

ПРАКТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ФОКУСАТОРОВ В ЛИНИЮ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ

Л.Л. Досколович, С.И. Харитонов
Институт систем обработки изображений РАН.

Для широкого спектра технологических задач требуется фокусировка лазерного излучения в заданную линию. Для фокусировки в линию были созданы дифракционные фазовые оптические элементы, названные фокусаторами [1-4]. Расчет фокусаторов проводится в приближении геометрической оптики. Ввиду сложности решения обратной задачи фокусировки, фазовые функции фокусаторов получены только для случаев фокусировки в простые линии, такие как отрезок, кольцо, полукольцо. При фокусировке в более сложные кривые расчет фазы фокусатора является неординарной задачей, включающей решение сложных нелинейных уравнений.

В данной работе рассмотрен метод расчета фокусаторов в криволинейной системе координат, согласованной с видом фокальной кривой. Предлагаемые криволинейные координаты существенно упрощают расчет и позволяют предложить простой численный алгоритм расчета фокусаторов для произвольной фокальной линии.

Для описания задач, возникающих при расчете фокусаторов [1-4], рассмотрим предварительно стандартную процедуру расчета фазовой функции фокусатора в линию для пучка с распределением интенсивности $I_0(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in G$, где $\mathbf{u}=(u,v)$ - декартовы координаты в плоскости фокусатора (при $z=0$), G - апертура фокусатора. Фокальную линию в плоскости фокусировки $z=f$ определим параметрическим уравнением

$$\mathbf{X}(\xi) = (X(\xi), Y(\xi)), \xi \in [0, L]$$

где ξ - натуральный параметр, а распределение линейной плотности энергии вдоль линии фокусировки - функцией $I(\xi), \xi \in [0, L]$.

Фазовая функция фокусатора в параксиальном приближении имеет вид [1-4]:

$$\varphi(\mathbf{u}) = -\frac{k\mathbf{u}^2}{2f} + \varphi_D(\mathbf{u}) \quad (1)$$

где

$$\varphi_D(\mathbf{u}) = \frac{k}{f} \int_{u_0}^u X(\xi(u, v_0)) du + \frac{k}{f} \int_{v_0}^v Y(\xi(u, v)) dv \quad (2)$$

где $k=2\pi/\lambda$ - волновое число.

Функция $\xi(\mathbf{u})$ в (2) описывает лучевое соответствие между точками (u, v) апертуры фокусатора G и точками фокальной кривой. В работах [1-4] показано, что в каждую точку $(X(\xi), Y(\xi))$ кривой приходят лучи с линии $\Gamma(\xi)$ на фокусаторе, называемой слоем. В параксиальном приближении слоями являются прямые, перпендикулярные линии фокусировки. Таким образом уравнение слоя $\Gamma(\xi)$ имеет вид

$$u \frac{dX(\xi)}{d\xi} + v \frac{dY(\xi)}{d\xi} = p(\xi) \quad (3)$$

и является базовым уравнением для определения функции $\xi(\mathbf{u})$ в (2). Функция $p(\xi)$ в (3) является расстоянием от начала координат до слоя $\Gamma(\xi)$ и определяется из условия формирования заданного распределения линейной плотности $I(\xi), \xi \in [0, L]$ вдоль линии фокусировки. Конкретный вид функции $p(\xi)$ определяется из уравнения сохранения светового потока:

$$\int_{(\Gamma(0), \Gamma(\xi))} I_0(\mathbf{u}) d^2\mathbf{u} = \int_0^\xi I(\eta) d\eta \quad (4)$$

где область интегрирования $(\Gamma(0), \Gamma(\xi))$ соответствует части апертуры G фокусатора, заключенной между начальным слоем $\Gamma(0)$, являющимся касательной к апертуре и текущим слоем $\Gamma(\xi)$.

