

РАСЧЕТ СПЕКТРАЛЬНЫХ ДОО

Л.Л. Досколович*, О.И. Петрова⁺

* Институт систем обработки изображений РАН,

⁺ Тольяттинский политехнический институт

Разработан метод расчета спектральных фазовых дифракционных решеток для разделения трех длин волн по трем различным дифракционным порядкам. Метод применен к расчету двухволновых дифракционных оптических элементов, предназначенных для разделения и заданного преобразования двух спектральных компонент освещающего пучка.

1. Введение

Расчету и использованию дифракционных оптических элементов (ДОО) для преобразования и фокусировки монохроматического излучения посвящено большое количество работ. Для работы с различными длинами волн известны спектральные дифракционные решетки (color separation gratings), позволяющие разделить три длины волн

$$\begin{aligned} \lambda_0, \lambda_{+1} &= \lambda_0 N / (N+1), \\ \lambda_{-1} &= \lambda_0 N / (N-1) \end{aligned} \quad (1)$$

где N – целое число, по 0, +1 и -1 дифракционным порядкам [1-3]. Спектральные решетки имеют множество потенциальных применений в таких областях как спектроскопия, цветная печать и фотографии, распознавание и формирование цветных изображений [1-3]. Перспективным является использование спектральных решеток для селективного возбуждения и разделения продольных мод для повышения пропускной способности волоконно-оптических линий связи.

В данной статье рассмотрен расчет спектральных решеток, обобщающих известные решетки на случай более общей связи длин волн и номеров дифракционных порядков. Метод расчета решеток применен к расчету двухволновых ДОО, предназначенных для выполнения двух различных оптических функций для двух длин волн. В качестве частного примера двухволновых ДОО рассмотрен расчет спектральных линз для разделения и фокусировки трех длин волн в три точки на оптической оси.

2. Спектральные решетки

Рассмотрим сначала известные спектральные дифракционные решетки, позволяющие разделить длины волн (1) по 0, +1 и -1 дифракционным порядкам. Спектральная решетка имеет на периоде N ступенек равной ширины с высотой [1-3]

$$d_i = \lambda_0 \cdot i / (n-1), \quad i = \overline{0, N-1} \quad (2)$$

где n – показатель преломления материала решетки для длины волны λ_0 . Пренебрегая дисперсией материала решетки, определим связь фазового набега φ с высотой рельефа решетки для длины волны $\lambda \neq \lambda_0$ в виде [1-3];

$$\varphi = 2\pi \cdot (n-1) \cdot d_i / \lambda, \quad i = \overline{0, N-1} \quad (3)$$

Согласно (3) получим, что решетка (2) для плоских пучков с длинами волн (1) формирует следующие фазовые набеги;

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 2\pi i, \quad \varphi_{-1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_{-1}} \varphi_0 = 2\pi i - \frac{2\pi i}{N}, \\ \varphi_{+1} &= \frac{\lambda_0}{\lambda_{+1}} \varphi_0 = 2\pi i + \frac{2\pi i}{N}, \quad i = \overline{0, N-1} \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом 2π -периодичности фазы, представим фазовые набеги (4) в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 0, \quad \varphi_{-1} = -\frac{2\pi \cdot i}{N}, \\ \varphi_{+1} &= \frac{2\pi \cdot i}{N}, \quad i = \overline{0, N-1} \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку для длины волны λ_0 фазовый набег равен нулю, то данная спектральная компонента направляется в нулевой порядок. Для длин волн $\lambda_{\pm 1}$ фазовые набеги (5) соответствуют фазовым функциям призм, квантованных по N уровням;

$$\varphi_{\pm 1} = F_N(\pm 2\pi u / d) \quad (6)$$

где d – период решетки, а функция

$$F_N(\xi) = \frac{2\pi}{N} \text{int} \left(\frac{\xi N}{2\pi} \right) \quad (7)$$

описывает операцию квантования по N уровням. Это обеспечивает фокусировку длин волн $\lambda_{\pm 1}$ в порядках ± 1 . Вследствие квантования, доля энергии спектральных компонент $\lambda_{\pm 1}$ фокусируемая в порядках ± 1 , описывается функцией;

$$E(N) = \text{Sinc}^2(\pi / N). \quad (8)$$

Рассмотрим расчет спектральных решеток, обобщающих известные решетки (2). Дисперсию материала решетки учитывать не будем [1-3]. Первоначально проведем расчет решетки для разделения по двум порядкам с номерами n_0 и n_1 длин волн λ_0, λ_1 , связанных более общим по сравнению с уравнением (1) соотношением

$$\lambda_0 / \lambda_1 = M / N \quad (9)$$

где M и N – взаимно-простые числа. Профиль такой решетки предлагается определить через фазовые функции квантованных по M и N уровням дифракционных призм

$$\begin{aligned} F_M(u) &= \frac{2\pi}{M} \text{int} \left[\frac{M}{2\pi} \text{mod}_{2\pi} (2\pi n_0 u) \right], \\ F_N(u) &= \frac{2\pi}{N} \text{int} \left[\frac{N}{2\pi} \text{mod}_{2\pi} (2\pi n_1 u) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

