

МЕТОДЫ И ЭЛЕМЕНТЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ ОПТИКИ

РАСЧЕТ БИНАРНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕШЕТОК И ОДНОМЕРНЫХ ДОО В РАМКАХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТЕОРИИ

Л.Л. Досколович

Институт систем обработки изображений РАН

Разработан градиентный метод расчета диэлектрических бинарных решеток. Метод основан на использовании для решения прямой задачи точного дифференциального метода. Получены аналитические матричные представления для градиента функции невязки. Приведены примеры расчета решеток для формирования 5-11 порядков с равной интенсивностью и однопорядковых решеток, концентрирующих излучение в +1-ом или -1-ом порядке. Рассмотрена возможность использования однопорядковых решеток для расчета более сложных фокусирующих ДОО. Приведены примера расчета высокоэффективных бинарных линз, основанные на замене зон линзы однопорядковыми решетками.

1. Введение

Широкое использование дифракционных оптических элементов (ДОО) для фокусировки и преобразования волновых фронтов делает актуальным разработку эффективных процедур расчета ДОО в рамках точной электромагнитной теории. Требования к компактности и эффективности оптических устройств приводят к необходимости расчета ДОО с малыми зонами рельефа порядка нескольких длин волн. Это делает невозможным использование известных итерационных и градиентных алгоритмов, разработанных для скалярного приближения Кирхгофа [1,2].

Особый интерес представляет электромагнитный расчет многопорядковых дифракционных решеток. Это связано как с широким использованием решеток в качестве светоделительных и мультиплицирующих элементов в устройствах оптических вычислений и связи, так и с представлением сложных ДОО в виде решеток с переменным шагом и ориентацией штрихов [3,4]. Представления ДОО в виде суперпозиции решеток позволяют расчет и анализ работы ДОО свести к набору задач расчета дифракционных решеток. В частности, в работах [5,6] расчет ДОО сводится к расчету решеток, концентрирующих излучение в 1-ом порядке, а в работе [7] – к расчету решеток с заданной фазой нулевого порядка.

В данной работе рассмотрен градиентный метод расчета бинарных диэлектрических решеток в рамках электромагнитной теории. Метод состоит в итерационном расчете бинарного профиля периода из условия формирования заданной интенсивности порядков. Метод применен к расчету бинарных однопорядковых решеток, концентрирующих излучение в одном порядке. На примере линз рассмотрена возможность использования таких решеток для расчета высокоэффективных бинарных ДОО.

2. Дифракция на пропускающих диэлектрических решетках

Рассмотрим решение задачи дифракции плоской волны с волновым вектором $\mathbf{k} = k(\sin(\theta), -\cos(\theta), 0)$,

где $k=2\pi/\lambda$, λ – длина волны, на диэлектрической бинарной решетке, имеющей на периоде $[0,d]$ K штрихов с координатами x_1, \dots, x_{2K} . Геометрия задачи дифракции приведена на Рис.1, где R_n и T_n – коэффициенты отражения и пропускания дифракционных порядков. Для приведенной геометрии задачи имеются три зоны с различной диэлектрической проницаемостью ϵ . В зонах 1 и 3, то есть при $y>a$, где a – высота штрихов решетки и при $y<0$, диэлектрическая проницаемость постоянна. Без ограничения общности будем считать, что в первой зоне $\epsilon=1$, а в третьей зоне $\epsilon>1$. Во второй зоне $y \in [0,a]$ – зоне модуляции, диэлектрическая проницаемость является функцией $\epsilon = \epsilon(x)$.

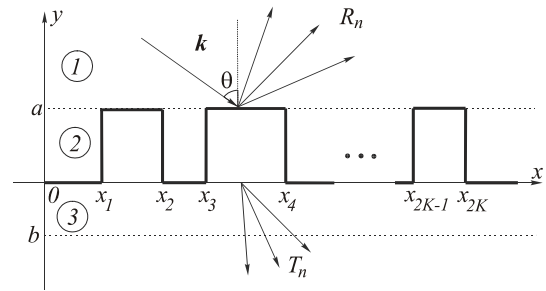


Рис.1. Геометрия задачи дифракции на бинарной диэлектрической решетке.

Рассмотрим дифракцию двух независимых ТЕ и ТМ поляризованных плоских волн. В первой ($y>a$) и третьей зонах ($y<0$) поле соответствует разложению Рэлея. При $y>a$ поле имеет вид [8]

$$u(x, y) = \exp(i(\alpha_0 x - \beta_0 y)) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp(i(\alpha_n x + \beta_n y)) \quad (1)$$

где

$$\begin{cases} \alpha_n = k_0 \sin(\theta) + n \frac{2\pi}{d}, & k_0^2 = \omega^2 / c^2 = (2\pi / \lambda_0)^2, \\ \beta_n = \sqrt{k_0^2 - \alpha_n^2} \end{cases} \quad (2)$$

а скалярная функция $u(x,y)$ соответствует компоненте $E_z(x,y)$ электрического поля для ТЕ-поляризации

и компоненте $H_z(x,y)$ магнитного поля для ТМ-поляризации. При $y < 0$ поле имеет вид [8]

$$u(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n \exp(i(\alpha_n x - \tilde{\beta}_n y)), \quad (3)$$

где $\tilde{\beta}_n = \sqrt{k_0^2 \varepsilon - \alpha_n^2}$.

