

МЕТОДЫ И ЭЛЕМЕНТЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ ОПТИКИ

РАСЧЕТ ДИФРАКЦИОННЫХ ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАЗДЕЛЕНИЯ И ФОКУСИРОВКИ ИЗЛУЧЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ДЛИН ВОЛН.

Л.Л. Досколович

Институт систем обработки изображений РАН

1. Введение

Расчету дифракционных оптических элементов (ДОЭ) для преобразования волновых фронтов и фокусировки когерентного излучения в заданную область посвящено большое количество работ [1-3]. Как правило, расчет микрорельефа ДОЭ производится для одной определенной длины волны. Для работы с различными спектральными компонентами известны цветоделительные фазовые дифракционные решетки (color separation gratings), позволяющие разделить три различные спектральные компоненты освещающего пучка по -1, 0 и 1 дифракционным порядкам [4-6].

В данной статье предлагается метод расчета 'спектральных' фазовых ДОЭ, обобщающих цветоделительные решетки. Предлагаемые ДОЭ позволяют: 1) сфокусировать три различных спектральных компонента освещающего пучка в три одинаковые фокальные области, 2) при изменении длины волны изменять конфигурацию области фокусировки для трех различных длин волн.

2. Цветоделительные решетки

Для описания работы 'спектральных' ДОЭ предварительно рассмотрим принцип работы цветоделительных фазовых дифракционных решеток.

Решетка, позволяющая разделить три спектральные компоненты, соответствующие длинам волн

$$\lambda_0, \lambda_{-1} = \frac{\lambda_0 N}{(N+1)}, \lambda_{+1} = \frac{\lambda_0 N}{(N-1)} \quad (1)$$

по 0, +1 и -1 дифракционным порядкам имеет на периоде N ступенек равной ширины [3-6]. Высота ступенек определяется по формуле

$$d_i = \frac{\lambda_0 \cdot i}{(n_0 - 1)}, i = 0, N-1 \quad (2)$$

где n_0 - показатель преломления материала решетки для длины волны λ_0 .

Пренебрегая дисперсией материала решетки [4-6] получим, что решетка (2) для плоских пучков с длинами волн (1) формирует следующие фазовые набег:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 2\pi \cdot i, \\ \varphi_{-1} &= 2\pi \cdot i \frac{\lambda_0}{\lambda_{-1}} = 2\pi \cdot i - \frac{2\pi \cdot i}{N}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\varphi_{+1} = 2\pi \cdot i \frac{\lambda_0}{\lambda_{+1}} = 2\pi \cdot i + \frac{2\pi \cdot i}{N}$$

С учетом 2π -периодичности фазы, представим распределения фазы (3) в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 0, \varphi_{-1} = -\frac{2\pi \cdot i}{N}, \\ \varphi_{+1} &= \frac{2\pi \cdot i}{N}, i = 0, N-1 \end{aligned} \quad (4)$$

Согласно (4), для длины волны λ_0 фазовый набег равен нулю и, следовательно, данная спектральная компонента дифрагирует в нулевой порядок. Для длин волн λ_{+1} и λ_{-1} фазовые набег (4) соот-

ветствуют N -ступенчатой аппроксимации линейных фазовых функций, обеспечивающих фокусировку в порядках -1 и +1 соответственно. Доля энергии данных спектральных компонент, фокусируемая в порядках 1 и -1, соответствует эффективности N -уровневой линейной решетки;

$$E(N) = \text{Sinc}^2(\pi / N). \quad (5)$$

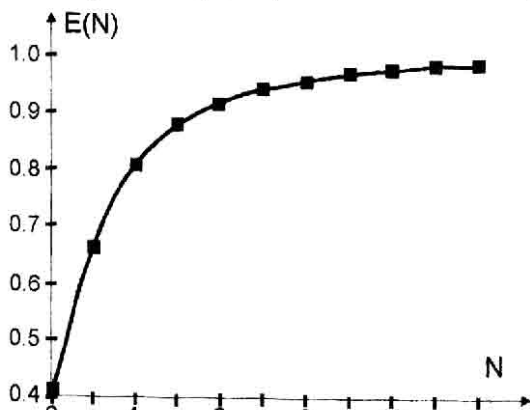


Рис. 1. Энергетическая эффективность линейной решетки, квантованной по N уровням

График функции $E(N)$ приведен на рис.1. Например, при $N=4$ решетка (2) направляет 100% энергии спектральной компоненты λ_0 в нулевой порядок и 81% энергии спектральных компонент $\lambda_{+1}=0.8\lambda_0$ и $\lambda_{-1}=1.33\lambda_0$ в порядки +1 и -1.

3. Спектральные ДОЭ для фокусировки в набор одинаковых фокальных областей

Использование комбинации цветоделительная решетка - линза позволяет сфокусировать три спектральных компонента в три точки в фокальной плоскости линзы. Рассмотрим расчет спектрального ДОЭ - фазового ДОЭ, выполняющего разделение и фокусировку трех спектральных компонент (1) в три одинаковых фокальных области заданной формы, расположенных в одной или различных плоскостях

вдоль оптической оси (рис.2). Микрорельеф спектрального ДОЭ предлагается определить в виде:

$$H(\mathbf{u}) = \frac{\lambda_0}{2\pi \cdot (n_0 - 1)} \Phi(\mathbf{u}; \lambda_0) = \frac{\lambda_0}{2\pi(n_0 - 1)} [\varphi(\mathbf{u}) + G(\hat{\varphi}(\mathbf{u}))] \quad (6)$$

где $\varphi(\mathbf{u}) \in [0, 2\pi)$ - фазовая функция, рассчитанная из условия фокусировки плоского монохроматического пучка с длиной волны λ_0 в область D в плоскости $z=f$. Для удобства дальнейших выкладок выделим из функции $\varphi(\mathbf{u})$ фазовую функцию линзы в явном виде

$$\varphi(\mathbf{u}) = \text{mod}_{2\pi} \left(-\frac{\pi \cdot \mathbf{u}^2}{\lambda_0 f} + \varphi_D(\mathbf{u}) \right) \quad (7)$$

где добавка к линзе $\varphi_D(\mathbf{u})$ обеспечивает фокусировку сходящегося сферического пучка с фокусом f в область D при $z=f$.

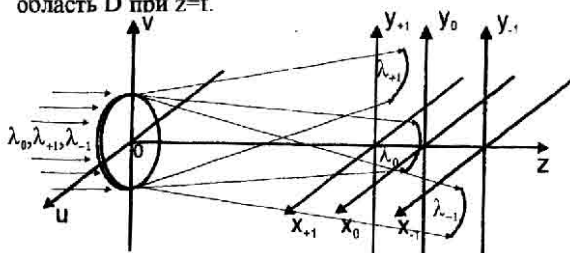


Рис. 2. Геометрия фокусировки спектральных компонент(1) в набор областей

Функция G в (6) описывает нелинейное преобразование фазы

$$\hat{\varphi}(\mathbf{u}) = \text{mod}_{2\pi} \left(-\frac{1}{N} \varphi(\mathbf{u}) + \varphi_{pr}(\mathbf{u}) + \varphi_l(\mathbf{u}) \right) \quad (8)$$

по закону фазового набега цветоделительной решетки для длины волны λ_0 ;

$$G(\xi) = 2\pi \cdot \text{int} \left[\frac{\xi}{N} \right], \xi \in [0, 2\pi) \quad (9)$$

Функции

$$\varphi_{pr}(\mathbf{u}) = \frac{2\pi}{\lambda_0 f} \mathbf{x}_0 \mathbf{u}, \varphi_l(\mathbf{u}) = -\frac{\pi}{\lambda_0 f_l} \mathbf{u}^2 \quad (10)$$

в (8) соответствуют фазовым функциям линзы и призмы и предназначены для разделения областей фокусировки для различных спектральных компонент.

