a highly efficient iterative procedure for the design of diffractive optical elements (DOEs) to form generalized Laguerre-Gaussian modes from an illuminating Gaussian beam. The iterative procedure is based on dividing the observation plane into “useful” and “auxiliary” radial areas. The application of a fast procedure for calculating the Hankel transform allows to design elements with a real number of counts without using high-performance computing technology. Based on the results of a computational experiment, it is shown that the proposed approach allows to design elements that form a given single-mode distribution with higher energy efficiency as compared to the existing analogs calculated analytically. The paper discusses the possible applications and appropriate production technologies for the elements designed using the proposed procedure.

Citation: Pavelyev VS, Khonina SN. Fast iterative calculation of phase shapers of Laguerre-Gaussian modes. *Computer Optics* 1997; 17: 15-20.

References

- [1] Soifer V.A., Golub M.A., *Laser Beam Mode Selection by Computer Generated Holograms*, CRC Press, 1994.
- [2] V.V. Kotlyar, I.V. Nikolsky, V.A. Soifer An algorithm for calculating multichannel formers of Gaussian modes.// *Optik* V. 98, No. 1, (1994) P. 26-30
- [3] Golub MA, Pavelyev VS, Soifer VA. Development of and iterative algorithm for calculating phase diffractive elements forming a single-mode distribution specified on the basis of application of the generalized projections method. *Computer Optics* 1995; 14-15(2): 85-93.
- [4] Duparre, M.; Pavelyev, V.; Luedge, B.; Kley, B.; Kowarschik, R.; Soifer, V. "Forming of selected unimodal complex amplitude distributions by means of novel DOEs of MODAN-type"// *Proceedings SPIE* 3134, P. 357 - 368
- [5] Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Fast Hankel transform for focusator synthesis// *Optik*, v.88, No.4, P.182-184 (1991)
- [6] Born M., Wolf E., *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford, 1970.
- [7] Fienup J.R. Phase retrieval algorithms: a comparison// *Applied optics*.- 1982.-Vol. 21, N 15-P. 2758-2769.
- [8] Korn G.A., Korn T.A. *Mathematical Handbook*, McGraw-Hill Book Company, 1968
- [9] Soifer V.A., Doskolovich L.L., Kazanskiy N.L., Pavelyev V.S. A hybrid method for calculating DOEs focusing into radial focal domain // *Proceedings SPIE. 9th Meeting on Optical Engineering in Israel*.- Vol.2426.- P. 358-365.
- [10] Yariv A., *Optical electronics*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1985.
- [11] V.P. Koronkevich, V.P. Kiryanov, V.P. Korol'kov, A.G. Poleshchuk, V.V. Cherkashin, E.G. Churin, A.A. Kharissov Fabrication of diffractive optical elements by direct writing with circular scanning// *Proceedings SPIE. 2363* (1995) P. 290-297.
- [12] A. W. Snyder, J.D. Love. *Optical waveguide theory*. Chapman and Hall. 1984
- [13] Solimeno S., Crosignani B., Di Porto P., *Guiding, diffraction and confinement of optical radiation*, Academic Press, Inc., 1986.