Разложения Релея (1), (3) являются решениями уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

при $k^2 = k_0^2$ и $k^2 = k_0^2 \varepsilon$, соответственно. В зоне модуляции (при $y \in [0, a]$) поле описывается системой дифференциальных уравнений, различных для случаев ТЕ и ТМ поляризации. В дальнейшем будет рассмотрен только случай ТМ поляризации. Для случая ТЕ поляризации выкладки аналогичны. Для ТМ-поляризации функция $H_z(x,y)$ ищется из решения следующей системы уравнений [8]

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z(x,y)}{\partial y} = k^2 \tilde{E}(x,y), \\ \frac{\partial \tilde{E}(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k^2} \frac{\partial H_z(x,y)}{\partial x} \right) - H_z(x,y) \end{cases} \quad (5)$$

Функции $H_z(x,y)$ и $\tilde{E}_x(x,y)$ в (5) являются квазипериодическими [8];

$$\begin{cases} H_z(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_m(y) \exp(i\alpha_m x), \\ \tilde{E}_x(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{E}_m(y) \exp(i\alpha_m x). \end{cases} \quad (6)$$

В дальнейшем будем считать, что функции $\tilde{E}_x(x,y)$, $H_z(x,y)$ в зоне модуляции могут быть аппроксимированы отрезками своих рядов (6) с $2N+1$ членами. Подставляя (6) в (5) и разлагая функции $k^2(x) = k_0^2 \cdot \varepsilon(x)$ и $1/k^2(x)$ в ряды Фурье, получим, при учете $2N+1$ членов в (6), следующую систему $4N+2$ дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dH_p(y)}{dy} = \sum_{l=-N}^N \tilde{E}_l(y) c_{p-l}^{(1)}, \quad p = -\overline{N}, \overline{N}, \\ \frac{d\tilde{E}_p(y)}{dy} = \alpha_p \sum_{l=-N}^N \alpha_l c_{p-l}^{(2)} H_l(y) - H_p(y), \end{cases} \quad (7)$$

$p = -\overline{N}, \overline{N}$

где $c_n^{(1)}, c_n^{(2)}$ - коэффициенты Фурье;

$$c_n^{(1)} = \begin{cases} ik_0^2(\varepsilon-1) \cdot S_n, & n \neq 0 \\ k_0^2 + \frac{k_0^2(\varepsilon-1)}{d} \cdot Q, & n = 0 \end{cases},$$

$$c_n^{(2)} = \begin{cases} \frac{i(1/\varepsilon-1)}{2\pi k_0^2} \cdot S_n, & n \neq 0 \\ 1/k_0^2 + \frac{(1/\varepsilon-1)}{k_0^2 d} \cdot Q, & n = 0 \end{cases}, \quad (8)$$

$$S_n = \sum_{j=1}^{2K} (-1)^j \exp\left(-i \frac{2\pi}{d} n x_j\right), \quad (9)$$

$$Q = \sum_{j=1}^{2K} (-1)^j x_j \quad (4)$$

Таким образом, в зонах 1 и 3 решения имеют вид (1) и (3), а в зоне модуляции для поиска решения необходимо решать систему (7). Для поиска общего решения системы (7) необходимо найти $4N+2$ линейно-независимых частных решений. При отсутствии модуляции ($\varepsilon(x) = \varepsilon$) базисные решения системы (7) имеют вид:

$$\begin{cases} H_p^\pm(y) = \exp(\pm i\tilde{\beta}_p y), \quad p = -\overline{N}, \overline{N}, \\ \tilde{E}_p^\pm(y) = \pm \frac{i\tilde{\beta}_p}{k_0^2 \varepsilon} \exp(\pm i\tilde{\beta}_p y), \quad p = -\overline{N}, \overline{N} \end{cases} \quad (10)$$

Для согласования решения в зоне модуляции 2 с решением (10) в зоне 3, граничные условия для системы (7) определим в виде:

$$\begin{cases} H_{mj}^\mp(0) = \delta_{m-j}, \quad m, j = -\overline{N}, \overline{N} \\ \tilde{E}_{mj}^\mp(0) = \mp i\tilde{\beta}_m \delta_{m-j} / (k_0^2 \varepsilon), \quad m, j = -\overline{N}, \overline{N} \end{cases}, \quad (11)$$

где $\delta_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0. \end{cases}$

Для удобства выкладок введем $4N+2$ объединённых векторов начальных условий вида

$$\left(\begin{pmatrix} \mathbf{H}_{-N}^+(0) \\ \tilde{\mathbf{E}}_{-N}^+(0) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \mathbf{H}_N^+(0) \\ \tilde{\mathbf{E}}_N^+(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{-N}^-(0) \\ \tilde{\mathbf{E}}_{-N}^-(0) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \mathbf{H}_N^-(0) \\ \tilde{\mathbf{E}}_N^-(0) \end{pmatrix} \right) \quad (12)$$

Обозначим $\Psi_i(y)$, $i = \overline{1, 4N+2}$ вектора базисных функций

$$\left(\begin{pmatrix} \Psi_{-N}^+(y) \\ \tilde{\Psi}_{-N}^+(y) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \Psi_N^+(y) \\ \tilde{\Psi}_N^+(y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Psi_{-N}^-(y) \\ \tilde{\Psi}_{-N}^-(y) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \Psi_N^-(y) \\ \tilde{\Psi}_N^-(y) \end{pmatrix} \right), \quad (13)$$

полученные из решения системы (7) с начальными условиями (12). При этом общее решение системы принимает вид

$$H_m(y) = \sum_{j=-N}^N C^-_j \Psi_{mj}^-(y) + \sum_{j=-N}^N C^+_j \Psi_{mj}^+(y), \quad m = -\overline{N}, \overline{N}, \quad (14)$$

$$\tilde{E}_m(y) = \sum_{j=-N}^N C^-_j \tilde{\Psi}_{mj}^-(y) + \sum_{j=-N}^N C^+_j \tilde{\Psi}_{mj}^+(y), \quad m = -\overline{N}, \overline{N}. \quad (15)$$

Для определения коэффициентов пропускания T_n и отражения R_n в (1), (3) воспользуемся условиями непрерывности поля $H_z(x,y)$ и функции $\tilde{E}_x(x,y)$ на границах зоны модуляции при $y=0$ и при $y=a$. В результате получим

$$\mathbf{T} = 2 \exp(-i\beta_0 a) (\mathbf{H}_{01} - \mathbf{D}_\beta \cdot \mathbf{H}_{11})^{-1} \cdot \boldsymbol{\delta}, \quad (16)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}_{12}^{-1} \mathbf{H}_{11} \cdot \mathbf{T} + \exp(-2i\beta_0 a) \cdot \boldsymbol{\delta}, \quad (17)$$

где матрицы \mathbf{H}_{01} , \mathbf{H}_{11} , \mathbf{H}_{12} , \mathbf{D}_β имеют вид

$$\begin{aligned} H_{01\ p j} &= \Psi_{p j}^-(a), \quad H_{11\ p j} = \tilde{\Psi}_{p j}^-(a), \\ H_{12\ p j} &= \delta_{p-j} \cdot \frac{i\beta_p}{k_0^2} \exp(i\beta_p a), \end{aligned} \quad (18)$$

$$D_{\beta\ p j} = \delta_{p-j} \cdot k_0^2 / i\beta_p, \quad p, j = -\overline{N}, \overline{N},$$

а $\boldsymbol{\delta}$ - вектор столбец, центральный элемент которого равен единице, а остальные элементы равны нулю.