Таким образом стандартный алгоритм расчета фазовой функции фокусатора имеет вид:

1. Расчет функции $p(\xi)$ из уравнения (4)
2. Расчет функции $\xi(\mathbf{u})$ из уравнения (3)
3. Расчет фазовой функции по формуле (1)

Аналитический расчет фазовой функции фокусатора возможен лишь для простейших линий фокусировки таких как отрезок и окружность. В общем случае пункты 1), 2) алгоритма являются сложными вычислительными задачами, состоящими в решении нелинейных уравнений. При этом пункт (2) требует решения нелинейного уравнения для каждой точки \mathbf{u} апертуры фокусатора. Выполнение пункта 3) алгоритма также основано на операции двумерного численного интегрирования.

Расчет фокусатора существенно упрощается при использовании следующей криволинейной системы координат:

$$\begin{cases} u(\xi, t) = p(\xi) \frac{dX(\xi)}{d\xi} - t \cdot \frac{dY(\xi)}{d\xi} \\ v(\xi, t) = p(\xi) \frac{dY(\xi)}{d\xi} + t \cdot \frac{dX(\xi)}{d\xi} \end{cases} \quad (5)$$

Система координат (5) связана со слоями на фокусаторе и выражает координаты (u, v) через координату ξ , определяющую слой $\Gamma(\xi)$, содержащий данную точку и координату t , определяющую положение точки на слое. Отметим, что координата t является расстоянием от точки слоя $(u(0, t), v(0, t))$, являющейся точкой пересечения слоя и нормали к слою, до текущей точки слоя. В последующем изложении мы ограничимся рассмотрением практически важного случая фокусировки в кривую радиальных пучков;

$$I_0(\mathbf{u}) = I_0(u^2 + v^2) |\mathbf{u}| \leq R \quad (6)$$

где R - радиус апертуры фокусатора.

Для радиально-симметричных пучков закон сохранения светового потока (4) в координатах (ξ, t) может быть представлен в компактной дифференциальной форме:

$$dp(\xi) \frac{\sqrt{R^2 - p^2(\xi)}}{-\sqrt{R^2 - p^2(\xi)}} \int_{I_0(p^2(\xi) + t^2)} dt = I(\xi) d\xi \quad (7)$$

Поскольку интеграл в (7) обращается в ноль при $p(0), p(L) = \pm R$, то уравнение (7) следует решать относительно функции $\xi(p)$. Согласно (7), расчет $\xi(p)$ состоит в решении дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной и может быть проведен с использованием стандартного метода Рунге-Кутты. Далее вычисление $p(\xi)$ состоит в обращении гладкой однозначной функции $\xi(p)$.

Основное преимущество в использовании координат (ξ, t) состоит в возможности прямого вычисления фазы фокусатора без расчета функции $\xi(\mathbf{u})$, состоящего в решении нелинейного уравнения для каждой точки \mathbf{u} апертуры фокусатора. Действительно, из уравнений (1), (5) несложно получить частные производные функции $\varphi_D(\mathbf{u})$ (2) в переменных (ξ, t) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_D(\xi, t)}{\partial \xi} &= \frac{k}{f} X(\xi) \cdot \left[\frac{dp(\xi)}{d\xi} \frac{dX(\xi)}{d\xi} + p(\xi) \times \right. \\ &\times \left. \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} - t \frac{d^2 Y(\xi)}{d\xi^2} \right] + \frac{k}{f} Y(\xi) \times \\ &\times \left[\frac{dp(\xi)}{d\xi} \frac{dY(\xi)}{d\xi} + p(\xi) \frac{d^2 Y(\xi)}{d\xi^2} + t \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} \right] \quad (8) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi_D(\xi, t)}{\partial t} = \frac{k}{f} \left[\frac{dX(\xi)}{d\xi} Y(\xi) - X(\xi) \frac{dY(\xi)}{d\xi} \right] \quad (9)$$

