

ФОРМИРОВАНИЕ И ПЕРЕДАЧА НА РАССТОЯНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МОД ГАУССА-ЛАГЕРРА

С.Н. Хонина

Институт систем обработки изображений Российской Академии Наук

Аннотация

Чтобы передать на расстояние изображение через свободное пространство или по волокну нужно сформировать инвариантное изображение. Под инвариантным изображением мы понимаем поперечное распределение интенсивности светового поля, которое сохраняется с точностью до масштаба и поворота при распространении в пространстве. Это можно сделать с помощью аппроксимации заданного изображения набором мод Гаусса-Лагерра (ГЛ) со специально выбранными номерами. Анализируются условия, которым должны удовлетворять номера мод ГЛ, чтобы формировать стабильные или вращающиеся изображения, а также изображения, сохраняющие вид в Фурье-плоскости.

Приведены численные примеры инвариантных изображений, аппроксимирующих крест, кольцо, полукольцо, треугольник и трезук.

Введение

В последнее время возрос интерес к световым пучкам, сохраняющим поперечное сечение при распространении в некоторой среде. Сформировать такие пучки можно с помощью дифракционных оптических элементов (ДОЭ), согласованных с модами Бесселя [1-3], Гаусса-Лагерра [4,5], Гаусса-Эрмита [4,6]. Определенные композиции этих мод позволяют получать стабильные, периодические или вращающиеся световые пучки [7-10]. Стабильные и вращающиеся (можно считать их стабильными с точностью до поворота) композиции значительно расширяют множество пучков с инвариантными свойствами, позволяя формировать более сложные конфигурации поперечного сечения.

В данной работе предложен алгоритм формирования заданных изображений с помощью аппроксимации его модами Гаусса-Лагерра. Показано, что накладывая определенные ограничения на участвующие в аппроксимации номера мод, можно получить изображения, сохраняющиеся при распространении с точностью до масштаба и поворота. Подробно рассмотрены три группы мод, удовлетворяющие условию вращения светового пучка как единого целого [9,11], условию равенства скоростей [12] и условию равенства собственных чисел Фурье-преобразования [5].

В [14] было предложено формировать вращающиеся изображения с помощью "элементарных" спиральных гауссовых пучков. Такие изображения представляют собой контурный рисунок, выложенный с помощью таких сдвинутых "элементарных" пучков, и могут вращаться только с одной скоростью, поворачиваясь за все расстояние от нуля до бесконечности на 90 градусов. Предлагаемый в данной работе подход позволяет формировать

изображения с принципиально любой задаваемой скоростью вращения.

1. Формирование изображений с помощью мод Гаусса-Лагерра

Задача формулируется так. Пусть имеется некоторая произвольная действительная неотрицательная функция двух переменных $F(r, \varphi) > 0$, которую будем называть объектной функцией (заданным изображением), r, φ - полярные координаты. Требуется найти аппроксимацию этой функции с помощью конечной суммы вида

$$F_N^\sigma(r, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sum_{|m| \leq n} C_{nm} L_{nm}(r, \varphi), \quad (1)$$

где $L_{nm}(r, \varphi)$ - обобщенная функция Гаусса-Лагерра:

$$L_{nm}(r, \varphi) = \frac{2\sqrt{\pi(n-|m|)!}}{\sigma\sqrt{(n!)^3}} \left(\frac{r}{\sigma}\right)^m \times \exp\left[-(r/\sigma)^2/2\right] L_n^{|m|}\left((r/\sigma)^2\right) \exp[im\varphi] \quad (2)$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}$$

где $L_n^m(x) = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} [L_{m+n}(x)]$ - обобщенный многочлен Лагерра, σ - параметр, характеризующий эффективную ширину модовой функции (2).

Функции Гаусса-Лагерра ортогональны

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty L_{nm}(r, \varphi) L_{n'm'}^*(r, \varphi) r dr d\varphi = \delta_{n'n} \delta_{m'm}, \quad (3)$$

где $\delta_{nm} = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases}$ - символ Кронекера, * - знак комплексного сопряжения.

Из условия (3) следует выражение для вычисления коэффициентов C_{nm} суммы (1):

$$C_{nm} = \int_0^{2\pi} \int_0^c F_N^\sigma(r, \varphi) L_{nm}^*(r, \varphi) r dr d\varphi \quad (4)$$

Аппроксимировать объектную функцию $F(r, \varphi)$ с помощью суперпозиции мод $F_N^\sigma(r, \varphi)$, определенной уравнением (1), можно с помощью минимизации следующего критерия:

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^c \left[F(r, \varphi) - \left| F_N^\sigma(r, \varphi) \right| \right]^2 r dr d\varphi \quad (5)$$

Минимизировать критерий можно методом последовательных приближений аналогично итеративному алгоритму сокращения ошибки [14].

В данном случае итеративный алгоритм принимает следующий вид:

$$T^{(p+1)}(r, \varphi) = \arg\{F_N^\sigma(r, \varphi)\} = \arg\left\{ \sum_{n=0}^N \sum_{m \leq n} B_{nm} \exp(i\alpha_{nm}) L_{nm}(r, \varphi) \right\}, \quad (6)$$

$$\alpha_{nm} = \arg\left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^c F(r, \varphi) \exp[iT^{(p)}(r, \varphi)] L_{nm}^*(r, \varphi) r dr d\varphi \right\} \quad (7)$$

где p - номер итерации, $T^{(p)}(r, \varphi)$ - фаза комплексной аппроксимирующей модовой функции (1), $B_{nm} > 0$ - положительные произвольно заданные числа, характеризующие вес отдельной моды в смеси мод, $\arg\{\dots\}$ - аргумент комплексного числа.

2. Условие равенства скоростей

Сформированное таким образом изображение (1) будет распространяться в свободном пространстве, подчиняясь уравнению Гельмгольца [15]:

$$F_N^\sigma(r, \varphi, z) = \exp\left[ikz + \frac{ikr^2}{2R(z)} - \frac{r^2}{\sigma(z)^2} \right] \times \sum_{n=0}^N \sum_{m \leq n} C_{nm} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\sigma(z)} \right)^{|m|} L_n^{|m|} \left(\frac{2r^2}{\sigma(z)^2} \right) \exp[-i\beta_{nm}(z) + im\varphi] \quad (8)$$

где $\beta_{nm}(z) = (2n + m + 1) \cdot \arctg(z/z_0)$, (9)

$R(z) = z \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2} \right)$ - радиус кривизны параболического фронта светового поля, $\sigma(z)^2 = \sigma^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right)$ -

эффективный радиус пучка, $z_0 = \frac{k\sigma^2}{2}$ - конфокаль-

ный параметр или Френелевское расстояние, k - волновое число света с длиной волны λ .

А в многомодовом световом волокне круглого сечения и с квадратичной зависимостью показателя преломления $n^2(r) = n_0^2 \left(1 - 2\Delta \frac{r^2}{r_0^2} \right)$, где n_0 - максимальное значение показателя преломления на оси волокна, r_0 - радиус волокна, Δ - параметр дисперсии показателя преломления, изображение (1) будет распространяться следующим образом [16]:

$$F_N^\sigma(r, \varphi, z) = \sum_{n=0}^N \sum_{m \leq n} C_{nm} \left(\frac{r\sqrt{2}}{\sigma} \right)^{|m|} L_n^{|m|} \left(\frac{2r^2}{\sigma^2} \right) \times \exp\left[i\gamma_{nm}z - \frac{r^2}{\sigma^2} + im\varphi \right] \quad (10)$$

где $\sigma = \left(\frac{\lambda}{\pi} \frac{r_0}{n_0} \right)^{1/2} (2\Delta)^{-1/4}$,

$\gamma_{nm} = \left[k^2 n_0^2 - 4\sigma^{-2} (2n + m + 1) \right]^{1/2}$ - коэффициент, пропорциональный фазовой скорости соответствующей моды.