Решение системы дифференциальных уравнений (7) с постоянными коэффициентами с граничным условием \mathbf{X}_0 может быть записано в компактном матричном виде;

$$\begin{pmatrix} \Psi_p^-(y) \\ \tilde{\Psi}_p^-(y) \end{pmatrix} = \exp(\mathbf{A}^{TM} \cdot y) \mathbf{X}_0 \quad (19)$$

где

$$\mathbf{A}^{TM} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}\mathbf{U} & \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 & \mathbf{N}\mathbf{U} \end{pmatrix} - \quad (20)$$

матрица системы (7). В уравнении (20) $\mathbf{N}\mathbf{U}$ – нулевые матрицы, а \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 – матрицы из Фурье коэффициентов:

$$\begin{aligned} F_{1i,j} &= c_{i-j}^{(1)}, \quad F_{2i,j} = \\ &= \alpha_{-(N+1)+i} \alpha_{-(N+1)+j} c_{i-j}^{(2)} - \delta_{i-j}, \\ &i, j = \overline{1, 2N+1} \end{aligned} \quad (21)$$

Матричное представление (19) позволяет компактно выразить матрицы \mathbf{H}_{01} и \mathbf{H}_{11} в (16), (17) через матрицу системы и граничные условия (12) в виде:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_{01} \\ \mathbf{H}_{11} \end{pmatrix} = \exp(\mathbf{A}^{TM} \cdot a) \cdot \mathbf{B}\mathbf{C}, \quad (22)$$

где матрица $\mathbf{B}\mathbf{C}$ составлена из второй половины векторов начальных условий в (12);

$$\mathbf{B}\mathbf{C} = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{H}_{-N}^-(0) \\ \tilde{\mathbf{E}}_{-N}^-(0) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \mathbf{H}_N^-(0) \\ \tilde{\mathbf{E}}_N^-(0) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{D}\mathbf{E} \end{pmatrix} \quad (23)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица, а $\mathbf{D}\mathbf{E}$ – диагональная матрица с элементами $-i\tilde{\beta}_j / k_0^2 \varepsilon$, $j = -\overline{N}, \overline{N}$.

3. Градиентный метод

В данном пункте рассмотрен градиентный метод решения обратной задачи расчета бинарной диэлектрической решетки. Метод состоит в расчете координат штрихов (x_1, \dots, x_{2K}) профиля решетки (см. Рис. 1) из условия формирования заданных интенсивностей дифракционных порядков \tilde{T}_n , $n = -\overline{M}, \overline{M}$, соответствующих прошедшим волнам в уравнении (3). Интенсивности дифракционных порядков пропорциональны квадратам модулей коэффициентов пропускания T_n в (3);

$$I_n = t_n \cdot |T_n|^2 \quad (24)$$

где $t_n = \frac{\cos(\tilde{\theta}_n)}{\sqrt{\varepsilon} \cos(\theta)}$ для ТМ – поляризации, а углы

$\tilde{\theta}_n$ соответствуют направлениям прошедших волн в уравнении (3).

Для построения градиентной процедуры расчета профиля дифракционной решетки введем некоторую функцию ошибки $\varepsilon(\mathbf{p})$, характеризующую отличие рассчитанных значений интенсивности I_n в дифракционных порядках от требуемых значений \tilde{T}_n :

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{I}(\mathbf{p}), \tilde{\mathbf{I}}), \quad (25)$$

где $\mathbf{p} = (x_1, \dots, x_{2K})$ – вектор координат штрихов решетки, K – число штрихов на периоде, $\mathbf{I} = (I_n)_{-M}^M$, $\tilde{\mathbf{I}} = (\tilde{T}_n)_{-M}^M$, – вектора рассчитанных и требуемых значений интенсивности в порядках.

Градиентная процедура минимизации функции ошибки $\varepsilon(\mathbf{p})$ состоит в итерационной коррекции параметров профиля решетки по правилу:

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_n - t \cdot \nabla \varepsilon(\mathbf{p}) \quad (26)$$

где n – номер итерации, t -шаг градиентного алгоритма. Рассмотрим вычисление градиента функции ошибки $\nabla \varepsilon(\mathbf{p})$ для случая ТМ поляризации. Согласно

к (25) частные производные $\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial x_m}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial x_m} &= \sum_{j=-M}^M \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})}{\partial I_j} \frac{\partial I_j(\mathbf{p})}{\partial x_m} = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{j=-M}^M \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})}{\partial I_j} t_j T_j^* \frac{\partial T_j(\mathbf{p})}{\partial x_m} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Уравнение (27) удобно представить в виде реальной части скалярного произведения

$$\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial x_m} = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{p})}{\partial x_m}, \mathbf{L} \right), \quad (28)$$

векторов

$$\frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{p})}{\partial x_m} = \left(\frac{\partial T_j(\mathbf{p})}{\partial x_m} \right)_{-M}^M$$

и

$$\mathbf{L} = (\mathbf{L}_j)_{-M}^M, \quad L_j = \sum_{j=-M}^M \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})}{\partial I_j} t_j T_j. \quad (29)$$

Вектор производных $\partial \mathbf{T}(\mathbf{p}) / \partial x_m$ несложно получить из (16) в виде;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_m} &= \frac{\partial}{\partial x_m} (2 \cdot \exp(-i\beta_0 a) \times \\ &\times (\mathbf{H}_{01} - \mathbf{D}_\beta \cdot \mathbf{H}_{11})^{-1} \cdot \boldsymbol{\delta}) = \\ &= -(\mathbf{H}_{01} - \mathbf{D}_\beta \cdot \mathbf{H}_{11})^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{H}_{01}}{\partial x_m} - \mathbf{D}_\beta \cdot \frac{\partial \mathbf{H}_{11}}{\partial x_m} \right) \mathbf{T} \end{aligned} \quad (30)$$