Отметим, что функция $\Phi(\mathbf{u}; \lambda_0)$ в (6) соответствует фазовому набегу, формируемому спектральным ДОЭ для длины волны λ_0 . При этом для пучка с длиной волны $\lambda \neq \lambda_0$, фазовый набег имеет вид:

$$\Phi(\mathbf{u}; \lambda) = \frac{\lambda_0}{\lambda} \Phi(\mathbf{u}; \lambda_0) \quad (11)$$

Проведем анализ работы спектрального ДОЭ (6)-(10) для освещающего пучка, состоящего из трех

некогерентных между собой плоских пучков с длинами волн (1). Для описания связи распределения интенсивности поля с фазовым набегом $\Phi(\mathbf{u}; \lambda)$ будем использовать интеграл Кирхгофа в приближении Френеля:

$$I(\mathbf{x}; z, \lambda) = \left| \frac{1}{\lambda z} \int \exp(i \frac{\lambda_0}{\lambda} \Phi(\mathbf{u}; \lambda_0)) \times \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda z} (\mathbf{x} - \mathbf{u})^2\right) d^2 \mathbf{u} \right|^2 \quad (12)$$

При $\lambda = \lambda_0$ фазовый набег, вносимый спектральным ДОЭ, соответствует фазовой функции $\varphi(\mathbf{u})$, что обеспечивает фокусировку в область D в плоскости $z=f$.

Для пучков с длинами волн λ_{+1} и λ_{-1} фазовые набег, с учетом 2π -периодичности фазы, описываются функциями;

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{u}; \lambda_{+1}) &= \frac{N+1}{N} (\varphi(\mathbf{u}) + G(\hat{\varphi}(\mathbf{u}))) = \\ &= \frac{N+1}{N} \varphi(\mathbf{u}) + F_N(\hat{\varphi}(\mathbf{u})), \\ \Phi(\mathbf{u}; \lambda_{-1}) &= \frac{N-1}{N} (\varphi(\mathbf{u}) + G(\hat{\varphi}(\mathbf{u}))) = \\ &= \frac{N-1}{N} \varphi(\mathbf{u}) - F_N(\hat{\varphi}(\mathbf{u})) \end{aligned} \quad (13)$$

Функция

$$F_N(\xi) = \frac{2\pi}{N} \text{int} \left(\frac{\xi N}{2\pi} \right) \quad (14)$$

в (13) описывает квантование фазы по N уровням. Нелинейная операция квантования $F(\hat{\varphi}(\mathbf{u}))$ в (13) приводит к появлению дополнительных дифракционных порядков [7-8]. Проанализируем работу спектрального ДОЭ при длине волны λ_{+1} . Для этого разложим комплексную амплитуду поля $w(\mathbf{u}; \lambda_{+1}) = \exp(i\Phi(\mathbf{u}; \lambda_{+1}))$ непосредственно за плоскостью ДОЭ в ряд по дифракционным порядкам [7-11]:

$$\begin{aligned} \exp(i\Phi(\mathbf{u}; \lambda_{+1})) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \exp\left(i \frac{N+1}{N} \varphi(\mathbf{u}) + \right. \\ &\left. + \text{int} \left(-\frac{1}{N} \varphi(\mathbf{u}) + \varphi_{pr}(\mathbf{u}) + \varphi_l(\mathbf{u}) \right) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$c_n = \begin{cases} (-1)^{(n-1) \cdot N} \text{Sinc} \left(\frac{\pi n}{N} \right) \exp\left(i \frac{-\pi}{N}\right), \\ n = 1 + pN, p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0, n \neq 1 + pN \end{cases} \quad (16)$$

коэффициенты Фурье в разложении функции $\exp(iF_N(\xi))$.

Согласно (15), в первом порядке дифракции (при $n=1$ в (15)) формируется пучок с фазовой функцией

$$\Phi_{+1}(\mathbf{u}; \lambda_{+1}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi_{pr}(\mathbf{u}) + \varphi_1(\mathbf{u}) \quad (17)$$

Для оценки структуры поля, формируемого пучком с фазовым фронтом $\Phi_{+1}(\mathbf{u}; \lambda_{+1})$, подставим фазовую функцию (17) в интеграл Кирхгофа-Френеля (12). Проводя несложные преобразования, представим распределение интенсивности, формируемое в первом дифракционном порядке при

$$z = z_{+1} = \frac{N+1}{N} \frac{f \cdot f_1}{f + f_1} \quad (18)$$

в виде:

$$I(\mathbf{x}; z, \lambda_{+1}) = \left| \frac{1}{\lambda_{+1} z_{+1}} \int_G \exp(i\varphi_D(\mathbf{u}) - \varphi_{pr}(\mathbf{u})) \times \right. \\ \left. \times \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda_{+1} z_{+1}} \mathbf{xu}\right) d^2\mathbf{u} \right|^2 = \\ = p_{+1}^2 \cdot I(\mathbf{x} \cdot p_{+1} - \mathbf{x}_0; f, \lambda_0) \quad (19)$$

где

$$I(\mathbf{x}; f, \lambda_0) = \left| \frac{1}{\lambda_0 f} \int_G \exp(i\varphi_D(\mathbf{u})) \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda_0 f} \mathbf{xu}\right) d^2\mathbf{u} \right|^2 \quad (20)$$

- распределение интенсивности при $z=f$, формируемое при фазовом фронте $\varphi_D(\mathbf{u})$ для пучка с длиной волны λ_0 . По определению функции $\varphi_D(\mathbf{u})$, распределение интенсивности (20) соответствует фокусировке в область D. Согласно (19), (20) распределение интенсивности, формируемое спектральным ДОЭ в первом порядке при длине волны λ_{+1} , соответствует фокусировке в смещенную на вектор \mathbf{x}_0 область D в плоскости $z = z_{+1}$. Масштабный множитель

$$p_{+1} = 1 + \frac{f}{f_1} \quad (21)$$

в (19) описывает изменение физического размера области D, вызванное уменьшением размера дифракционного пятна

$$\Delta(z_{+1}, \lambda_{+1}) = \Delta(z_{+1}, \lambda_{+1}) / p_{+1} = \frac{1}{p_{+1}} (\lambda_0 f / a), \quad (22)$$

где a - характерный размер апертуры ДОЭ.

Доля энергии E спектральной компоненты λ_{+1} , фокусируемая в порядке +1 соответствует квадрату модуля коэффициента Фурье c_1 (см.(5)) и при $N \gg 3$ составляет более 80%.