В обоих случаях при соблюдении условия равенства скоростей:

$$\Omega_1 : 2n + |m| = p, p = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

зависимость от z выносятся за знак суммы и мы получим стабильный пучок с сохраняющимся поперечным сечением, представляющим собой несколько другую, чем (1) аппроксимацию заданного изображения $F(r, \varphi)$:

$$F_{\Omega_1}^\sigma(r, \varphi) = \sum_{(n,m) \in \Omega_1} C_{nm}^1 L_{nm}(r, \varphi). \quad (12)$$

Такое ограничение значительно сокращает количество степеней свободы, что ведет к ухудшению качества аппроксимации.

На рис. 1 показаны некоторые группы индексов $(n, m) \in \Omega_1$, удовлетворяющие условию равенства скоростей (11). Подходящие пары индексов легко находятся по пересечению линий с узлами целочисленной сетки. Так, скорость $p=10$ имеют 3 моды: (4,-2), (5,0), (4,2); скорость $p=13$ имеют 4 моды: (5,-3), (6,-1), (6,1), (5,3); скорость $p=24$ имеют 9 мод: (8,-8), (9,-6), (10,-4), (11,-2), (12,0), (11,2), (10,4), (9,6), (8,8). Ясно, что чем больше значение скорости, тем большее количество мод может участвовать в аппроксимации (12).

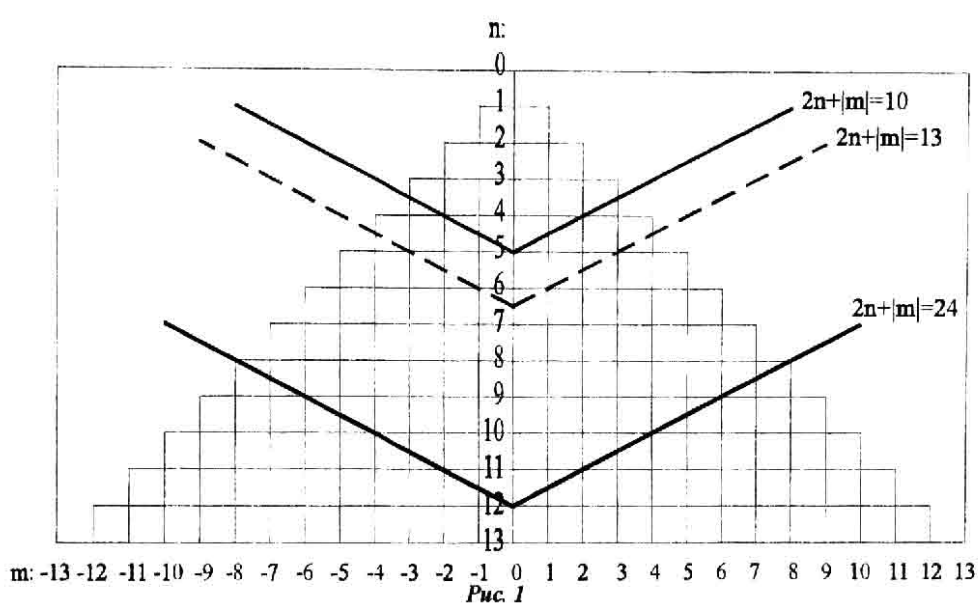


Рис. 1

3. Условие вращения

Если рассматривать пучок, поперечное сечение которого вращается при распространении как единое целое, то можно также говорить о сохранении сформированного на входе изображения с точностью до поворота.

Условие вращения многомодовых пучков Гаусса-Лагерра независимым способом и в различном виде были получены в [9-11]. В [10] рассматривалось световое волокно, а в [11] - свободное пространство. При определенных допущениях условие вращения в обоих случаях выглядит одинаково:

$$\frac{2(n - n') + |m| - |m'|}{m - m'} = B, \quad (13)$$

где B - постоянная величина.

Это условие легко сводится к виду, полученному в [9]:

$$\Omega_2 : 2n + |m| + Tm = q, \quad (14)$$

где $T = -B$ - величина, определяющая угловую скорость и направление вращения: при $T > 0$ вращение по часовой стрелке, при $T < 0$ вращение против часовой стрелки, при $T = 0$ вращение не происходит и условие (14) сводится к условию (11). При этом нужно заметить, что в отличие от целого положительного p в (11), постоянные величины B и q являются в общем случае действительными.

Аппроксимация заданного изображения $F(r, \varphi)$ в этом случае выглядит следующим образом:

$$F_{\Omega_2}^{\sigma}(r, \varphi) = \sum_{(n, m) \in \Omega_2} C_{nm}^2 L_{nm}(r, \varphi). \quad (15)$$

В [9] дана достаточно сложная формула подбора индексов пары мод исходя из равенства

$$2n + |m| + Tm = 2n' + |m'| + Tm' \quad (16)$$

и конкретного значения $T = P/Q$, представляемого в виде несократимой дроби. Однако, нужно заметить,

что композиция из двух любых мод всегда формирует либо вращающийся, либо стабильный пучок. Данное утверждение вытекает из представления условия вращения в виде (13). Это условие выполнено для любых двух пар индексов (n, m) , вращение не будет происходить при $m = m'$ ($B = \infty$), или при $2n + |m| = 2n' + |m'|$ ($B = 0$), что соответствует условию равенства скоростей (11).

Чтобы определить значения индексов для более, чем двух мод, предлагается решать уравнение (14) графически. Перепишем (14) в виде:

$$\begin{cases} 2n + (T+1)m = q, m \geq 0, \\ 2n + (T-1)m = q, m < 0. \end{cases} \quad (17)$$

На рис.2 показано графическое представление (17) для $T \geq 0$, $q = 16$. При $T < 0$ картина будет симметричной относительно оси n . Аппроксимация (15) для одинакового абсолютного значения $|T|$ будет выглядеть одинаково, но для разных знаков будет различное направление вращения. Значение $q/2$ соответствует положению узла линий с различным T на оси n . При $q < 0$ будет существовать только нижний по отношению к узлу пучок линий.

Как видно из рис.2, при прочих равных условиях, начиная с $T \geq 1$ подмножество Ω_2 шире подмножества Ω_1 . Действительно, для $q = 16$ Ω_1 включает 5 мод ($T = 0$), а Ω_2 может включать 12 мод ($T = 1$) или 14 мод ($T = 3$). Это должно дать лучшее качество аппроксимации (15) по сравнению с аппроксимацией (12). Можно сделать предположение, что подмножества Ω_2 с $T = 1$ и $T = 3$ наиболее перспективные, так как включают в себя диагонали и линии, параллельные осям n и m .

Условие вращения (17) можно свести к более простому виду

$$n = p|m| + l, \quad (18)$$

где все m одного знака, $p \geq 0$ и l - целые. Параметр T в этом случае принимает только целые нечетные значения и определяется по формуле:

$$T = -(2p+1)\text{sgn}(m), p = 0, 1, 2, \dots, \quad (19)$$

где $\text{sgn}(m) = \begin{cases} 1, m > 0 \\ -1, m < 0 \end{cases}$ - знаковая функция.

На рис.3 показано графическое представление (18) для некоторых T при $l=5$.