Для расчета производных $\partial \mathbf{H}_{01} / \partial x_m$, $\partial \mathbf{H}_{11} / \partial x_m$ продифференцируем уравнение (22):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{H}_{01}}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \mathbf{H}_{11}}{\partial x_m} \end{pmatrix} &= \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\exp(\mathbf{A}^{TM} \cdot a) \cdot \mathbf{BC} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} (\mathbf{A}^{TM})^n \right) \cdot \mathbf{BC} = \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{\partial}{\partial x_m} (\mathbf{A}^{TM})^n \right) \cdot \mathbf{BC}. \end{aligned} \quad (31)$$

При суммировании ряда в уравнении (31) производные $\frac{\partial (\mathbf{A}^{TM})^n}{\partial x_m}$ следует вычислять с использованием рекуррентной формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_m} (\mathbf{A}^{TM})^n &= \mathbf{A}^{TM} \cdot \frac{\partial}{\partial x_m} (\mathbf{A}^{TM})^{n-1} + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{A}^{TM}}{\partial x_m} \cdot (\mathbf{A}^{TM})^{n-1} \end{aligned} \quad (32)$$

При этом расчет производных матриц \mathbf{H}_{01} и \mathbf{H}_{11} по порядку сложности эквивалентен вычислению экспоненты в степени матрицы через ряд. Для расчета производной $\partial \mathbf{A}^{TM} / \partial x_m$ воспользуемся представлением матрицы \mathbf{A}^{TM} в уравнении (20). Дифференцируя (20), получим

$$\frac{\partial \mathbf{A}^{TM}}{\partial x_m} = \begin{pmatrix} \mathbf{NU} & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x_m} & \mathbf{NU} \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где \mathbf{NU} – нулевые матрицы, а матрицы $\partial \mathbf{F}_i / \partial x_m$, $i = 1, 2$ могут быть получены из (21) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x_m} &= \frac{\partial c_{l-j}^{(1)}}{\partial x_m} = (-1)^m \frac{k_0^2 (\varepsilon - 1)}{d} \times \\ &\times \exp\left(-i \frac{2\pi}{d} (l-j)x_m\right), \quad l, j = \overline{1, 2N+1} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x_m} &= \alpha_{-(N+1)+l} \alpha_{-(N+1)+j} \frac{\partial c_{l-j}^{(2)}}{\partial x_m} = \\ &= \alpha_{-(N+1)+l} \alpha_{-(N+1)+j} (-1)^m \frac{(1/\varepsilon - 1)}{k_0^2 d} \times \\ &\times \exp\left(-i \frac{2\pi}{d} (l-j)x_m\right), \quad l, j = \overline{1, 2N+1} \end{aligned} \quad (35)$$

Таким образом, компоненты вектора градиента функции ошибки имеют вид реальной части скалярного произведения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial x_m} &= 2 \operatorname{Re} \left((\mathbf{H}_{01} - \mathbf{D}_\beta \cdot \mathbf{H}_{11})^{-1} \times \right. \\ &\times \left. \left(\mathbf{D}_\beta \frac{\partial \mathbf{H}_{11}}{\partial x_m} - \frac{\partial \mathbf{H}_{01}}{\partial x_m} \right) \mathbf{T}, \mathbf{L} \right), \end{aligned} \quad (36)$$

где вектор \mathbf{T} определен уравнением (16), вектор \mathbf{L} определен уравнением (29), матрицы \mathbf{H}_{01} и \mathbf{H}_{11} аналитически выражаются через матрицу системы (7) и граничные условия (12) в виде (22), а матрицы производных $\partial \mathbf{H}_{01} / \partial x_m$, $\partial \mathbf{H}_{11} / \partial x_m$ определены в уравнениях (31)-(34).

Высота профиля решетки a также может рассматриваться как параметр оптимизации. Производная функции ошибки по параметру a также имеет вид (36), где матрицы $\partial \mathbf{H}_{01} / \partial a$, $\partial \mathbf{H}_{11} / \partial a$ могут быть получены из (22) в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{H}_{01}}{\partial a} \\ \frac{\partial \mathbf{H}_{11}}{\partial a} \end{pmatrix} &= \frac{\partial}{\partial a} \left(\exp(\mathbf{A}^{TM} \cdot a) \cdot \mathbf{BC} \right) = \\ &= \mathbf{A}^{TM} \cdot \exp(\mathbf{A}^{TM} \cdot a) \cdot \mathbf{BC} \end{aligned} \quad (37)$$

Отметим, что для случая ТЕ поляризации вычисления аналогичны, при этом компоненты градиента также имеют вид (36), (37), где матрицы \mathbf{H}_{01} и \mathbf{H}_{11} выражаются через матричную экспоненту.

Таблица 1. Результаты градиентного расчета бинарных диэлектрических решеток в электромагнитном приближении ($d=5.5\lambda_0$, $\varepsilon=2.25$, $\theta=0$).