Повторя приведенные рассуждения для пучка с длиной волны λ_{-1} получим, что фазовый фронт, формируемый ДОЭ (6)-(10) в основном -1 порядке дифракции соответствует фокусировке при

$$z = z_{-1} = \frac{N-1}{N} \frac{f \cdot f_1}{f_1 - f} \quad (23)$$

в смещенную на вектор $-\mathbf{x}_0$ область D. При этом изменение физического размера области D описывается множителем

$$p_{-1} = 1 - \frac{f}{f_1} \quad (24)$$

Параметр f_1 в (10), (18), (23) позволяет варьировать положением плоскостей фокусировки. В частности, полагая $f_1 = Nf$ в (18), (23), получим что $z_{+1} = z_{-1} = f$. В этом случае спектральный ДОЭ фокусирует спектральные компоненты (1) в три, разнесенные на вектор \mathbf{x}_0 области D в одной плоскости при $z=f$.

В заключение отметим, что для уменьшения частоты микрорельефа целесообразно рассчитывать спектральный ДОЭ как дополнение к тонкой линзе с фокусом f. В этом случае вместо функции $\varphi(\mathbf{u})$ в (6) следует использовать функцию $\varphi_D(\mathbf{u})$, рассчитанную на фокусировку сходящегося сферического пучка с фокусом f в область D при $z=f$.

4. Спектральные ДОЭ для фокусировки в различные фокальные области

Рассмотренный в пункте 3 метод расчета позволяет разделить и сфокусировать спектральные компоненты (1) в три области одинаковой формы в одной заданной плоскости или в трех различных плоскостях вдоль оптической оси. Рассмотрим расчет спектральных ДОЭ, позволяющих при изменении длины волны по закону (1), изменять конфигурацию фокальной области.

Длины волн в (1) и фазовые набеги (4) для цветоделительной решетки (2) не являются независимыми между собой. Поэтому в общем случае метод расчета (6)-(10) может быть модифицирован на случай фокусировки двух различных длин волн из (1) в две различные области D_0 и D_1 . Обозначим $\varphi(\mathbf{u}), \varphi_1(\mathbf{u})$ - фазовые функции для фокусировки пучков с длинами волн λ_0, λ_{+1} в области D_0 и D_1 . Переопределим функцию $\hat{\varphi}(\mathbf{u})$ в общем выражении для структуры микрорельефа спектрального ДОЭ (6) в виде:

$$\hat{\varphi}(\mathbf{u}) = \text{mod}_{2\pi} \left(-\frac{N+1}{N} \varphi(\mathbf{u}) + \varphi_1(\mathbf{u}) \right) \quad (25)$$

При $\hat{\varphi}(\mathbf{u})$ (25), спектральный ДОЭ для пучков с длинами волн λ_0 и λ_{+1} формирует в 0 и +1 порядках дифракции пучки с фазовыми функциями

$$\Phi_0(\mathbf{u}; \lambda_0) = \varphi(\mathbf{u}), \quad (26)$$

$$\Phi_{+1}(\mathbf{u}; \lambda_{+1}) = \varphi_1(\mathbf{u}), \quad (27)$$

что обеспечивает фокусировку в области D_0 и D_1 , соответственно.

При использовании длины волны λ_{-1} ДОЭ (6), (17), (8) формирует в основном -1 порядке пучок с фазовой функцией

$$\Phi_{-1}(\mathbf{u}; \lambda_{-1}) = 2\varphi(\mathbf{u}) - \varphi_1(\mathbf{u}) \quad (28)$$

В случае произвольных фазовых функций $\varphi(\mathbf{u})$ и $\varphi_1(\mathbf{u})$ структура области, формируемой при $\lambda = \lambda_{-1}$, не определена. Ряд результатов удается получить при использовании в качестве функций $\varphi(\mathbf{u})$, $\varphi_1(\mathbf{u})$ фазовых функций фокусаторов - ДОЭ, рассчитанных в приближении геометрической (лучевой) оптики [3]. Предположим для простоты, что спектральный ДОЭ рассчитывается как добавка к тонкой линзе с фокусом f . В этом случае функции $\varphi_0(\mathbf{u}), \varphi_1(\mathbf{u})$ соответствуют фазовым функциям для фокусировки сходящихся сферических пучков с длинами волн λ_0, λ_{+1} в области D_0 и D_1 при $z=f$. Фокусаторы обладают интересным свойством; при умножении фазы фокусатора, рассчитанного на фокусировку сходящегося сферического пучка, на константу p , происходит p -кратное масштабирование области фокусировки [3].

Рассмотрим два примера выбора функции $\varphi(\mathbf{u})$, $\varphi_1(\mathbf{u})$, позволяющих работать с тремя длинами волн $\lambda_0, \lambda_{+1}, \lambda_{-1}$.

Пример 1.

Пусть $\varphi(\mathbf{u})$ - фазовая функция фокусатора, а $\varphi_1(\mathbf{u})$ - фазовая функция N -порядковой дифракционной решетки. Тогда при $\lambda = \lambda_{-1}$ фазовая функция $2\varphi(\mathbf{u})$ в (28), реализует фокусировку в область $2xD$, а функция $\varphi_1(\mathbf{u})$ - мультипликацию области $2xD$ по N порядкам. В этом случае элемент, соответствующий суперпозиции 'спектральный ДОЭ - тонкая линза', при $\lambda = \lambda_0$ реализует фокусировку в область D , при $\lambda = \lambda_{+1}$ - в набор из N точек, а при $\lambda = \lambda_{-1}$ - в набор из N областей с размером $2D$.

Пример 2.

Пусть $\varphi(\mathbf{u})$, $\varphi_1(\mathbf{u})$ - фазовые функций фокусаторов пучков прямоугольного сечения в отрезки $|x| \leq d, y = 0$ и $|y| \leq d_1, x = 0$. Тогда при $\lambda = \lambda_{-1}$ распределение фазовая функция (28) соответствует фокусировке в прямоугольник с размерами $(4d) \times (2d_1)$ [9]. При указанном выборе функций $\varphi(\mathbf{u})$, $\varphi_1(\mathbf{u})$ спектральный ДОЭ при $\lambda = \lambda_0$ реализует фокусировку в отрезок оси Ox , при $\lambda = \lambda_{+1}$ - в отрезок оси Oy , а при $\lambda = \lambda_{-1}$ - в прямоугольник.

5. Аспекты расчета квантованных спектральных ДОЭ

Технология фотолитографии, традиционно используемая для изготовления ДОЭ, предусматривает квантование дифракционного микрорельефа по M уровням. Микрорельеф спектрального ДОЭ (6) содержит компоненту, соответствующую функции $\varphi(\mathbf{u})$ и N -уровневую ступенчатую функцию $G(\varphi(\mathbf{u}))$. При квантованной по L уровням функции $\varphi(\mathbf{u})$ микрорельеф (6) становится квантованным по $M = N \times L$ уровням.