Уравнения (8), (9) позволяют представить фазовую функцию фокусатора в переменных (ξ, t) в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, t) &= -\frac{k}{2f} (p^2(\xi) + t^2) + \\ &+ \frac{k}{f} \left[\frac{dX(\xi)}{d\xi} Y(\xi) - X(\xi) \frac{dY(\xi)}{d\xi} \right] \cdot t + \\ &+ \frac{k}{f} \left[\frac{dX(\xi)}{d\xi} X(\xi) + \frac{dY(\xi)}{d\xi} Y(\xi) \right] p(\xi) - \\ &- \frac{k}{f} \int_0^\xi p(\eta) d\eta \quad (10) \end{aligned}$$

Согласно уравнениям (7), (10) расчет фазы фокусатора в переменных (ξ, t) сводится к решению дифференциального уравнения первого порядка, об-

ращению полученного решения и одномерному интегрированию функции $p(\xi)$.

Операция изготовления фотошаблона фокусатора на литографе или лазерном фотопостроителе предполагает использование декартовых или полярных координат. Согласно (10), при фиксированном значении ξ фазовая функция вдоль слоя соответствует суперпозиции фазовых функций линзы и призмы. Это позволяет интерпретировать фокусатор как набор цилиндрических линз и призм, ориентированных вдоль слоев $\Gamma(\xi)$. При этом для точек $\mathbf{u} \in \Gamma(\xi)$ фазовая функция имеет вид:

$$\varphi(\mathbf{u}) = -\frac{k\mathbf{u}^2}{2f} + \frac{k}{f} (uX(\xi) + vY(\xi)) + c(\xi) \quad (11)$$

где

$$c(\xi) = -\frac{k}{f} \int_0^\xi p(\eta) d\eta.$$

Согласно (11), для расчета фазовой функции (10) в декартовых координатах (u, v) достаточно построить систему из N слоев (3) по функции $p(\xi)$. При этом система слоев $\Gamma(\xi_n), n=1, N$ определит разбиение апертуры фокусатора на N сегментов G_n . Далее, для вычисления фазы фокусатора в точке \mathbf{u} достаточно найти сегмент G_n , содержащий данную точку и воспользоваться формулой (11). Отметим, что поиск сегмента G_n , содержащего данную точку \mathbf{u} , сводится к тривиальным операциям определения положения точки относительно прямых.

Проведенный анализ структуры фазы фокусатора вдоль слоев позволяет предложить следующий простой алгоритм расчета фазовой функции фокусатора:

1. Расчет функции $p(\xi)$ из уравнения (7).
2. Переход к декартовым (или полярным) координатам с введением дискретной системы слоев и последующим расчетом фазы в сегментах по формуле (11).

В качестве примера для разработанного метода рассмотрим расчет фокусатора плоского пучка круглого сечения радиуса R в дугу окружности с постоянной линейной плотностью. Параметрическое уравнение дуги имеет вид:

$$\begin{cases} X(\xi) = R_1 \cos((\xi - R_1 \alpha / 2) / R_1) \\ Y(\xi) = R_1 \sin((\xi - R_1 \alpha / 2) / R_1) \end{cases} \xi \in [0, R_1 \alpha] \quad (12)$$

где R_1 - радиус дуги, α - угловой размер дуги.

Из закона сохранения светового потока (7) несложно получить функцию $\xi(p)$ в виде:

$$\xi(p) = \frac{R_1 \alpha}{\pi} \left(\arcsin\left(\frac{p}{R}\right) + \frac{p}{R} \sqrt{1 - \left(\frac{p}{R}\right)^2} \right) \quad (13)$$

Подставляя (12) в (5), (10) получим фазовую функцию фокусатора в дугу в виде:

$$\varphi(\xi, t) = -\frac{k}{2f} (p^2(\xi) + t^2) - \frac{k}{f} \left(t \cdot R_1 + \int_0^\xi p(\eta) d\eta \right) \quad (14)$$

Простой вид полученной фазы (14) демонстрирует достоинство криволинейной системы (5). Расчет фазы (14) сводится к выполнению только двух простых численных операций обращения функции (13) и ее одномерного интегрирования.