Число порядков M	Число штрихов K	Высота штрихов (a/λ_0)	Координаты профиля	E (%)	δ (%)
ТМ-поляризация					
5	2	0.9	(0.1820, 0.4822), (0.5544, 0.8546)	80.1	3.1
7	2	0.9	(0.2454, 0.4367), (0.5999, 0.7912)	85.1	1.0
9	3	1.56	(0.0925, 0.1963), (0.3728, 0.4786), (0.6155, 0.7185)	96.1	0.6
11	3	1.6	(0.1515, 0.3435), (0.4845, 0.5753), (0.7162, 0.9046)	94.0	5.1
ТЕ-поляризация					
5	2	0.8	(0.1798, 0.4816), (0.5550, 0.8567)	80.7	2.5

7	2	0.875	(0.2579, 0.4297), (0.6070, 0.7787)	83.8	1.1
9	3	1.0	(0.0091, 0.1924), (0.3145, 0.4811), (0.7769, 0.9547)	89.7	3.6
11	3	1.57	(0.0444, 0.3390), (0.5033, 0.5567), (0.8259, 0.8792)	91.5	4.3

3. Результаты расчетов решеток

Разработанный градиентный метод был применен к расчету бинарных диэлектрических решеток ($\varepsilon=2.25$) решеток для формирования $M=2N+1$ равных порядков. В качестве функции невязки была использована квадратичная функция ошибки

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \sum_{j=-N}^N (I_j(\mathbf{p}) - \tilde{I}_j)^2 \quad (38)$$

Для характеристики работы решеток были использованы значения энергетической эффективности

$$E(M) = \sum_{j=-N}^N I_j \quad (39)$$

и среднеквадратичной ошибки формирования заданной равной интенсивности порядков

$$\delta(M) = \frac{1}{\bar{I}} \left[\frac{1}{M} \sum_{j=-N}^N (I_j - \bar{I})^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (40)$$

где $\bar{I} = E(M)/M$ - среднее значение.

Результаты расчетов решеток при нормальном падении ($\theta=0$) и периоде $d=5.5\lambda_0$ приведены в таблице 1. Следует отметить, что при указанных параметрах решетки расчет в рамках скалярного приближения дает недопустимо высокую ошибку $\delta \sim 100\%$ [9]. Данные таблицы 1 показывают, что использование градиентной процедуры в рамках электромагнитной теории позволяет снизить среднеквадратичную ошибку δ до 1-4% при энергетической эффективности 80-94%.

Таблица 2. Результаты градиентного расчета бинарных дефлекторов, концентрирующих излучение в -1 -ом порядке ($\varepsilon=2.25, \theta=0$, ТЕ поляризация).

Период (d/λ_0)	Число штрихов K	Высота штрихов (a/λ_0)	Координаты профиля	E (%)
3.5	2	1.68	(0.2596, 0.4378, 0.6082, 0.6754, 0.8469, 0.8780)	83.5
4.5	4	1.69	(0.2617, 0.4009, 0.5426, 0.6043, 0.7001, 0.7361, 0.8521, 0.8734)	87.7
5.5	5	1.78	(0.2714, 0.3982, 0.4997, 0.5565, 0.6100, 0.6473, 0.7243, 0.7560, 0.8793, 0.8984)	87.6
6.5	5	1.5	(0.1809, 0.4334, 0.4717, 0.5302, 0.6113, 0.6530, 0.7566, 0.7845, 0.8997, 0.9142)	80.0

В скалярном приближении распределение интенсивности в порядках дифракции бинарной решетки может быть только симметричным. В работе [10] показано, что при параметрах $d=\lambda_0$, $\theta=30^\circ$, удовлетворяющих условию Брегга $2d \cdot \sin(\theta) = m \cdot \lambda_0$ при $m=1$, простейшая бинарная решетка с одним штрихом длины $d/2$ на периоде d позволяет сконцентрировать излучение в -1 -ом порядке. Такая асимметрия возможна не только при малых периодах. В таблице 2 приведены результаты градиентного расчета бинарных дефлекторов с максимумом в -1 -ом порядке при нормальном падении для случая ТЕ - по-

ляризации. В качестве функции ошибки была использована квадратичная функция ошибки

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = (1 - I_{-1}(\mathbf{p}))^2 \rightarrow \min.$$

Таблица 2 показывает, что в -1 -ом порядке можно собрать более 80% энергии и при «больших» периодах. При этом для достижения высокой (>80%) эффективности на периоде $d=p\lambda_0$ необходимо порядка p штрихов.

4. Синтез ДОЭ на основе однопорядковых решеток

Решетки, позволяющие сконцентрировать излучение в -1 -ом порядке, имеют большое практиче-

ское значение. Рассмотрим возможность использования подобных решеток для расчета различных фокусирующих ДООЭ, например линз. В скалярном приближении для расчета ДООЭ обычно используется приближение тонкого оптического элемента, описывающее ДООЭ через фазовую функцию. Пусть $\varphi(x)$, $x \in [0, d]$ - фазовая функция ДООЭ, рассчитанная в приближении геометрической оптики из условия фокусировки в заданную область. Приближение геометрической оптики основывается на уравнении наклонов, определяющем направление преломленного луча через фазовую функцию ДООЭ в виде

$$\begin{aligned} \sin(\theta_r) &= \frac{1}{k_0 \sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d\varphi_0(x)}{dx} \right) = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi} \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{d\varphi_0(x)}{dx} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

где $\lambda = \lambda_0 / \sqrt{\varepsilon}$ - длина волны в среде, $\varphi_0(x) = k_0 \sin(\theta) \cdot x$ - фазовая функция освещающего пучка при $y=0$. Уравнение (42) совпадает с уравнением решетки

$$\sqrt{\varepsilon} \cdot \sin(\theta_m) = \sin(\theta) + m \lambda_0 / d$$

при периоде $d = 2\pi / \left| \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|$ и $m = \pm 1$. Знак m определяется знаком производной фазы; $m = \text{sign} \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} \right)$. Данное значение периода совпадает с размером зоны ДООЭ Δx , определяемой из условия

$$\begin{aligned} \Delta x &= 2\pi \approx \left| \frac{d\varphi(x)}{dx} \right| \Delta x \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta x &= 2\pi / \left| \frac{d\varphi(x)}{dx} \right| \end{aligned}$$

Таким образом, приближение геометрической оптики предполагает, что каждая зона ДООЭ работает как «однопорядковая решетка», концентрирующая излучение в -1 -ом или $+1$ -ом порядке. В скалярном приближении Кирхгофа однопорядковой решетке соответствуют левая или правая пилообразная решетка. При малых зонах геометрическое и скалярное приближения неработоспособны, поскольку неработоспособной оказывается пилообразная решетка. В частности, для правой пилообразной решетки с высотой $a = \lambda_0 / (\sqrt{\varepsilon} - 1)$ интенсивность 1 -го порядка стремится к нулю при $d \rightarrow \lambda_0$ (см. Рис.2). Можно предположить, что при замене зон ДООЭ бинарными решетками, рассчитанными в электромагнитном приближении из условия максимизации -1 -го или 1 -го порядка, получится высокоэффективный бинарный ДООЭ. Хотя формулы (42), (43) являются лишь эвристическим обоснованием метода замены зон ДООЭ «однопорядковой» решеткой, на практике метод оказывается работоспособным. В частности, в работе [5] рассмотрен расчет внеосевого сегмента

бинарной отражающей линзы, имеющей для случая ТЕ поляризации эффективность $\sim 90\%$.