Операция квантования приводит к снижению эффективности фокусировки и появлению дополнительных дифракционных порядков, снижающих качество формируемых изображений. Для компенсации погрешностей квантования на этапе расчета спектрального ДОЭ, функцию $\varphi(\mathbf{u})$ в (6) для фокусировки пучка с длиной волны λ_0 целесообразно рассчитывать на основе итерационных алгоритмов расчета квантованных фазовых функций [10-12]. Алгоритмы [10-12] основаны на оптимизации непрерывной функции, являющейся отрезком ряда разложения по дифракционным порядкам квантованной функции комплексного пропускания.

Спектральный ДОЭ для пучков с длинами волн $\lambda_{\pm 1}$ формирует требуемые изображения только в основных $+1$ и -1 дифракционных порядках. Изображения в 'паразитных' порядках при $n \neq \pm 1$ в общем случае портят требуемые изображения. Спектральные ДОЭ (6), (25), предназначенные для фокусировки двух длин волн λ_0, λ_{-1} в две различные области D_0 и D_1 , будем называть двухволновыми ДОЭ. Для двухволновых ДОЭ расчет функции $\varphi_1(\mathbf{u})$ в (25) можно также провести с учетом влияния паразитных дифракционных порядков. Действительно, при $\lambda = \lambda_{-1}$ ДОЭ (6), (25) формирует в порядках дифракции пучки с фазовыми функциями

$$\begin{aligned} \Phi_n(\mathbf{u}; \lambda_{-1}) &= \frac{N+1}{N} \varphi(\mathbf{u}) + \\ &+ n \left(-\frac{N+1}{N} \varphi(\mathbf{u}) + \varphi_1(\mathbf{u}) \right), \quad (29) \\ n &= (1 + pN), p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

При $n=1$ ($p=0$) в (29) $\Phi_n(\mathbf{u}; \lambda_{-1}) = \varphi_1(\mathbf{u})$, что обеспечивает в основном первом дифракционном порядке фокусировку в область D_1 . Пусть функция $\varphi(\mathbf{u})$ является квантованной по $(N+1)$ уровням. При этом распределения фазы (29) принимают вид:

$$\begin{aligned} \Phi_n(\mathbf{u}; \lambda_{-1}) &= n \varphi_1(\mathbf{u}), n = (1 + pN), \quad (30) \\ p &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Согласно (30), фазовый набег $\Phi(\mathbf{u}; \lambda_{-1})$ не зависит от фазы $\varphi(\mathbf{u})$ и соответствует квантованной по N уровням функции $\varphi_1(\mathbf{u})$:

$$\Phi(\mathbf{u}; \lambda_{-1}) = F_N(\varphi_1(\mathbf{u})) \quad (31)$$

Таким образом, при квантовании фазы $\varphi(\mathbf{u})$ по $N+1$ уровням расчет двухволнового ДОЭ сводится к двум независимым задачам расчета квантованных фазовых функций $F_{N+1}(\varphi(\mathbf{u}))$ и $F_N(\varphi_1(\mathbf{u}))$ из условия фокусировки пучков с длинами волн λ_0, λ_{-1} в области D_0 и D_1 соответственно. При этом число уровней квантования рельефа двухволнового ДОЭ равно $M = N \cdot (N + 1)$. Интересно отметить, что рельеф двухволнового ДОЭ (6), (25) можно определить непосредственно через дискретные значения

$$\varphi(i) = \frac{2\pi}{N+1} i, i = 0, N,$$

$$\varphi_1(j) = \frac{2\pi}{N} j, j = 0, N-1,$$

принимаемые квантованными функциями $F_{N+1}(\varphi(\mathbf{u}))$, $F_N(\varphi_1(\mathbf{u}))$. Действительно, подставляя в (25) и (6) вместо функций $\varphi(\mathbf{u})$, $\varphi_1(\mathbf{u})$ функции $\varphi(i)$, $\varphi_1(j)$, получим дискретные аналоги функций $\hat{\varphi}(\mathbf{u})$, $G(\hat{\varphi}(\mathbf{u}))$ в виде:

$$\hat{\varphi}(i, j) = \text{mod}_{2\pi} \left(\frac{2\pi}{N} (j - i) \right) \quad (32)$$

$$G(i, j) = 2\pi \cdot \text{mod}_N (j - i) \quad (33)$$

Выражения (32), (33) позволяют представить высоту рельефа двухволнового ДОЭ в каждой точке \mathbf{u} апертуры через индексы (i, j) , соответствующие значениям квантованных функций $F_{N+1}(\varphi(\mathbf{u}))$, $F_N(\varphi_1(\mathbf{u}))$, в виде:

$$H(i, j) = \frac{\lambda_0}{2\pi(n_0 - 1)} \times \left[\frac{2\pi}{N+1} i + 2\pi \cdot \text{mod}_N (j - i) \right], \quad (34)$$

$$i = \overline{0, N}, j = \overline{0, N-1}$$

Число уровней $M = N \cdot (N + 1)$ микрорельефа (34) можно уменьшить. Пусть d_1, d_2 наибольшие делители чисел $N, N+1$; такие что $N = p_1 d_1, p_1 > 1, N+1 = p_2 d_2, p_2 > 1$. В этом случае, из квантованных функций $F_{p_2}(\varphi(\mathbf{u}))$ и $F_{p_1}(\varphi_1(\mathbf{u}))$, рассчитанных из условия фокусировки пучков с длинами волн λ_0, λ_{+1} в области D_0 и D_1 , можно построить двухволновый ДОЭ с числом уровней рельефа $M = p_1 p_2$ по правилу:

$$H(i, j) = \frac{\lambda_0}{2\pi(n_0 - 1)} \times \left[\frac{2\pi}{p_2} i + 2\pi \cdot \text{mod}_N (d_1 j - d_2 i) \right], \quad (35)$$

$$i = \overline{0, p_2 - 1}, j = \overline{0, p_1 - 1}$$

ДОЭ (35) при $\lambda = \lambda_0$ формирует фазовый набег, соответствующий отсчетам фазовой функции $F_{p_2}(\varphi(\mathbf{u}))$, что обеспечивает фокусировку в область D .

При $\lambda = \lambda_{+1}$ фазовый набег, формируемый ДОЭ (35), имеет вид

$$\Phi(i, j; \lambda_{+1}) = 2\pi \frac{N+1}{N} \left[\frac{i}{p_2} + \text{mod}_N (d_1 j - d_2 i) \right] =$$

$$= \frac{2\pi}{p_1} j + 2\pi \cdot \text{mod}_{N+1} (d_1 j - d_2 i), \quad (36)$$

$$i = \overline{0, p_2 - 1}, j = \overline{0, p_1 - 1}.$$

Функция $\Phi(i, j; \lambda_{+1})$ с учетом 2π -периодичности имеет вид

$$\Phi(i, j; \lambda_{+1}) = \frac{2\pi}{p_1} j, j = \overline{0, p_1 - 1} \quad (37)$$

и соответствует отсчетам фазы $F_{p_2}(\varphi(\mathbf{u}))$, что обеспечивает фокусировку пучка с длиной волны λ_{+1} в область D_1 .

Отметим, что поскольку одно из чисел $N, N+1$ является четным, то число уровней рельефа двухволнового ДОЭ всегда может быть уменьшено, по крайней мере, до $N(N+1)/2$ значений.