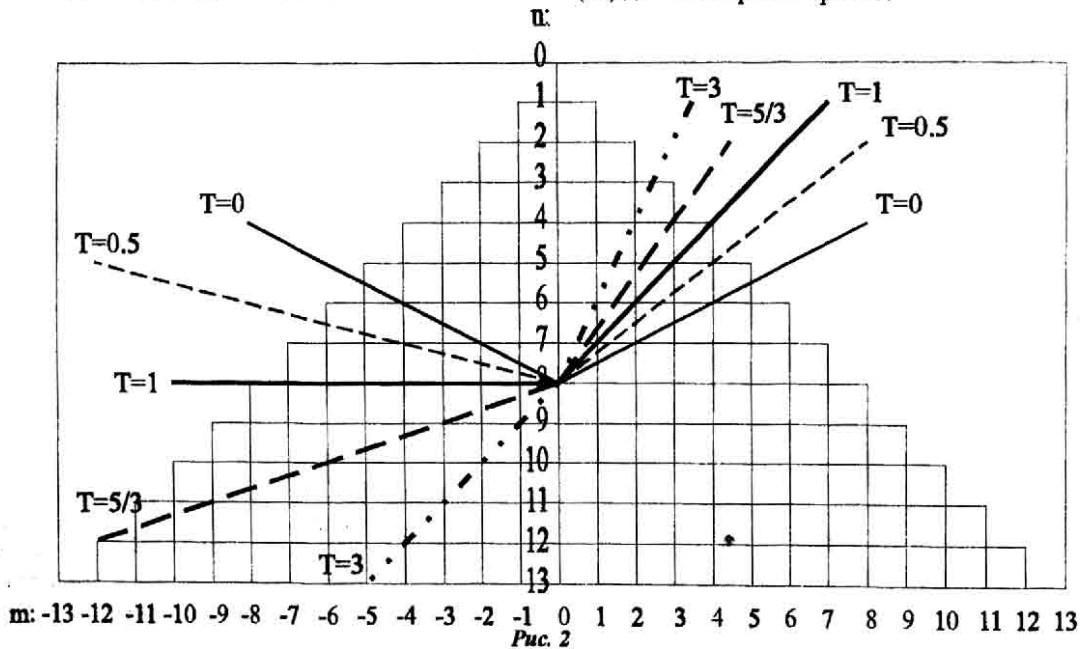


Рис. 2

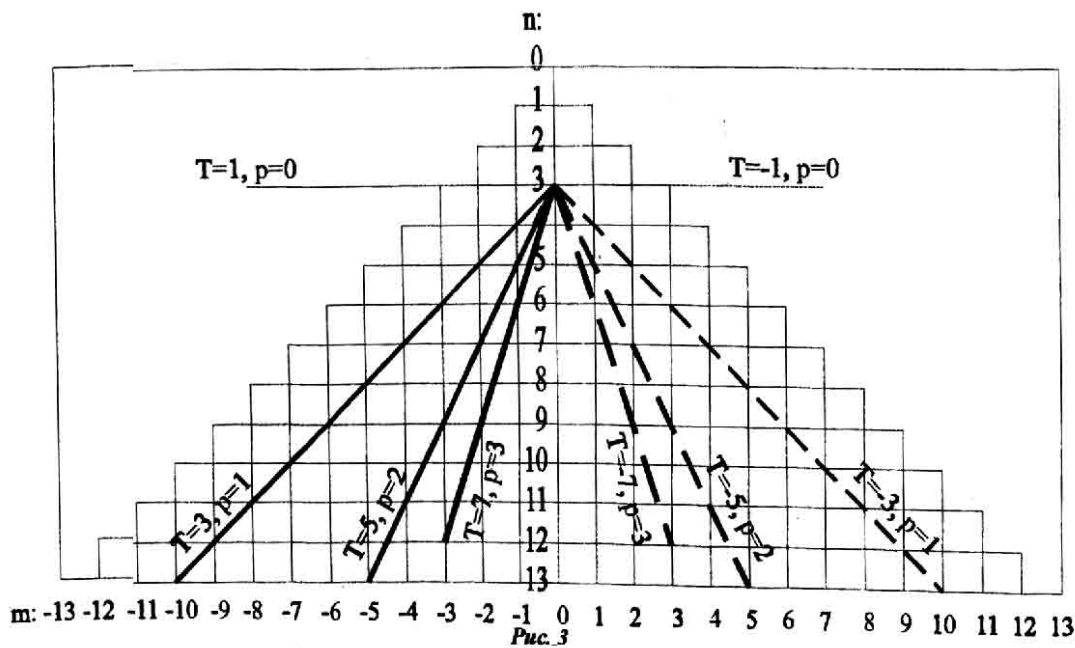


Рис. 3

Понятно, что условие (18) охватывает меньшее подмножество, чем условие (17). В частности, если сравнить рис. 2 и 3 для $T \geq 1$, то видно, что условие (18) включает только левые от оси n ветви.

Заметим, что при выборе всех $m=0$ параметр угловой скорости $T=\infty$, что легко видеть из формулы (13). Пучки, состоящие из композиции более двух таких мод не обладают свойством инвариантности поперечного сечения при распространении. Эти моды не имеют углового момента ($m=0$) и скорости распространения у них различны - в (11) $2n \neq \text{const}$.

4. Условие равенства собственных чисел

Кроме того, что функции Гаусса-Лагерра удовлетворяют уравнениям распространения (8) и (10), они являются собственными функциями преобразования Фурье:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} L_{nm}(r, \varphi) \exp[-ir\rho \cos(\theta - \nu)] r dr d\theta = (-1)^n (-i)^m L_{nm}(\rho, \theta), \quad (20)$$

что позволяет использовать их для эффективного ввода излучения в световые волокна [16].

В общем случае, если мы сформировали световой пучок $F_N^\sigma(r, \varphi)$, который является суперпозицией мод Гаусса-Лагерра и одновременно аппроксимацией заданного изображения $F(r, \varphi)$, то в зоне дифракции Фраунгофера или в фокальной плоскости линзы мы получим следующее изображение:

$$\mathfrak{F}\{F_N^\sigma(r, \varphi)\} = G_N^\sigma(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^N \sum_{|m| \leq n} \lambda_{nm} C_{nm} L_{nm}(\rho, \theta), \quad (21)$$

где \mathfrak{F} - обозначение Фурье-преобразования, $\lambda_{nm} = (-1)^n (-i)^{|m|}$ - собственные числа.

Из уравнения (21) видно, что функция $F_N^\sigma(r, \varphi)$ в общем случае не равна своему Фурье-образу $G_N^\sigma(\rho, \theta)$. Однако, при участии в суперпозиции (1) только мод с одинаковыми значениями собственных чисел:

$$\lambda_{nm} = i^{2n-3|m|} = const, \quad (22)$$

$$\Omega_3 : 2n + 3|m| = l + 4s, l, s = 0, 1, 2, \dots, \quad (23)$$

для интенсивностей световых пучков такое равенство может быть достигнуто:

$$\begin{aligned} \left| \mathfrak{F}\{F_{\Omega_3}^\sigma(r, \varphi)\} \right|^2 &= \left| \mathfrak{F}\left\{ \sum_{n,m \in \Omega_3} C_{nm}^3 L_{nm}(r, \varphi) \right\} \right|^2 = \\ &= \left| \lambda_{nm} \sum_{n,m \in \Omega_3} C_{nm}^3 L_{nm}(\rho, \theta) \right|^2 = \left| F_{\Omega_3}^\sigma(\rho, \theta) \right|^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Более наглядно распределение одинаковых значений собственных чисел в зависимости от номера функции Гаусса-Лагерра приведено в Таблице 1.

Как видно из таблицы, моды Гаусса-Лагерра с одинаковыми собственными значениями дают достаточно степеней свободы, чтобы сформировать изображение, хорошо аппроксимирующее заданное и не меняющее своей структуры при прохождении Фурье-каскада. Заметим, что функции Гаусса-Лагерра с взаимно противоположной "закруткой" $\exp[\pm i|m|\varphi]$ имеют одинаковые собственные значения.

Совокупность мод Гаусса-Лагерра с одинаковыми собственными значениями можно считать собственной группой, так как она также представляет собой собственную функцию преобразования Фурье. Интересно отметить, что условие равенства скоростей удовлетворяет и условию равенства собственных чисел:

$$\Omega_1 \cap \Omega_3 = \Omega_1, \quad (25)$$

что легко видеть из соотношения:

$$\lambda_{nm} \Big|_{n,m \in \Omega_1} = (-1)^n (-i)^{p-2n} = \underbrace{(-i)^p}_{const} \underbrace{(-1)^n (-i)^{-2n}}_1 = const.$$

Это понятно и просто из логических соображений, считая, что Фурье-образ изображения соответствует

изображению, прошедшему бесконечное расстояние.