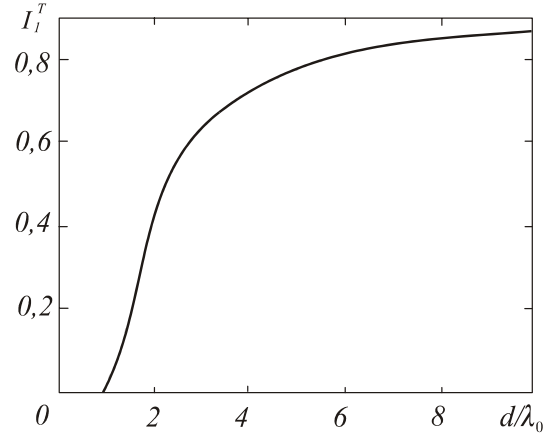


Рис. 2. Интенсивность 1 -го порядка правой пилообразной решетки в зависимости от длины периода для ТЕ-поляризации при $\varepsilon=2.25$, $\theta=0$ и высоте профиля $a = \lambda_0 / (\sqrt{\varepsilon} - 1)$.

Расчет линзы в [5] основывался на замене зон непрерывной дифракционной линзы простейшей отражающей бинарной решеткой с одним штрихом. Для ТЕ-поляризации при $d \sim \lambda_0$, $\theta \sim 30^\circ$ и высоте штриха $a \sim 0.25\lambda_0$ такая решетка концентрирует излучение в -1 порядке [5].

Проиллюстрируем работоспособность метода на примере расчета преломляющей линзы. Фазовая функция дифракционной линзы имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \text{mod}_{2\pi} \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} (-x \sin(\theta) - \right. \\ &\left. - \sqrt{\varepsilon} \sqrt{(x-x_0)^2 + f^2 + c} \right), x \in [0, d] \end{aligned} \quad (44)$$

где (x_0, f) - координаты фокуса. При $d=20\lambda_0$, $\theta=30^\circ$ и $(x_0, f) = (-20\lambda_0, -85\lambda_0)$ фазовая функция линзы имеет 20 зон с размером $0.89\lambda_0 \leq \Delta x \leq 1.17\lambda_0$. Для расчета бинарной линзы требуется записать в зонах линзы бинарную решетку, имеющую максимум в -1 -ом порядке. При $\theta=30^\circ$ и $\Delta x \sim \lambda_0$ достаточно простейшей бинарной решетки с одним штрихом

$$h_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \Delta x / 2) \\ a \cdot \lambda_0, & x \in [\Delta x / 2, \Delta x) \end{cases} \quad (45)$$

В частности, для ТМ поляризации и $\varepsilon=2.25$ решетка (45) концентрирует излучение в -1 порядке при высоте штриха $a \sim 2\lambda_0$ [10]. На Рис. 3 и 4а) приведены рассчитанный бинарный рельеф линзы и распределение интенсивности

$$\begin{aligned} I(x, f) &= \left| \text{Re} \left(E_x(x, f) \cdot H_z^*(x, f) \right) \right| = \\ &= \frac{1}{k_0 \varepsilon} \left| \text{Im} \left(\left(\sum_{n=-N}^N T_n \tilde{\beta}_n \cdot \exp(i(\alpha_n x - \tilde{\beta}_n f)) \right) \times \right. \right. \\ &\left. \left. \times \left(\sum_{n=-N}^N T_n \exp(i(\alpha_n x - \tilde{\beta}_n f)) \right)^* \right) \right| \end{aligned} \quad (46)$$

в фокальной плоскости $y=-85\lambda_0$ при $N=57$.

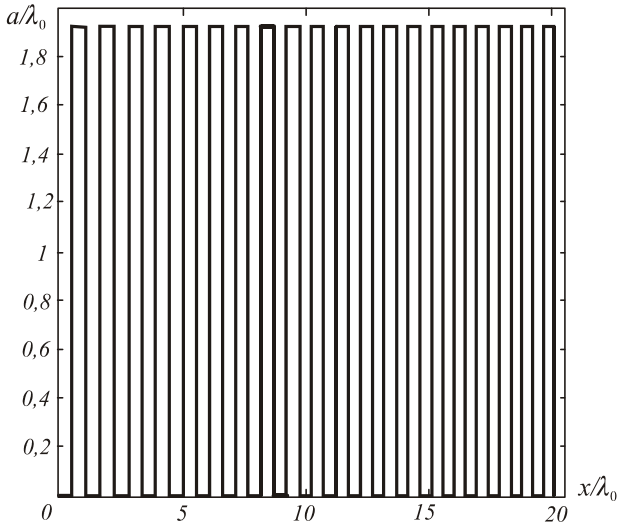


Рис. 3. Бинарная линза с апертурой $d=20\lambda_0$ для фокусировки точку $(x_0, f)=(-20\lambda_0, -85\lambda_0)$ при $\theta=30^\circ$, $\varepsilon=2.25$.