Расчет квантованных двухволновых ДОЭ для фокусировки в области D_0 и D_1 можно провести не только для длин волн λ_0, λ_{+1} из (1), а также для двух длин λ_0, λ_1 , связанных существенно более общим соотношением

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{M}{N} \quad (38)$$

где M и N - взаимнопростые числа.

Формула (34) подсказывает строить двухволновый ДОЭ из квантованных по M и N уровням функций $F_M(\varphi(\mathbf{u}))$ и $F_N(\varphi_1(\mathbf{u}))$. Определим рельеф двухволнового ДОЭ через значения квантованных функций $F_M(\varphi(\mathbf{u}))$ и $F_N(\varphi_1(\mathbf{u}))$ в виде:

$$H(i, j) = \frac{\lambda_0}{2\pi(n_0 - 1)} \left[\frac{2\pi}{M} i + 2\pi \cdot M_0(i, j) \right], \quad (39)$$

$$i = \overline{0, M-1}, j = \overline{0, N-1}$$

где $M_0(i, j)$ - некоторая неизвестная функция, принимающая целочисленные положительные значения. ДОЭ (39) при $\lambda = \lambda_0$ формирует фазовый набег

$$\Phi(i, j; \lambda) = \frac{2\pi i}{M} + 2\pi M_0(i, j), \quad (40)$$

$$i = \overline{0, M-1}, j = \overline{0, N-1}$$

соответствующий с учетом 2π -периодичности фазы отсчетам фазовой функции $F_M(\varphi(\mathbf{u}))$. Это обеспечивает при $\lambda = \lambda_0$ фокусировку в область D . При $\lambda = \lambda_1$ фазовый набег, формируемый ДОЭ (39), имеет вид

$$\Phi(i, j; \lambda_{+1}) = 2\pi \frac{M}{N} \left[\frac{i}{M} + M_0(i, j) \right], \quad (41)$$

$$i = \overline{0, M-1}, j = \overline{0, N-1}.$$

Для фокусировки пучка с длиной волны λ_1 в область D_1 , функция $M_0(i, j)$ в (39) должна выбираться из условия равенства по модулю 2π выражения (41)

отсчетом квантованной функции $F_N(\varphi_1(\mathbf{u}))$. В результате для расчета функции $M_0(i, j)$ получим уравнение

$$2\pi \frac{M}{N} \left[\frac{i}{M} + M_0(i, j) \right] = 2\pi \left[\frac{j}{N} + M_1(i, j) \right],$$

$$i = \overline{0, M-1}, j = \overline{0, N-1}. \quad (42)$$

где $M_1(i, j)$ – произвольная функция, принимающая целочисленные значения.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решение уравнения (42) имеет вид:

$$\begin{cases} M_0(i, j) = \pm \alpha_1(j - i) + Nz \\ M_1(i, j) = \pm \alpha_2(j - i) + Mz \end{cases} \quad (43)$$

$$i = \overline{0, M-1}, j = \overline{0, N-1}$$

где α_1, α_2 – целые числа, определяемые из решения уравнения

$$M \cdot \alpha_1 - N \cdot \alpha_2 = \pm 1, \quad (44)$$

а z – наименьшее целое число, выбираемое из условия неотрицательности функции $M_0(i, j)$. Отметим, что поскольку числа M и N предполагаются взаимнопростыми, то уравнение (44) всегда имеет решение в целых числах по теореме о наибольшем общем делителе.

Согласно определению z , уравнение (43) может быть записано в виде:

$$\begin{cases} M_0(i, j) = \text{mod}_N(\pm \alpha_1(j - i)) \\ M_1(i, j) = \text{mod}_M(\pm \alpha_2(j - i)) \end{cases} \quad (45)$$

$$i = \overline{0, M-1}, j = \overline{0, N-1}$$

При этом формула для микрорельефа двухволнового ДОЭ принимает вид:

$$H(i, j) = \frac{\lambda_0}{2\pi(n_0 - 1)} \left[\frac{2\pi}{M} i + 2\pi \cdot \text{mod}_N(\pm \alpha_1(j - i)) \right],$$

$$i = \overline{0, M-1}, j = \overline{0, N-1} \quad (46)$$

Сравнение уравнений (35) и (46) показывает, что использование более общего соотношения (38) для длин λ_0, λ_1 не приводит к увеличению высоты микрорельефа ДОЭ (46) по сравнению с ранее рассчитанным ДОЭ (35). Следует также отметить, что при $N=p_1d_1, p_1>1, M=p_2d_2, p_2>1$ число уровней $L=NM$ микрорельефа (46) можно уменьшить до p_1p_2 значений.

Из формулы (46) несложно получить уравнение для цветоделительной решетки для разделения спектральных компонент (38) по 0 и +1 порядкам. Такая решетка имеет на периоде N ступенек равной ширины с высотой

$$d_i = \frac{\lambda_0}{(n_0 - 1)} \text{mod}_N(\alpha_1 i), \quad i = \overline{0, N-1} \quad (47)$$

где α_1 определяется из решения уравнения (44).

Решетка (47) может быть использована при аналитическом расчете спектральных фокусаторов пучков с длинами волн (38) в области D_0 и D_1 . В этом случае достаточно общим выражением (6) переопределить функции $G(\xi)$ и $\tilde{\varphi}(\mathbf{u})$ в виде:

$$G(\xi) = 2\pi \cdot \text{mod}_N \left(\alpha_1 \cdot \text{int} \left[\frac{\xi}{N} \right] \right), \quad \xi \in [0, 2\pi) \quad (48)$$

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{u}) = \text{mod}_{2\pi} \left(-\frac{M}{N} \varphi(\mathbf{u}) + \varphi_1(\mathbf{u}) \right) \quad (49)$$

Несложно видеть, что спектральный ДОЭ (6), (48), (49) для пучков с длинами волн (38) в 0 и +1 порядках дифракции формирует пучки с фазовыми функциями $\varphi(\mathbf{u}), \varphi_1(\mathbf{u})$, что обеспечивает фокусировку в области D_0 и D_1 соответственно.

6. Результаты расчетов

Для оценки работоспособности предложенного метода приведем ряд примеров расчета спектральных ДОЭ.

Пример 1. Был рассчитан ДОЭ (6)-(10) как дополнение к тонкой линзе с фокусом f для разделения и фокусировки спектральных компонент (1) в три отрезка длины в плоскости $z=f$. В качестве функции $\varphi(\mathbf{u})$ в (6)-(10) использовалась фазовая функция фокусатора сходящегося сферического пучка с фокусом f в отрезок

$$\varphi(u) = \text{mod}_{2\pi} \left(\frac{3\pi d}{\lambda_0 f R^3} \left(R \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{12} \right) \right) \quad (50)$$

где R – радиус апертуры ДОЭ, d – длина отрезка фокусировки.

Расчет спектрального ДОЭ (6)-(10), (50) проводился для следующих параметров: длины волн $\lambda_0=0.525\text{мкм}, \lambda_{-1}=0.393\text{мкм}, \lambda_{+1}=0.656\text{мкм}$ ($N=4$ в (1)), длина отрезков фокусировки $d=30\Delta(\lambda)$, ($\Delta(\lambda)=\lambda f/R$), радиус апертуры ДОЭ $R=2.5\text{мм}$, фокус линзы $f=500\text{мм}$, параметры призмы и линзы в (10) $x_0=(0, 10\Delta(\lambda_0)), f_1=Nf=2000\text{мм}$.