В случае вращения, $\Omega_2 \cap \Omega_3 = \Omega_2$ только при $T=4l$, l -целое. Такой вывод можно сделать, учитывая выражение для количества оборотов, которое успевает совершить световой пучок (15) на расстоянии от $z=0$ до $z=\infty$ [11]:

$$K = \frac{T}{4}. \quad (26)$$

Таблица 1. Собственные значения для собственных функций Гаусса-Лагерра

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	-1	i								
2	1	-i	-1							
3	-1	i	1	-i						
4	1	-i	-1	i	1					
5	-1	i	1	-i	-1	i				
6	1	-i	-1	i	1	-i	-1			
7	-1	i	1	-i	-1	i	1	-i		
8	1	-i	-1	i	1	-i	-1	i	1	
9	-1	i	1	-i	-1	i	1	-i	-1	i

5. Численные примеры

При численном моделировании использовались следующие параметры: 128 отсчетов по радиусу r и 128 отсчетов по угловой составляющей $\varphi \in [0, 2\pi]$. Диапазон изменения аргументов $r/\sigma \in [0, R/\sigma]$, где соотношение $R/\sigma = 15$ в большинстве случаев, иногда использовалось $R/\sigma = 10$. Параметр $\sigma = 0.1$ мм, длина волны $\lambda = 0.63$ мкм, фокусное расстояние $f = 100$ мм. Во всех вычислениях рассматривались функции ГЛ с номерами $n, m \leq N = 15$.

На рис. 4 представлены результаты аппроксимации (1) некоторых фигур (рис. 4а) с помощью мод ГЛ.

Для получения аппроксимирующих функций, представленных на рис. 4в, было достаточно двух итераций алгоритма (6)-(7), далее наступала стагнация. Распределение коэффициентов, участвующих в (1) представлено на рис. 4б.

Понятно, что в общем случае эти изображения не сохраняются ни при распространении, ни при фокусировке линзой. Для формирования стабильного изображения необходимо соблюдать условие равенства скоростей (11). На рис. 5 представлены результаты аппроксимации (12) фигуры "крест" (рис. 5а, $R/\sigma = 10$) при значении параметра $p = 12$ (рис. 5б, в) и $p = 24$ (рис. 5г, д). Видно, что чем больше значение p из условия (11), тем больше степеней свободы и лучше аппроксимация. Адаптированный для (12) алгоритм (6)-(7) в данном случае не приводил к стагнации и демонстрировал постоянную сходимость (приведенные результаты соответствуют 11-ой итерации).

Результаты численного моделирования поведения такого светового пучка при распространении в свободном пространстве и в фокусе линзы приведены на рис.6.

Из рис. 6 видно, световой пучок (12) сохраняет свою структуру с точностью до масштаба на всем

пути распространения. На рис. 7 представлен аналогичный результат для другого изображения.

Набор изображений, хорошо аппроксимирующиеся при условии равенства скоростей (11), достаточно ограничен. Возможность использования аппроксимации (15), учитывающей условие вращения (13) или (14), позволяет расширить этот набор.

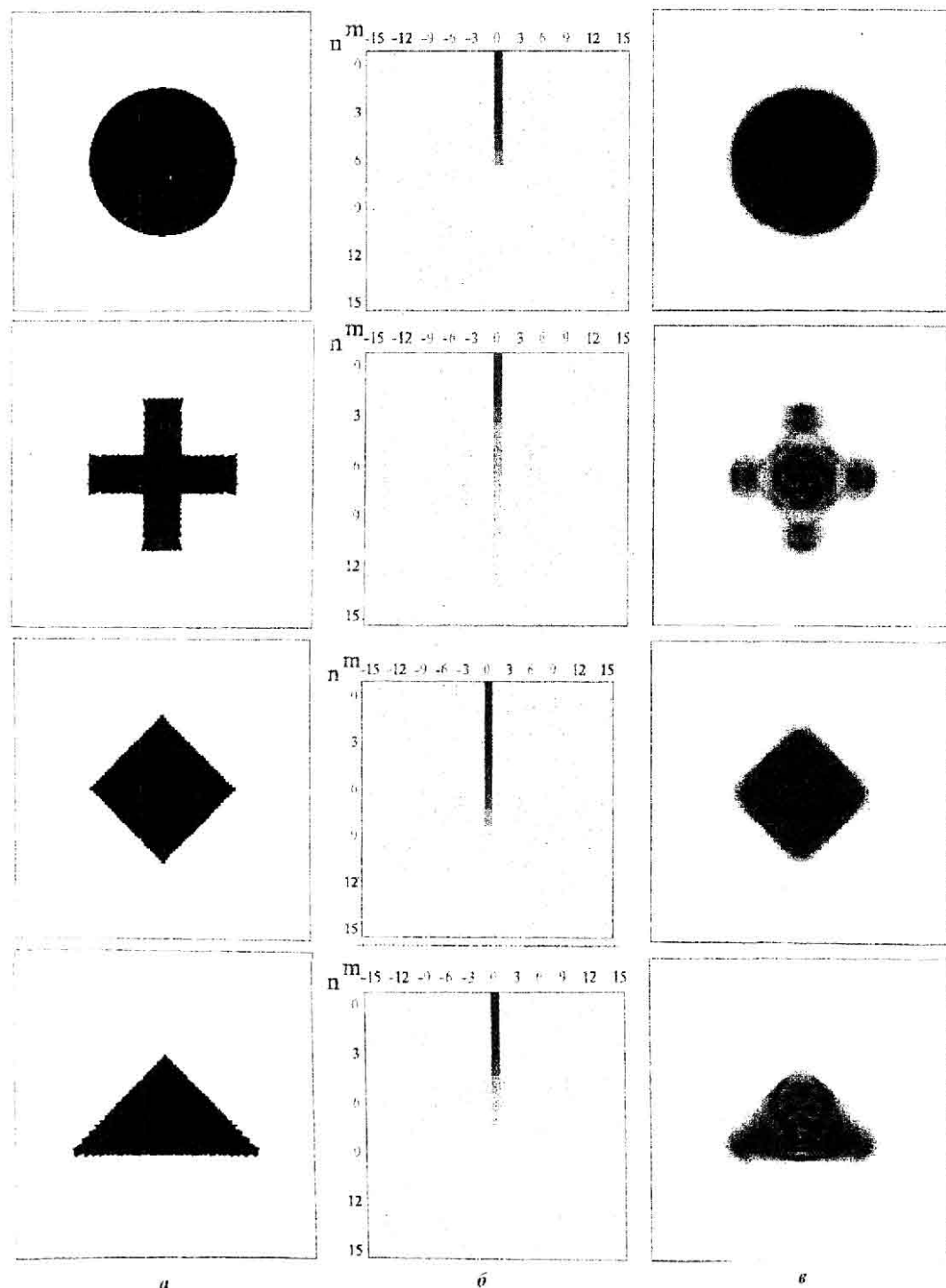


Рис. 4. (а) заданное изображение, (б) распределение коэффициентов ГЛ, (в) аппроксимация изображения