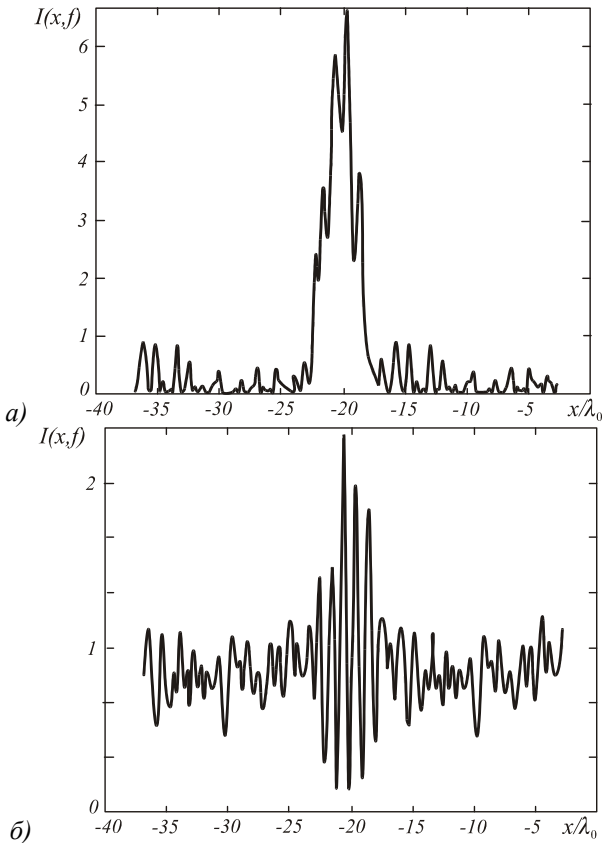


Рис. 4. Распределения интенсивности в фокальной плоскости (при $y=-85\lambda_0$) (а) для бинарной линзы на рис. 3, (б) для непрерывной линзы (47) для ТМ-поляризации.

Указанное выражение для интенсивности $I(x, f)$ пропорционально у-компоненте вектора Умова-Пойнтинга. Для сравнения на Рис. 4б) приведено распределение интенсивности для линзы с непрерывным рельефом

$$h(x) = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin(\theta)}}{\varepsilon - \cos(\theta)\sqrt{\varepsilon - \sin(\theta)}} \times \text{mod}_{\lambda_0} \left(c - x \sin(\theta) - \sqrt{\varepsilon} \sqrt{(x - x_0)^2 + f^2} \right), \quad (47)$$

$$x \in [0, d]$$

рассчитанным в приближении тонкого оптического элемента.

Распределение интенсивности на Рис. 4б) оказывается размазанным в отличие от острого пика с шириной $5\lambda_0$, сформированного бинарной линзой. Простейшая решетка (45) с одной ступенькой может быть использована только при угле падения $\theta \sim 30^\circ$ и при размерах зон близких к длине волны. Большие, по сравнению с длиной волны зоны, требуют более сложных решеток с несколькими штрихами. При этом актуален расчет однопорядковых решеток для некоторого интервала периодов $[d_{\min}, d_{\max}]$, определяющего изменение размера зон ДОО. Расчет бинарной решетки с максимальной интенсивностью $I_{-1}(\mathbf{p}, d)$ в -1 -ом порядке при $d \in [d_{\min}, d_{\max}]$ может быть проведен рассмотренным градиентным методом с функцией ошибки определенной, например, в виде

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \int_{d_{\min}}^{d_{\max}} (1 - I_{-1}(\mathbf{p}, \xi))^2 d\xi \rightarrow \min, \quad (48)$$

где \mathbf{p} – вектор координат штрихов решетки. Приведем пример расчета сложной бинарной линзы с большими зонами и большим интервалом изменения размеров зон. При размере апертуры $d=30\lambda_0$, координатах точки фокусировки $(x_0, f)=(0, -130\lambda_0)$, угле падения $\theta=10^\circ$ и $\varepsilon=2.25$ линза с непрерывным рельефом (47) имеет 10 полных зон с размером от $5\lambda_0$ в начале апертуры до $2\lambda_0$ на краю апертуры. Для расчета бинарной линзы требуется рассчитать решетку из условия максимума интенсивности в -1 -ом порядке для интервала периодов $[2\lambda_0, 5\lambda_0]$. Градиентным методом для случая ТМ-поляризации была рассчитана решетка с тремя штрихами из условия максимума -1 -го порядка для указанного интервала периодов при функции ошибки (48). Нормированные на период координаты штрихов решетки равны $\mathbf{p}=(0.0429, 0.2981, 0.4556, 0.5771, 0.7745, 0.8276)$ при высоте штрихов $a=2.07\lambda_0$. Данная решетка при $d \in [2\lambda_0, 5\lambda_0]$ концентрирует в -1 -ом порядке не менее 80% энергии.

На Рис.5а) приведен профиль бинарной линзы, полученный заменой зон линзы (47) рассчитанной бинарной решеткой, а на Рис. 5б) – распределение интенсивности, сформированное бинарной линзой при $y=-130\lambda_0$.

Для сравнения на Рис. 5а), 5б) также показаны профиль непрерывной дифракционной линзы (47) и распределение интенсивности

$$I(x, f) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0 f} \left| \int_0^d \exp \left(-2\pi i \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0 f} x u \right) du \right|^2 =$$

$$= \frac{d^2 \sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0 f} \text{Sinc}^2 \left(\frac{\pi \sqrt{\varepsilon} \cdot d}{\lambda_0 f} \right)$$

где $Sinc(x) = \sin(x)/x$, формируемое в скалярном приближении Кирхгофа в фокальной плоскости идеального сферического фронта.