Полутоновое изображение рассчитанного рельефа спектрального ДОЭ приведено на рис.3а. Распределение интенсивности, формируемое спектральным ДОЭ (6)-(10), (50) для освещающего пучка, состоящего из трех некогерентных между собой плоских пучков с указанными выше длинами волн, приведено на рис.3б. Рисунок 3б показывает высокое качество фокусировки в три отрезка. Различные длины и интенсивности отрезков на рис.3б объясняются различным размером дифракционного пятна $\Delta(\lambda)$ для различных длин волн. Левый, центральный и правый отрезок на рис.3б соответствует компонентам $\lambda_{+1}=0.656, \lambda_0=0.525\text{мкм}$ и $\lambda_{-1}=0.393\text{мкм}$, соответственно.

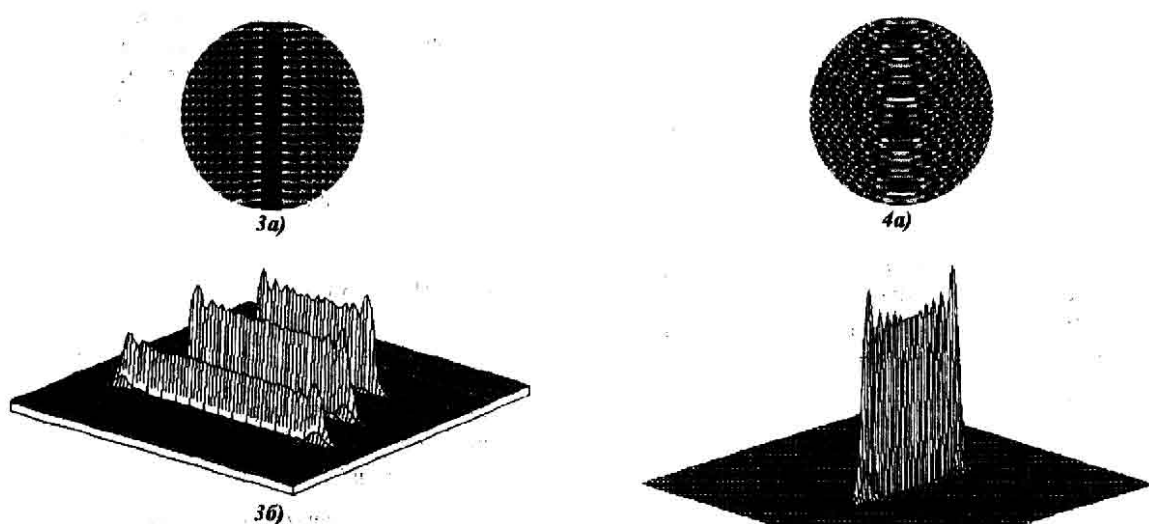


Рис. 3. (а) Полутоновой рельеф спектрального ДОЭ для разделения и фокусировки спектральных компонент $\lambda_0=0.525\text{мкм}$, $\lambda_{+1}=0.393\text{мкм}$, $\lambda_{-1}=0.656\text{ мкм}$ в три отрезка; (б) Распределение интенсивности в плоскости фокусировки

Пример 2. Был рассчитан спектральный ДОЭ (6), (25), позволяющий при изменении длины волны по закону (1), изменять конфигурацию фокальной области. ДОЭ (6), (25) был рассчитан как дополнение к линзе для фокусировки компоненты $\lambda_0=0.525\text{мкм}$ в отрезок длины $20\Delta(\lambda_0)$, компоненты $\lambda_{+1}=0.393\text{мкм}$ - в четыре точки и компоненты $\lambda_{-1}=0.656\text{мкм}$ - в четыре отрезка с длиной $40\Delta(\lambda_{-1})$. В качестве функции $\varphi(\mathbf{u})$ в (6), (25) использовалась фазовая функция (50) фокусатора в отрезок. Для компенсации влияния паразитных дифракционных порядков при фокусировке компонент λ_{+1} , λ_{-1} в фазу (50) была дополнительно введена фазовая функция призмы $\varphi_{pr}(v) = \frac{2\pi}{\lambda_0 f} y_0 v$ при $y_0=2\Delta(\lambda_0)$. В качестве функции $\varphi_1(\mathbf{u})$ в (6), (25) использовалась фазовая функция четырех порядковой дифракционной решетки, имеющей на периоде p ($p=0,3571\text{мм}$) следующий вид.

$$\varphi_1(n) \begin{cases} 0, n \in [0, p/4) \\ \pi, n \in [p/4, p/2) \\ \pi/2, n \in [p/2, 3p/4) \\ 3\pi/4, n \in [3p/4, p) \end{cases} \quad (51)$$

Четырехпорядковая решетка (51) фокусирует 81% энергии освещающего пучка в порядках -2, -1, +1, +2. Полутоновое изображение рассчитанного рельефа спектрального ДОЭ приведено на рис.4а). Распределения интенсивности, формируемое спектральным ДОЭ для плоских пучков с длинами волн $\lambda_0=0.525\text{мкм}$, $\lambda_{+1}=0.393\text{мкм}$ и $\lambda_{-1}=0.656\text{мкм}$ приведены на рис.4б), 4в), 4г) и ясно показывают структуру излучения, сфокусированного в отрезок, четыре точки и четыре отрезка.

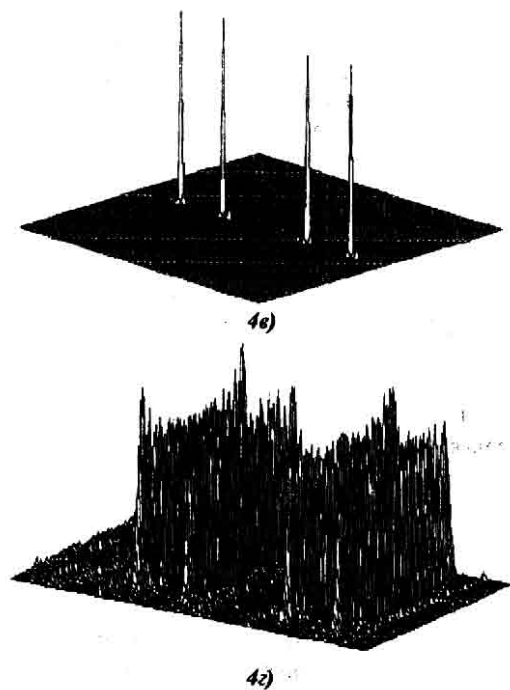


Рис.4. (а) Полутоновой рельеф спектрального ДОЭ для фокусировки спектральных компонент (1) в отрезок, четыре точки и четыре отрезка; (б, в, г) Распределения интенсивности в плоскости фокусировки для $\lambda_0=0.525\text{мкм}$ (б), $\lambda_{+1}=0.393\text{мкм}$ (в), $\lambda_{-1}=0.656\text{мкм}$ (г)