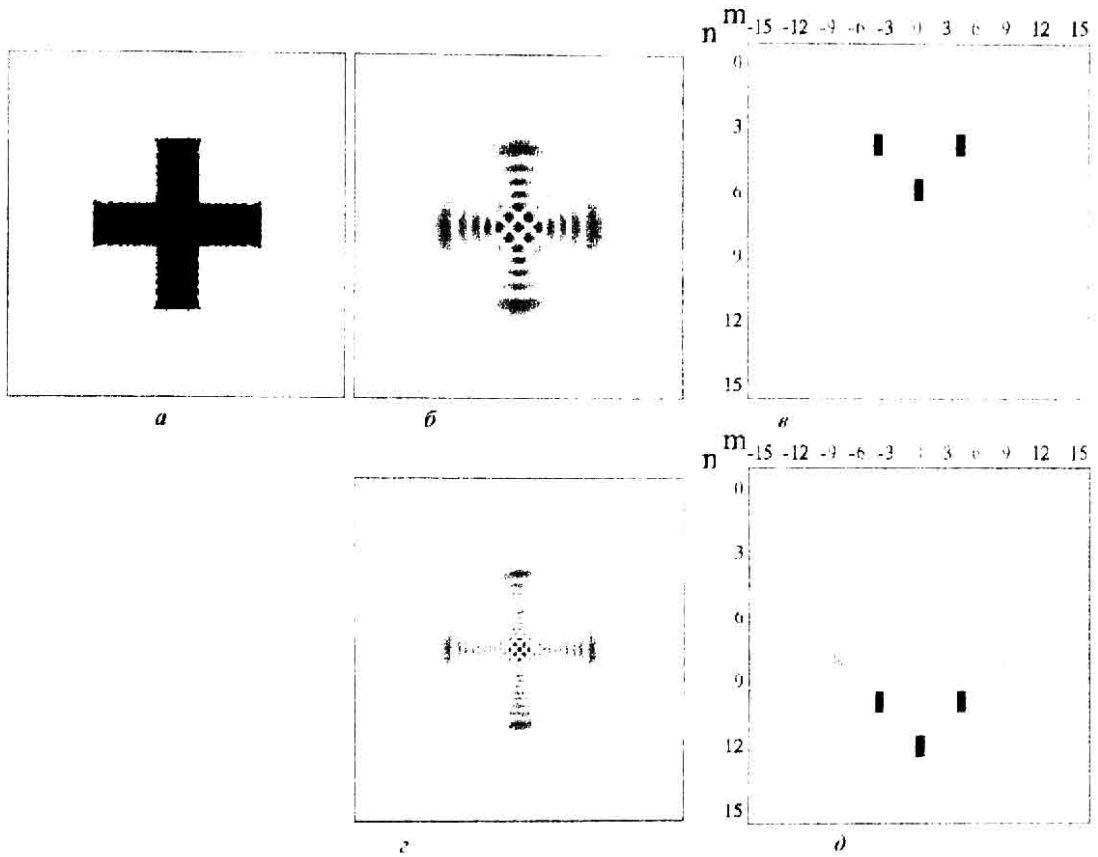


Рис. 5. Исходное изображение (а), аппроксимация (12) при $p=12$ (б) и соответствующее распределение коэффициентов ГЛ (в), аппроксимация (12) при $p=24$ (z) и соответствующее распределение коэффициентов ГЛ (d)

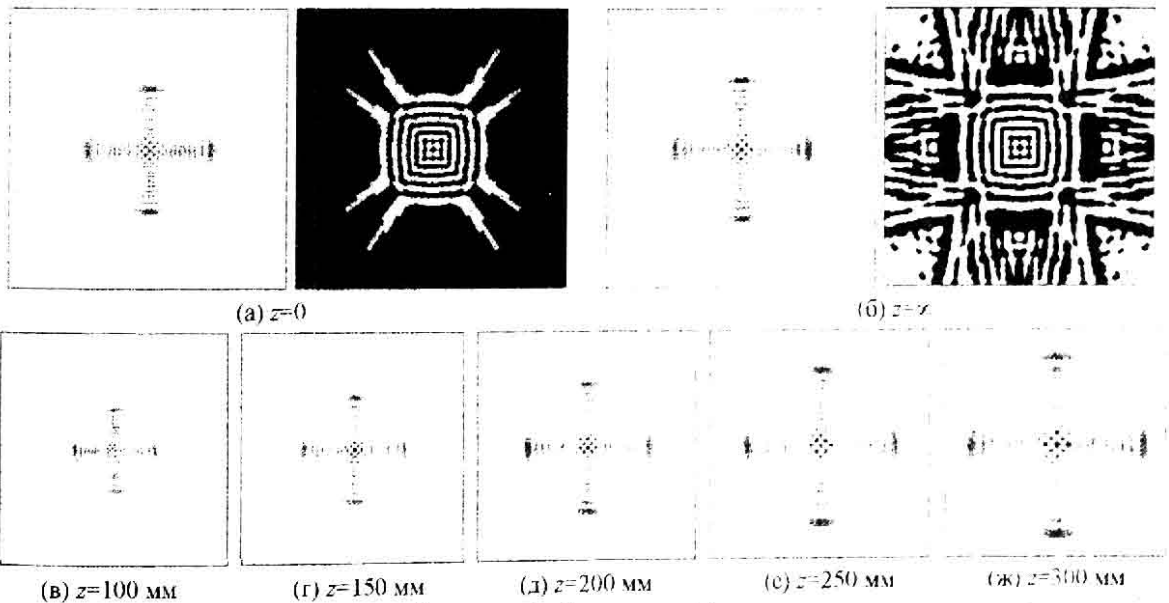


Рис. 6. Распределение интенсивности и фазы во входной плоскости (а), распределение интенсивности и фазы в фокальной плоскости линзы (б), распределение интенсивности на различных расстояниях от входной плоскости z (в-ж)

На рис. 8 показаны результаты аппроксимации (15) для некоторых заданных изображений (рис. 8а) после 11 итераций алгоритма (6)-(7) при различных параметрах условия вращения (14): "полукольцо" - $T=-1$, $q=18$, "наклонная линия" - $T=2$, $q=10$. "треугольник" - $T=1$, $q=22$.

Результаты численного моделирования поведения таких световых пучков при распространении в свободном пространстве и в фокусе линзы приведены на рисунках 9-11. В соответствии с формулой (26), за весь путь от $z=0$ до $z=\infty$ "полукольцо" должно совершить четверть оборота против часовой стрелки, "треугольник" - столько же оборотов по ча-

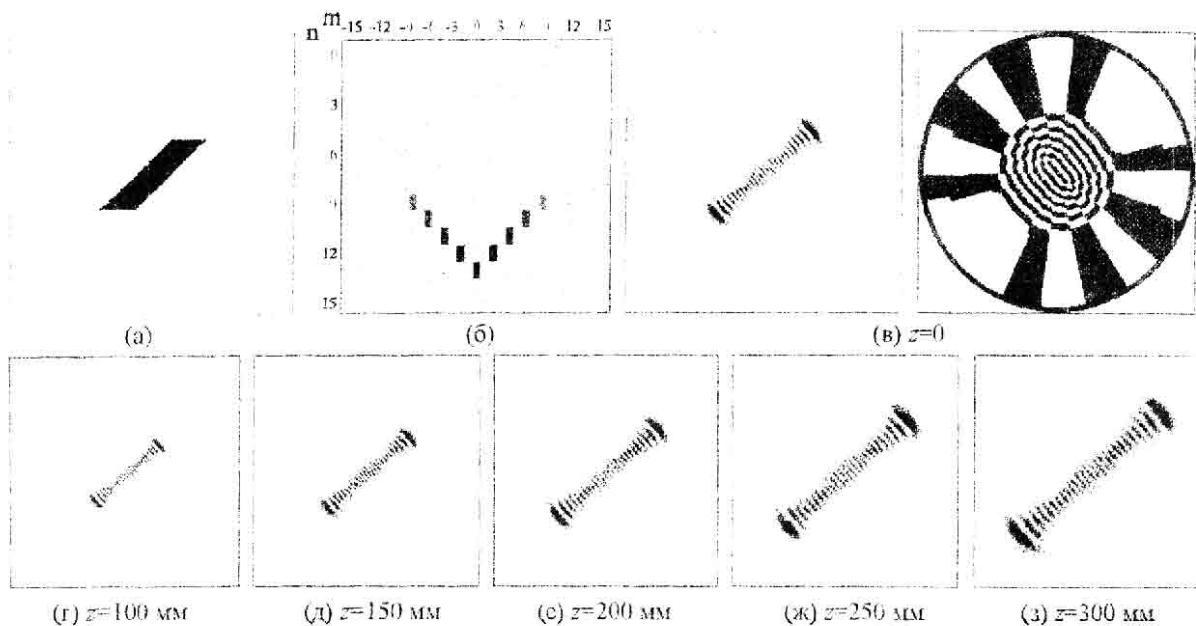


Рис. 7. Исходное изображение (а), распределение коэффициентов ГЛ (б), распределение интенсивности и фазы аппроксимации (12) во входной плоскости (в), распределение интенсивности на различных расстояниях от входной плоскости z (г-з)