На рис.1 приведено полутоновое изображение фазовой функции фокусатора, рассчитанной как дополнение к линзе, для следующих параметров $\lambda=0.63\text{мкм}$, $f=500\text{мм}$, $R=5\text{мм}$, $R_1=1.25\text{мм}$, $\alpha=\pi/2$. Для расчета фазы (14) в декартовых координатах была построена система из 200 слоев по функции $p(\xi)$, найденной из уравнения (13) с последующим использованием формулы (11). Полутоновое распределение интенсивности, формируемое фокусатором на рис.1, приведено на рис.2 и демонстрирует работоспособность разработанного метода.

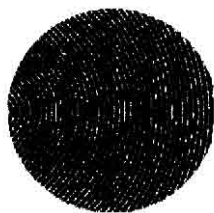


Рис. 1. Фазовая функция фокусатора для фокусировки в дугу окружности



Рис. 2. Распределение интенсивности в плоскости фокусировки, формируемое фокусатором на рис. 1

Благодарность

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96026)

Литература.

1. Голуб М.А., Карпсев С.В., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А. Фокусировка когерентного излучения в заданную область пространства с помощью синтезированных на ЭВМ голограмм. // Письма в ЖТФ, 1981, т.7, N_10, с.618-623.
2. Данилов В.А., Попов В.В., Прохоров А.М., Сагателян Д.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А. Синтез оптических элементов, создающих фокальную линию произвольной формы. // Письма в ЖТФ, 1982, т.8, N_13, с.810-815.
3. Гончарский А.В., Попов В.В., Степанов В.В. *Введение в компьютерную оптику*. М., Изд-во МГУ, 1991, 309 с.
4. V. Soifer, V. Kotlyar, L. Doskolovich. *Iterative methods for diffractive optical elements computation*. Taylor&Francis, London, 1997, p. 244.

A practical algorithm for the design of focusators into a line using curvilinear coordinates

*L.L. Doskolovich, S.I. Kharitonov
Image Processing Systems Institute of RAS*

Abstract

A wide range of technological problems require to focus laser radiation into a target line. There have been created focusators – diffractive phase optical elements for focusing radiation into a line [1-4]. Focusators are designed in the ray optics approximation. Due to the complexity of solving the inverse focusing problem, the phase functions of focusators are obtained only for the cases of focusing into simple lines, such as a segment, a ring, or a semiring. When focusing into more complex curves is required, the design of the focusator phase becomes an extraordinary task, which includes solving complex nonlinear equations.

This paper considers a method for the design of focusators in a curvilinear coordinate system consistent with the shape of the focal curve. The proposed curvilinear coordinates simplify the design considerably and allow to propose a simple numerical algorithm for the design of focusators into an arbitrary focal line.

Citation: Doskolovich LL, Kharitonov SI. A practical algorithm for the design of focusators into a line using curvilinear coordinates. *Computer Optics* 1998; 18: 37-39.

References

- [1] Golub MA, Karpeev SV, Prokhorov AM, Sisakyan IN, Soifer VA. Focusing coherent radiation in a given region of space with the help of computer-generated holograms [In Russian]. *Tech Phys Lett* 1981; 7(10): 618-623.
- [2] Danilov VA, Popov VV, Prokhorov AM, Sagatelyan DM, Sisakyan IN, Soifer VA. Synthesis of optical elements producing focal curves of arbitrary shape [In Russian]. *Tech Phys Lett* 1982; 8(13): 810-812.
- [3] Goncharsky AV, Popov VV, Stepanov VV. Introduction to computer optics [In Russian]. Moscow: MSU Publisher; 1991.
- [4] Soifer V, Kotlyar V, Doskolovich L. Iterative methods for diffractive optical elements computation. London: Taylor & Francis; 1997.