Пример 3. Был рассчитан спектральный ДОЭ (6), (25) с квадратной апертурой $2,5 \times 2,5\text{мм}$ для фокусировки компоненты $\lambda_0=0.525\text{мкм}$ в квадрат $20\Delta(\lambda_0) \times 20\Delta(\lambda_0)$ и компонент $\lambda_{+1}=0.393\text{мкм}$, $\lambda_{-1}=0.656\text{мкм}$ - в отрезки с длинами $40\Delta(\lambda_{+1})$, $40\Delta(\lambda_{-1})$ осей Ox и Oy , соответственно. В качестве функций $\varphi(\mathbf{u})$ и $\varphi_1(\mathbf{u})$ в (6), (25) использовались фазовые функции фокусаторов сходящегося сферического пучка с фокусом f в квадрат размером стороны $K\Delta(\lambda_0)$

$$\varphi(\mathbf{u}) = \text{mod}_{2\pi} \left(\frac{\pi K}{a^2} (u^2 + v^2) \right) \quad (52)$$

и в отрезок оси Ox длины $2K\Delta(\lambda_{-1})$

$$\varphi_1(u) = \frac{2\pi K}{a^2} u^2 \quad (53)$$

где a - размер стороны апертуры ДОЭ.

ДОЭ (6), (25), (52), (53) при длине волны λ_{-1} формирует в основном -1 порядке пучок с фазовой функцией

$$\Phi_{-1}(\mathbf{u}; \lambda_{-1}) = 2\varphi(\mathbf{u}) - \varphi_1(\mathbf{u}) = \frac{2\pi K}{a^2} v^2 \quad (54)$$

Фаза (42) соответствует фазовой функции фокусатора сходящегося сферического пучка в отрезок оси Oy длины $2K\Delta(\lambda_{-1})$.

Полутоновое изображение рельефа спектрального ДОЭ (6), (25), (52), (53) приведено на рис.5а). Распределения интенсивности, формируемое спектральным ДОЭ для пучков с длинами волн $\lambda_0=0.525\text{мкм}$, $\lambda_{-1}=0.393\text{мкм}$ и $\lambda_{-1}=0.656\text{мкм}$ приведены на рис.5б), 5в), 5г) и ясно показывают структуру излучения, сфокусированного в квадрат и отрезки.

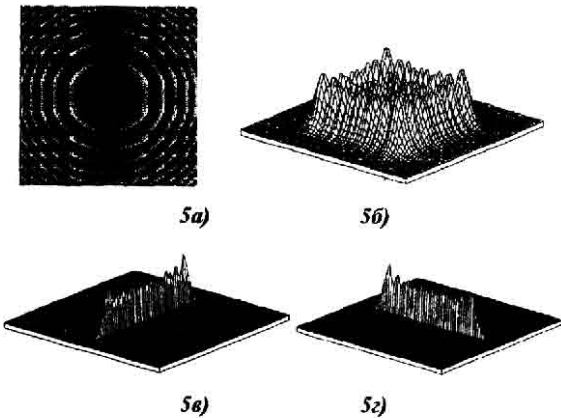


Рис. 5. (а) Полутоновой рельеф спектрального ДОЭ для фокусировки спектральных компонент (1) в квадрат, отрезок оси Ox и отрезок оси Oy ; (б, в, з) Распределения интенсивности в плоскости фокусировки для $\lambda_0=0.525\text{мкм}$ (б), $\lambda_{-1}=0.393\text{мкм}$ (в), $\lambda_{-1}=0.656\text{мкм}$ (з)

Пример 4. Были рассчитаны две квантованные спектральные дифракционные решетки для формирования четырех порядков -2, -1, +1, +2 при длине волны λ_0 и трех порядков -1, 0, +1 при длинах волн $\lambda_{-1}=3\lambda_0/4$ и $\lambda_{+1}=9\lambda_0/4$, соответственно. Расчет квантованных спектральных решеток (период p) проводился по формулам (35) и (46) на основе квантованных фазовых функций четырехпорядковой решетки (51) и трехпорядковой решетки

$$\varphi_1(u) = \begin{cases} 2\pi / 3, u \in [0, p/2] \\ 0, u \in [p/2, p] \end{cases} \quad (55)$$

Значения интенсивностей порядков, соответствующие квадратам модулей коэффициентов Фурье в

разложении функции $\exp(i\varphi(u))$, для решетки (55) равны $I_{-1}=0.304$, $I_0=0.25$, $I_{+1}=0.304$. Следовательно решетка (55) концентрирует 85% энергии в порядках -1, 0, +1.

Рельеф квантованной спектральной решетки (35), (51), (55) для фокусировки компонент λ_0 , $\lambda_{+1}=3\lambda_0/4$ представлен на рис. 6а), а рельеф спектральной решетки (46), (51), (55) для фокусировки компонент λ_0 , $\lambda_{-1}=9\lambda_0/4$ - на рис. 7. Интенсивности дифракционных порядков, формируемых решетками на рис. 6а) и рис. 7 при освещении решеток плоскими пучками с длинами волн λ_0 , $\lambda_{+1}=3\lambda_0/4$ и λ_0 , $\lambda_{-1}=9\lambda_0/4$ совпадают и показаны на рис.6б) и 6в).

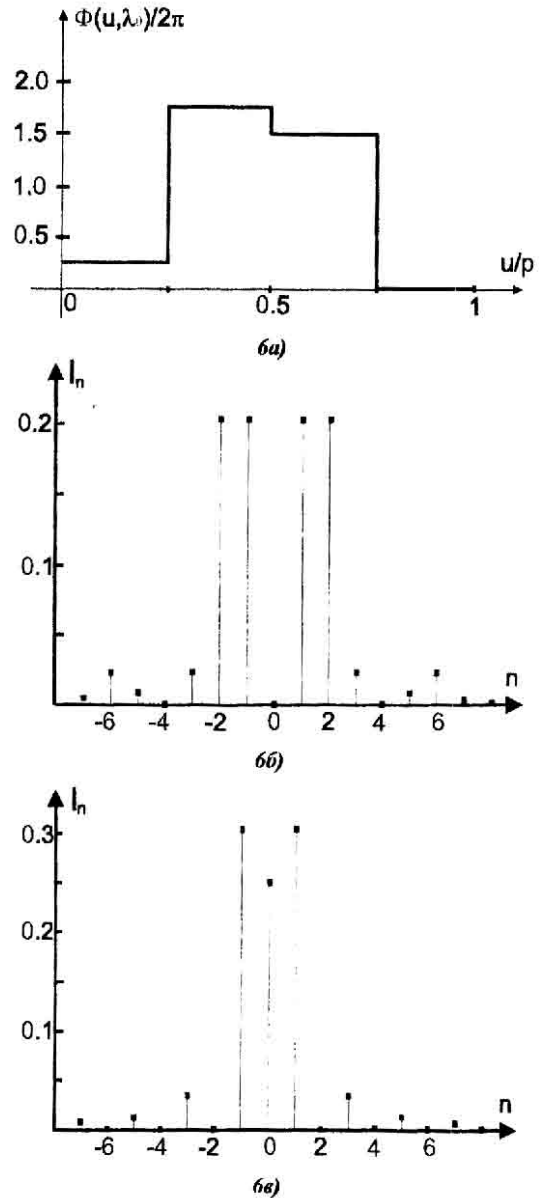


Рис. 6. (а) Фаза на периоде спектральной решетки для формирования четырех порядков (-2, -1, +1, +2) для компоненты λ_0 и трех порядков (-1, 0, +1) для $\lambda_{+1}=3\lambda_0/4$; (б, в) Интенсивности дифракционных порядков решетки для λ_0 (б), λ_{+1} (в)