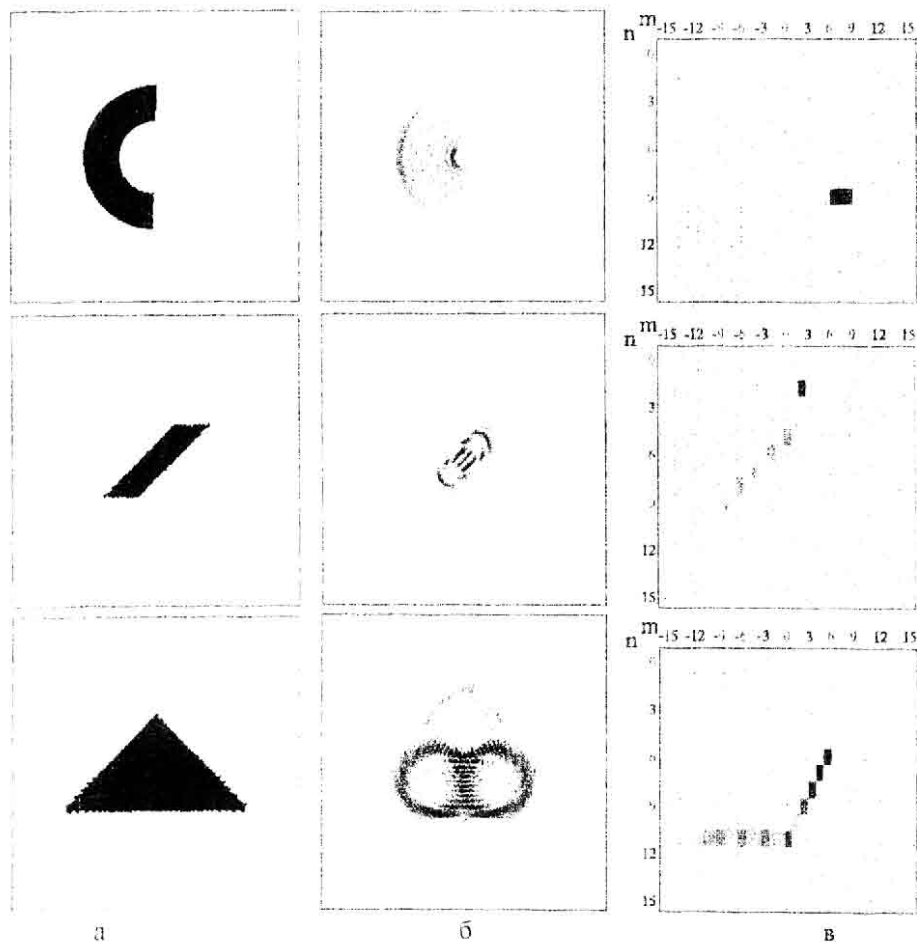


Рис. 8. Исходное изображение (а), распределение интенсивности аппроксимации (15) (б), распределение коэффициентов ГЛ (в)

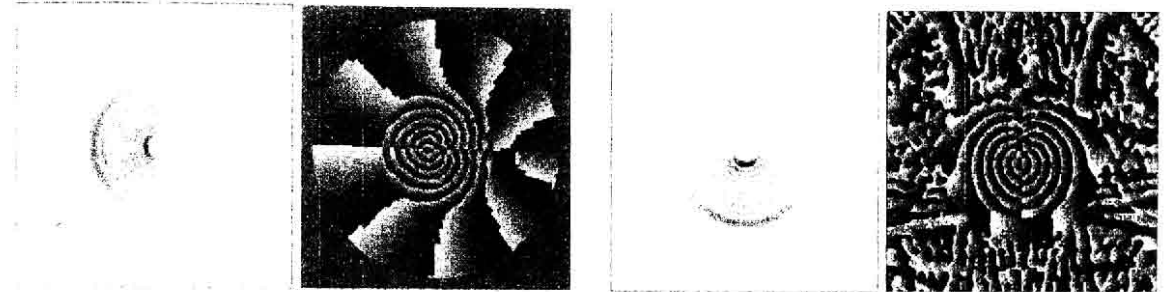
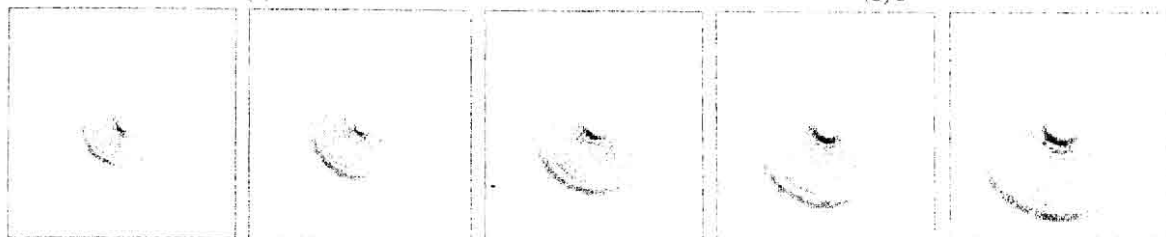
(a) $z=0$ (б) $z=f$ (в) $z=100$ мм(г) $z=150$ мм(д) $z=200$ мм(е) $z=250$ мм(ж) $z=300$ мм

Рис. 9. Распределение интенсивности и фазы во входной плоскости (а), распределение интенсивности и фазы в фокальной плоскости линзы (б), распределение интенсивности на различных расстояниях от входной плоскости z (в-ж)

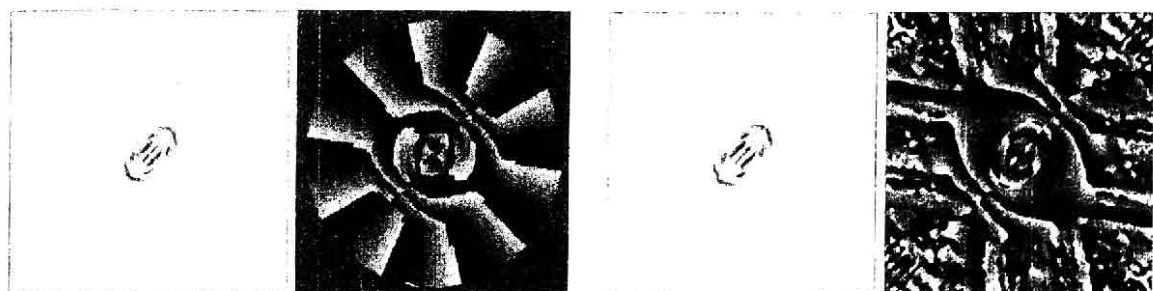
(a) $z=0$ (б) $z=f$ (в) $z=50$ мм(г) $z=100$ мм(д) $z=150$ мм(е) $z=200$ мм(ж) $z=250$ мм

Рис. 10. Распределение интенсивности и фазы во входной плоскости (а), распределение интенсивности и фазы в фокальной плоскости линзы (б), распределение интенсивности на различных расстояниях от входной плоскости z (в-ж)

Из рис. 9-11 видно, что световые пучки (15) сохраняют свою структуру с точностью до масштаба и поворота на протяжении всего пути. При этом они могут вращаться с различной скоростью и в разных направлениях в зависимости от параметра угловой скорости T из (14). Скорость вращения пучков в свободном пространстве не постоянная, она замедляется с ростом пройденного расстояния [11]:

$$v = \frac{T}{1 + (z/z_0)^2}. \quad (27)$$

Интересно заметить, что благодаря симметрии, изображение может повторяться не только при пол-

ных оборотах, но и чаще (см., например, рис. 10а,б - отрезок повторился на полуобороте).

Ранее было показано, что световые пучки, удовлетворяющие условию равенства скоростей (11) автоматически удовлетворяют и условию равенства собственных чисел (22) или (23), то есть являются собственной групповой функцией преобразования Фурье. Вращающийся пучок (15) будет собственной функцией преобразования Фурье если угловая скорость T кратна 4. Однако, из примера, приведенного на рис.10, видно, что вращающийся световой пучок может быть Фурье-инвариантен и с другими значениями T благодаря своей симметрии.