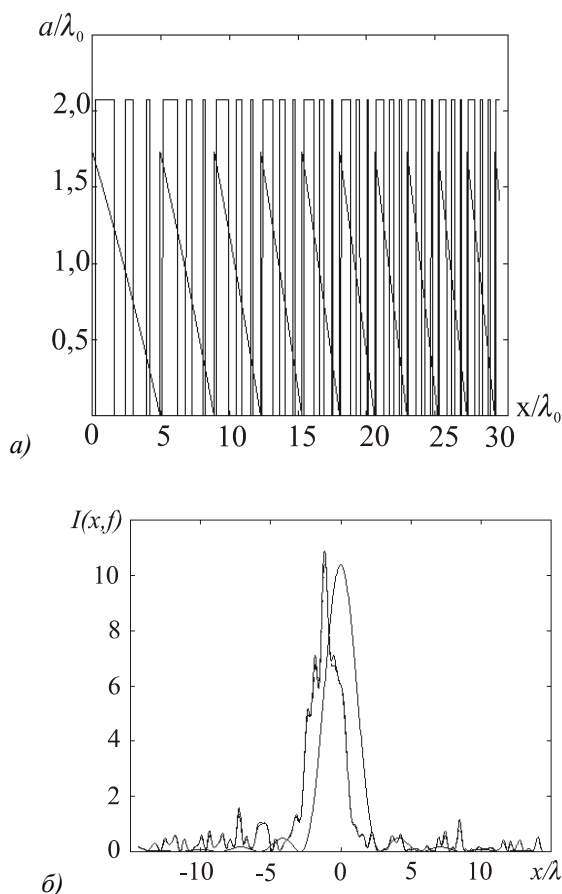


Рис. 5. а) Бинарная линза ($d=30\lambda_0$) для фокусировки в точку $(x_0, f) = (0, -130\lambda_0)$ при $\theta=10^\circ$, $\varepsilon=2.25$ и непрерывная линза (47), б) Распределение интенсивности, сформированное бинарной линзой для ТМ – поляризации и распределение интенсивности при идеальном сферическом фронте.

Рисунок 5 показывает хорошую работоспособность рассчитанной бинарной линзы и демонстрирует возможность замены задачи расчета ДОЭ су-

щественно более простой задачей расчета однопорядковой решетки также и при большом диапазоне изменения размеров зон.

Литература

1. V.Soifer, V.Kotlyar, L. Doskolovich. *Iterative Methods for Diffractive Optical Elements Computation*. // London, Taylor&Francis Ltd, 1997.
2. Bringdhal O., Wyrowski F. *Digital holography – computer-generated holograms*. // Progress in Optics, Ed. Wolf E., v.28, pp.1-86, North Holland, Amsterdam, 1990.
3. С.Т. Бобров, Г.И. Грейсх, Ю.Г. Туркевич. *Оптика дифракционных элементов и систем*. // Ленинград, «Машиностроение», 1986, 223с.
4. Y.Sheng, D.Feng, S.Larochelle. Analysis and synthesis of circular diffractive lens with local linear grating model and rigorous coupled-wave theory. // J.Opt.Soc.Am. A, 1997, **14**(7), pp.1562-1568.
5. Veldkamp W.B., Swanson G.C., Shaver D.C. High efficiency binary lenses // Optics Communic., **5** (6), 1984, pp.353-358.
6. P. Blair, M.R. Taghizaden, W. Parkes, C.D.W. Wilkinson. High-efficiency binary fan-out gratings by modulation of a high-frequency carrier grating. // Appl.Opt., 1995, **34**(14), pp.2406-2413.
7. Z. Zhou, T.J. Drabik. Optimized binary, phase-only, diffractive optical element with subwavelength features for 1.55 μ m. // J.Opt.Soc.Am. A, 1995, **12**(5), pp.1104-1113.
8. *Electromagnetic Theory of Gratings: Topics in current physics*, **22**, Ed. by R.Petit, N.Y.: Springer-Verlag, 1980.
9. Л.Л. Досколович. Градиентный метод расчета многопорядковых бинарных диэлектрических решеток в электромагнитном приближении. // Сб. Компьютерная Оптика, N_18, 1998, с.82-90.
10. M.G. Moharam, T.K. Gaylord. Diffraction analysis of dielectric surface-relief gratings. // J.Opt.Soc.Am., 1982, **72**(10), pp.1385-1392.

Design of binary dielectric gratings and one-dimensional DOEs in the framework of electromagnetic theory

L.L. Doskolovich
Image Processing Systems Institute of RAS

Abstract

The authors have developed a gradient method for the design of dielectric binary gratings. The method is based on using an exact differential method to solve the primal problem. Analytical matrix representations are obtained for the residual function gradient. The article provides the examples of the design of gratings for the generation of 5-11 orders with equal intensity and single-order gratings that concentrate radiation in the +1st or -1st order. The paper considers the possibility of using single-order gratings to design more complex focusing DOEs. It provides an example of design of high-performance binary lenses based on replacing lens zones with single-order gratings.

Citation: Doskolovich LL. Design of binary dielectric gratings and one-dimensional DOEs in the framework of electromagnetic theory. *Computer Optics* 1999; 19: 21 - 28.

References

- [1] V. Soifer, V. Kotlyar, L. Doskolovich. *Iterative Methods for Diffractive Optical Elements Computation*. // London, Taylor&Francis Ltd, 1997.
- [2] Bringdhal O., Wyrowski F. *Digital holography –computer-generated holograms*. // *Progress in Optics*, Ed. Wolf E., v.28, pp.1-86, North Holland, Amsterdam, 1990.
- [3] Bobrov ST, Greisukh GI, Turkevich YG. *Optics of diffractive elements and systems*. Leningrad: Mashinostroenie Publisher; 1986: 223.
- [4] Y. Sheng, D. Feng, S. Laroche. Analysis and synthesis of circular diffractive lens with local linear grating model and rigorous coupled-wave theory. // *J. Opt. Soc. Am. A*, 1997, 14(7), pp.1562-1568.
- [5] Veldkamp W.B., Swanson G.C., Shaver D.C. High efficiency binary lenses // *Optics Communic.*, 5 (6), 1984, pp.353-358.
- [6] P. Blair, M.R. Taghizaden, W. Parkes, C.D.W. Wilkinson. High-efficiency binary fan-out gratings by modulation of a high-frequency carrier grating. // *Appl. Opt.*, 1995, 34(14), pp.2406-2413.
- [7] Z. Zhou, T.J. Drabik. Optimized binary, phaseonly, diffractive optical element with subwavelength features for 1.55 μ m. // *J. Opt. Soc. Am. A*, 1995, 12(5), pp.1104-1113.
- [8] *Electromagnetic Theory of Gratings: Topics in current physics*, 22, Ed. by R. Petit, N.Y.: SpringerVerlag, 1980.
- [9] Doskolovich LL. Gradient method for multi-order binary dielectric gratings computation in the frame of electromagnetic theory. *Computer Optics* 1998; 18: 82-90.
- [10] M.G. Moharam, T.K. Gaylord. Diffraction analysis of dielectric surface-relief gratings. // *J. Opt. Soc. Am.*, 1982, 72(10), pp.1385-1392.