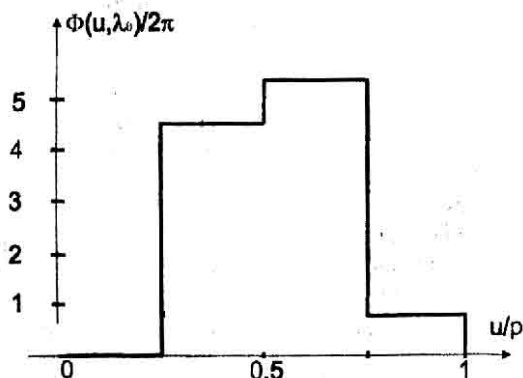


Рис. 7. Фаза на периоде спектральной решетки для формирования четырех порядков $(-2, -1, +1, +2)$ для компоненты λ_0 и трех порядков $(-1, 0, +1)$ для $\lambda_{+1} = 9\lambda_0/4$

Заключение

В данной работе разработан метод расчета спектральных ДОЭ для разделения и фокусировки различных спектральных компоненты в различные фокальные области. Проведен анализ эффектов квантования спектральных ДОЭ и разработана процедура расчета квантованных спектральных ДОЭ. Результаты проведенных численных расчетов (рис. 3-6) демонстрируют высокую работоспособность разработанного метода расчета спектральных ДОЭ.

Благодарность

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96026)

Литература

1. Lee W. H. *Computer-generated holograms: techniques and applications*. Progress in Optics, Ed. Wolf E., North-Holland, Amsterdam, 1978.
2. Bringdal O., Wyrowsky F. *Digital holography - computer-generated holograms*. Progress in Optics, Ed.

Wolf E., v.28, pp.1-86, North-Holland, Amsterdam, 1990.

3. V. Soifer, V. Kotlyar, L. Doskolovich. *Iterative methods for diffractive optical elements computation*. Taylor & Francis, London, p.244, 1997.
4. H. Dammann. *Color separation gratings*. // *Appl. Opt.*, 1978, v.17, N_15, pp. 2273-2279.
5. H. Dammann. *Spectral Characteristics of Stepped-phase Gratings*. // *Optic*, 1979, v.53, pp. 409-417.
6. M. W. Farn, M. B. Stern. *Color separation by use of binary optics*. // *Opt. Lett.*, 1993, v.18, pp. 1214-1216.
7. Dallas J. M. *Phase quantization - a compact derivation*. // *Appl. Opt.*, 1971, v.14, pp. 674-676.
8. Goodman J. M., Silvestri A.M. *Some effects of Fourier-domain phase quantization*. // *IBM J. Res. Dev.*, 1969, v.14, pp.478-484.
9. Голуб М.А., Досколович Л.Л., Казанский Н.Л., Сисакян И.Н., Сойфер В.А., Харитонов С.И. *Метод согласованных прямоугольников для расчета фокусаторов в плоскую область*. // *Компьютерная Оптика*, М., МЦНТИ, 1992, N_10-11, с.100-110.
10. L.L. Doskolovich, P. Perlo, O.I. Petrova, P. Repetto, V.A. Soifer. *Direct 2D calculation of quantized DOEs on the basis of a continuous series approach*. *jour. of Mod. Opt.*, 1997, v.44, N4, pp.685-695.
11. L.L. Doskolovich, P. Perlo, O.I. Petrova, P. Repetto, V.A. Soifer. *Direct two-dimensional calculation of binary DOEs using a non-binary series expression approach*. *Int. Jour. Of Optoelectronics*, 1995, v.10, N4, pp.243-249.
12. Досколович Л.Л., Казанский Н.Л., Сойфер В.А. *Расчет бинарных дифракционных оптических элементов для фокусировки в заданную двумерную область*. *Автометрия*, 1995, N5, с.42-50.

Design of DOEs for separating and focusing radiation of different wavelengths

L.L. Doskolovich

Image Processing Systems Institute of RAS

Abstract

Numerous works [1-3] are devoted to the design of diffractive optical elements (DOEs) for transforming wavefronts and focusing coherent radiation into a target area. As a rule, the DOE microrelief is designed for one particular wavelength. Color separation phase diffraction gratings are used to work with various spectral components, these gratings allow to separate three different spectral components of the illuminating beam into the diffraction orders -1, 0 and 1 [4-6].

This article proposes a method for the design of “spectral” phase DOEs combining color separation gratings. The proposed DOEs allow to: 1) focus three different spectral components of the illuminating beam into three identical focal areas, 2) change the focusing area configuration when the wavelength changes (for three different wavelengths).

Citation: Doskolovich L.L. Design of DOEs for separating and focusing radiation of different wavelengths. *Computer Optics* 1998; 18: 16-24.

References

- [1] Lee W-H. Computer-generated holograms: techniques and applications. In Book: Wolf E, ed. *Progress in optics*. Vol 16. Amsterdam: North-Holland; 1978: 119-232.
- [2] Bringdal O, Wyrowsky F. Digital holography – computer-generated holograms. In Book: Wolf E, ed. *Progress in Optics*. Vol 28. Amsterdam: North-Holland; 1990: 1-86.
- [3] Soifer V, Kotlyar V, Doskolovich L. Iterative methods for diffractive optical elements computation. London: Taylor & Francis; 1997.
- [4] Dammann H. Color separation gratings. *Appl Opt* 1978; 17(15): 2273-2279.
- [5] Dammann H. Spectral characteristics of stepped-phase gratings. *Optik* 1979; 53(5): 409-417.
- [6] Farn MW, Stern MB. Color separation by use of binary optics. *Opt Lett* 1993; 18(15): 1214-1216.
- [7] Dallas JM. Phase quantization – a compact derivation. *Appl Opt* 1971; 10(3): 673-674.
- [8] Goodman JM, Silvestri AM. Some effects of Fourier-domain phase quantization. *IBM J Res Dev* 1970; 14(5): 478-484.
- [9] Golub MA, Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Sisakyan IN, Soifer VA, Kharitonov SI. Method of matched rectangles for designing focusators to flat areas. *Computer Optics* 1992; 10-11: 100-110.
- [10] Doskolovich LL, Perlo P, Petrova OI, Repetto P, Soifer VA. Direct 2D calculation of quantized DOEs on the basis of a continuous series approach. *J Mod Opt* 1997; 44(4): 685-695.
- [11] Doskolovich LL, Perlo P, Petrova OI, Repetto P, Soifer VA. Direct two-dimensional calculation of binary DOEs using a non-binary series expression approach, *IET Optoelectron* 1995; 10(4): 243-250.
- [12] Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Soifer VA. Calculation of binary diffractive optical elements for focusing into a given two-dimensional region [In Russian]. *Autometriya* 1995; 5: 42-50.