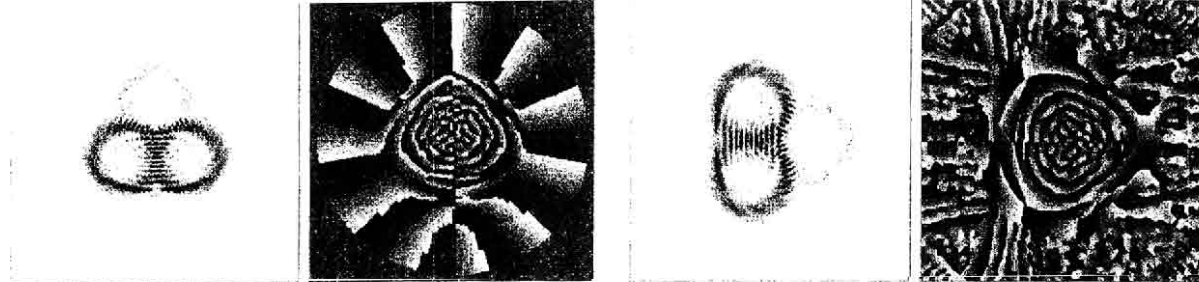
(a) $z=0$ (б) $z=\infty$ (в) $z=100$ мм(г) $z=150$ мм(д) $z=200$ мм(е) $z=250$ мм(ж) $z=300$ мм

Рис. 11. Распределение интенсивности и фазы во входной плоскости (а), распределение интенсивности и фазы в фокальной плоскости линзы (б), распределение интенсивности на различных расстояниях от входной плоскости z (в-ж)

На рис. 12 представлены результаты аппроксимации (24) изображения "кольцо" при соблюдении условия равенства собственных чисел (22) после 20 итераций. Были опробованы две группы индексов $\{(n, m): \lambda_{nm} = 1\}$ (рис. 12б-г) и $\{(n, m): \lambda_{nm} = -i\}$ (рис. 12д-ж). Видно, что во втором случае отсутствует центральный пик, что связано с фазовой особенностью в центре пучка – винтовой "закруткой" третьего порядка $\exp(i3\varphi)$.

Такое изображение должно быть Фурье-инвариантно, то есть повторяться в фокусе линзы, что и подтверждает рис. 13.

Однако, видно, что при распространении в свободном пространстве такое изображение не сохраняется. Интенсивность по мере распространения как бы растекается от центра к периферии. Еще один пример Фурье-инвариантного светового пучка приведен на рис. 14. Для аппроксимации (24) изображения "крест" была выбрана группа индексов $\{(n, m): \lambda_{nm} = 1\}$.

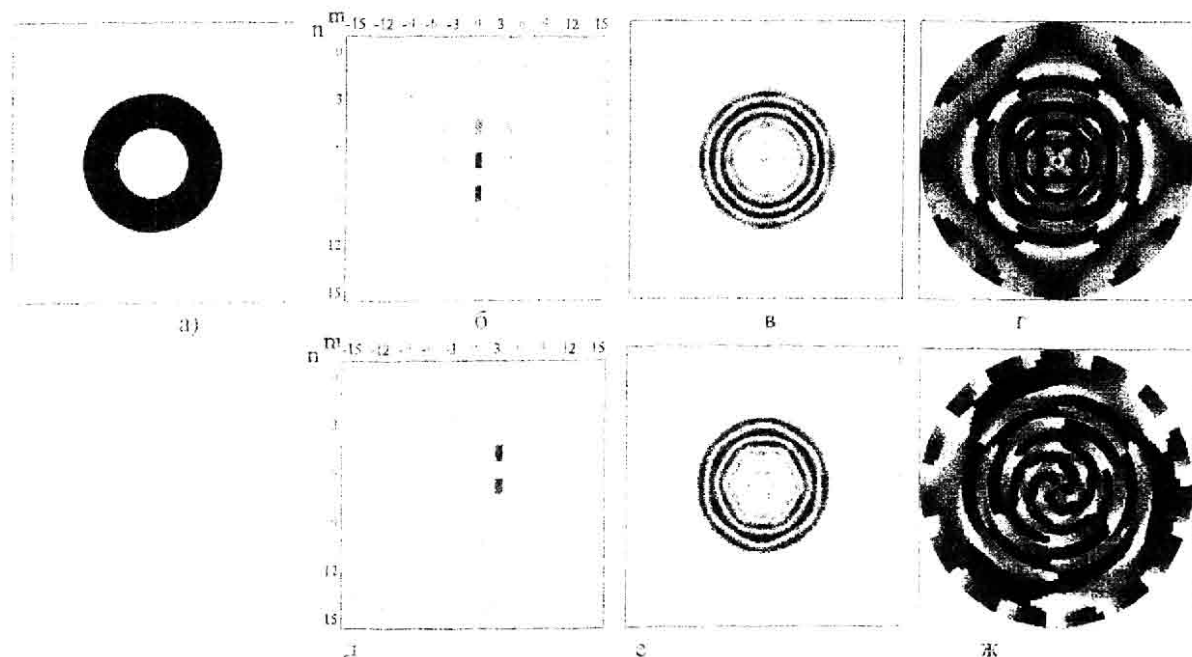


Рис. 12. Исходное изображение (а), распределение коэффициентов ГЛ (б,д), соответствующее распределение интенсивности (в,е) и фазы (г,ж) для аппроксимации (24)

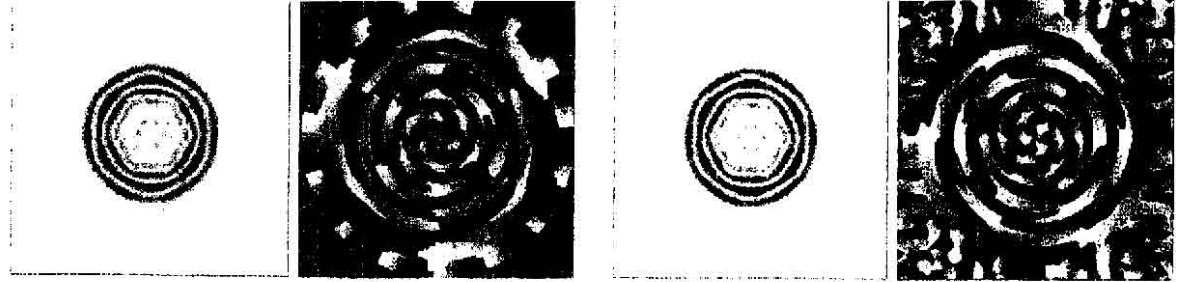
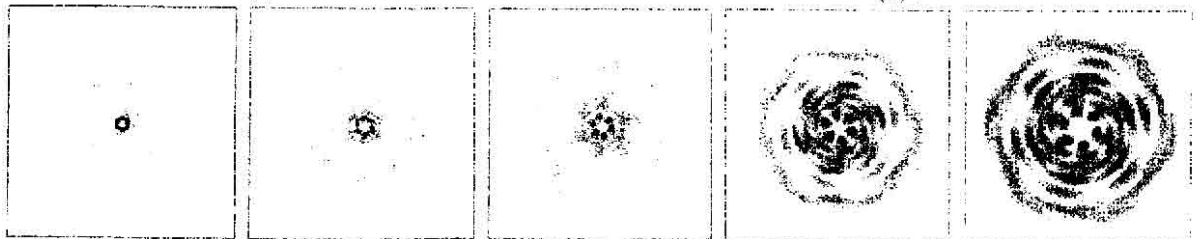
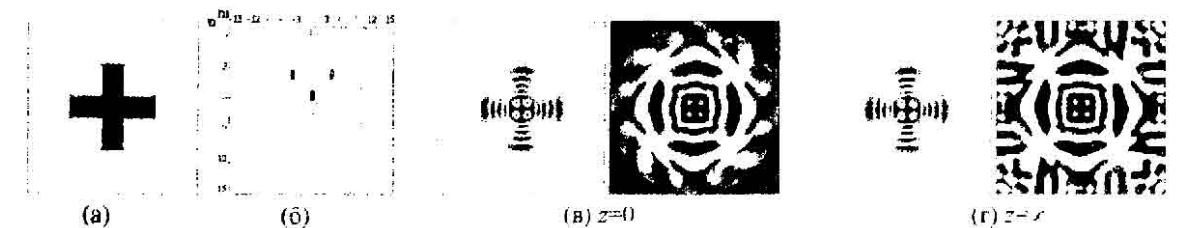
(a) $z=0$ (б) $z=f$ (в) $z=100$ мм(р) $z=150$ мм(д) $z=200$ мм(с) $z=250$ мм(ж) $z=300$ мм

Рис. 13. Распределение интенсивности и фазы во входной плоскости (а), распределение интенсивности и фазы в фокальной плоскости линзы (б), распределение интенсивности на различных расстояниях от входной плоскости z (в-ж)



(а)

(б)

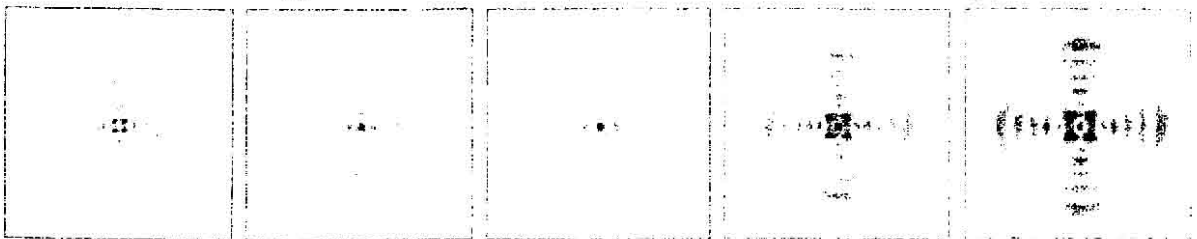
(в) $z=0$ (г) $z=f$ (д) $z=100$ мм(е) $z=150$ мм(ж) $z=200$ мм(з) $z=250$ мм(и) $z=300$ мм

Рис. 14. Исходное изображение (а), распределение коэффициентов ГЛ (б), распределение интенсивности и фазы во входной плоскости (в), распределение интенсивности и фазы в фокальной плоскости линзы (г), распределение интенсивности на различных расстояниях от входной плоскости z (д-и)

Интересно сравнить различные аппроксимации для одного и того же изображения, например, рис. 4, 5 и 14.

Заключение

В данной работе получены следующие результаты:

- адаптирован и исследован итеративный алгоритм для аппроксимации изображений модами ГЛ;
- показана возможность формирования инвариантных с точностью до масштаба и поворота световых пучков, поперечное сечение которых представляет собой заданное изображение;
- введено понятие групповой собственной функции, как суперпозиции мод ГЛ с одинаковыми

собственными числами, не изменяющей своей структуры после прохождения Фурье-каскада;

Благодарность

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96026)

Литература

1. Vasara A., Turunen J., Friberg A.T. *Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms.* J. Opt. Soc. Am. A 6 (11), 1748-1754 (1989)
2. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Shinkaryev M.V., Uspleniev G.V. *Trochoson.* Optics Communications, 91(3,4), 158-162 (1992)

3. Paterson C., Smith R. *Higher-order Bessel waves produced by axicon-type computer-generated holograms*. Optics Communications, 124, 123-130 (1996)
 4. Soifer V.A., Golub M.A., *Laser beam mode selection by computer-generated holograms*, CRC Press, Boca Raton, 1994
 5. Хонина С.Н., Котляр В.В., Сойфер В.А., *Дифракционные оптические элементы, согласованные с модами Гаусса-Лагерра*, Компьютерная оптика, Самара-Москва, No.17, с.25-31 (1997)
 6. Kotlyar V.V., Khonina S.N., Soifer V.A., *Generalized Hermite beams in free space*, Optik, v.108, No.1, pp.20-26 (1998)
 7. Chavez-Cerda S., McDonald G.S., New G.H.C. *Non-diffracting beams: travelling, standing, rotating and spiral waves*. Optics Commun. 123, 225-233 (1996)
 8. Kotlyar V.V., Soifer V.A., and Khonina S.N., *An algorithm for the generation of laser beams with longitudinal periodicity: rotating images*, Journal of Modern Optics, v.44, No.7, pp.1409-1416 (1997)
 9. E. Abramochkin, V. Volostnikov, *Spiral-type beams*. Opt. Comm., v.102, No.3-4, pp.336-350 (1993)
 10. Котляр В.В., Сойфер В.А., Хонина С.Н., *Алгоритм расчета ДОЭ для генерации вращающихся модальных изображений*, Автометрия, СО РАН, Новосибирск, No.5, с.46-54 (1997)
 11. Котляр В.В., Сойфер В.А., Хонина С.Н., *Вращение световых многомодовых пучков Гаусса-Лагерра в свободном пространстве*, Письма в ЖТФ, т.23, вып.17, с.1-6 (1997)
 12. Бахарев М.А., Котляр В.В., Павельев В.С., Сойфер В.А., Хонина С.Н. *Эффективное возбуждение пакетов мод идеального градиентного волновода с заданными фазовыми скоростями*, Компьютерная оптика, Самара-Москва, No.17, с.21-25 (1997)
 13. E. Abramochkin, V. Volostnikov, *Spiral-type beams: optical and quantum aspects*. Opt. Comm., v.125, pp.302-323 (1996)
 14. J.R. Fienup. *Phase retrieval algorithms. A comparison*. Appl. Opt., 1982, v.21, No.15, pp.2758-2769.
 15. Yariv A. *Optical electronics*, Kolt, Rinehart, and Winston, New York, 1985.
 16. Adams M.J. *An introduction to optical waveguides*, J. Wiley & Sons, Chichester, 1981.
-

Generation and transmission of images over a distance by means of the Gauss-Laguerre modes

S.N. Khonina

Image Processing Systems Institute of RAS

Abstract

An invariant image shall be formed in order to transmit an image over a distance through free space or a fiber. By invariant image, we mean the transverse distribution of the light field intensity, which is preserved with a precision up to the scale and rotation when propagating in space. This can be achieved by approximating the given image with a set of Gauss-Laguerre (GL) modes with the selected numbers. This article analyzes the conditions that the GL mode numbers shall satisfy in order to form stable or rotating images, as well as the images preserving their appearance in the Fourier plane. The paper provides the numerical examples of invariant images approximating a cross, a ring, a semiring, a triangle, and a segment.

Citation: Khonina SN. Generation and transmission of images over a distance by means of the Gauss-Laguerre modes. *Computer Optics* 1998; 18: 71-82.

References

- [1] Vasara A, Turunen J, Friberg AT. Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms. *J Opt Soc Am A* 1989; 6(11): 1748-1754.
- [2] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Shinkaryev MV, Uspleniev GV. Trochoson. *Opt Commun* 1992; 91(3-4): 158-162.
- [3] Paterson C, Smith R. Higher-order Bessel waves produced by axicon-type computer-generated holograms. *Opt Commun* 1996; 124: 123-130.
- [4] Soifer VA, Golub MA. Laser beam mode selection by computer-generated holograms. Boca Raton: CRC Press; 1994.
- [5] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA. Diffractive optical elements matched to Laguerre-Gaussian modes. *Computer Optics* 1997; 17: 25-31.
- [6] Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA. Generalized Hermite beams in free space. *Optik* 1998; 108(1): 20-26.
- [7] Chavez-Cerda S, McDonald GS, New GHC. Non-diffracting beams: travelling, standing, rotating and spiral waves. *Opt Commun* 1996; 123: 225-233.
- [8] Kotlyar VV, Soifer VA, Khonina SN. An algorithm for the generation of laser beams with longitudinal periodicity: rotating images. *J Mod Opt* 1997; 44(7): 1409-1416.
- [9] Abramochkin E, Volostnikov V. Spiral-type beams. *Opt Commun* 1993; 102(3-4): 336-350.
- [10] Kotlyar VV, Soifer VA, Khonina SN. Calculation algorithm of diffraction optical elements for generation of rotating modal images [In Russian]. *Avtometriya* 1997; 5: 46-54.
- [11] Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA. Rotation of multimode Gauss-Laguerre light beams in free space. *Tech Phys Lett* 1997; 23(9): 657-658.
- [12] Bakharev MA, Kotlyar VV, Pavelyev VS, Soifer VA, Khonina SN. Effective excitation of ideal gradient waveguide mode packages with pre-given phase velocities. *Computer Optics* 1997; 17: 21-25.
- [13] Abramochkin E, Volostnikov V. Spiral-type beams: optical and quantum aspects. *Opt Commun* 1996; 125: 302-323.
- [14] Fienup JR. Phase retrieval algorithms. A comparison. *Appl Opt* 1982; 21(15): 2758-2769.
- [15] Yariv A. *Optical electronics*. New York: Kolt, Rinehart, and Winston; 1985.
- [16] Adams MJ. *An introduction to optical waveguides*. Chichester: John Wiley & Sons; 1981.