где $u \in [0, 1]$ – координата профиля, нормированная на период решетки. Для удобства выкладок рельеф спектральной решетки определим через индексы значений $2\pi i / M, i = \overline{0, M-1}, 2\pi j / N, j = \overline{0, N-1}$,

принимаемых квантованными функциями $F_M(u), F_N(u)$, в виде;

$$H(i, j) = \frac{\lambda_0}{2\pi(n-1)} [2\pi i / M + 2\pi \cdot M_0(i, j)], \quad (11)$$

$$i = \overline{0, M-1}, \quad j = \overline{0, N-1},$$

где $M_0(i, j)$ - неизвестная функция, принимающая целые неотрицательные значения. Решетка (11) при $\lambda = \lambda_0$ формирует фазовый набег равный по модулю 2π фазовой функции квантованной призмы $F_M(u)$. Это обеспечивает фокусировку длины волны λ_0 в порядке n_0 . При $\lambda = \lambda_1$ фазовый набег, формируемый решеткой (11), имеет вид

$$\Phi(i, j; \lambda_1) = 2\pi(M/N) [i/M + M_0(i, j)], \quad (12)$$

$$i = \overline{0, M-1}, \quad j = \overline{0, N-1}.$$

Для фокусировки компоненты λ_1 в порядке n_1 функция $M_0(i, j)$ в (11) должна выбираться из условия равенства по модулю 2π выражения (12) квантованной фазы $F_N(u)$ в (10). Это дает для расчета функции $M_0(i, j)$ следующее уравнение

$$2\pi(M/N) [i/N + M_0(i, j)] = 2\pi [j/N + M_1(i, j)], \quad i = \overline{0, M-1}, \quad j = \overline{0, N-1}. \quad (13)$$

где $M_1(i, j)$ - произвольная функция, принимающая целочисленные значения. Прямой подстановкой можно убедиться, что решение уравнения (13) имеет вид:

$$\begin{cases} M_0(i, j) = \alpha_1(j-i) + Nz = \text{mod}_N(\alpha_1(j-i)) \\ M_1(i, j) = \alpha_2(j-i) + Mz \end{cases}, \quad (14)$$

$$i = \overline{0, M-1}, \quad j = \overline{0, N-1}$$

где α_1, α_2 - целые числа, определяемые из решения уравнения

$$M \cdot \alpha_1 - N \cdot \alpha_2 = 1. \quad (15)$$

Поскольку числа M и N взаимно-простые, то уравнение (15) всегда имеет решение в целых числах по теореме о наибольшем общем делителе. Согласно (14), формула для профиля спектральной решетки имеет вид:

$$H(u) = H(i, j) = \frac{\lambda_0}{2\pi(n-1)} \times \left[\frac{2\pi}{M} i + 2\pi \cdot \text{mod}_N(\alpha_1(j-i)) \right], \quad (16)$$

где

$$i = \text{int} \left(\frac{M}{2\pi} \text{mod}_{2\pi}(2\pi n_0 u) \right),$$

$$j = \text{int} \left(\frac{N}{2\pi} \text{mod}_{2\pi}(2\pi n_1 u) \right). \quad \text{Частным случаем (16)}$$

является решетка

$$H(u) = H(i, j) = \frac{\lambda_0}{(n-1)} \times \text{mod}_N \left(\alpha_1 \text{int} \left(N \frac{\text{mod}_{2\pi}(2\pi n_1 u)}{2\pi} \right) \right) \quad (17)$$

для разделения спектральных компонент

$$\begin{aligned} \lambda_0, \quad \lambda_{+1} &= \lambda_0 N / M = \lambda_0 N / (N + p), \\ \lambda_{-1} &= \lambda_0 N / (N - p), \quad p = M - N \end{aligned} \quad (18)$$

по порядкам 0, и $+n_1$ и $-n_1$. В частности, из (17) не сложно получить, что спектральная решетка для разделения длин волн (18) по порядкам 0 и ± 1 имеет на периоде N ступенек равной ширины с высотой

$$d_i = \frac{\lambda_0}{(n-1)} \text{mod}_N(\alpha_1 i), \quad i = \overline{0, N-1} \quad (19)$$

где α_1 определяется из решения уравнения (15). Известные спектральные решетки [1-3] являются частным случаем решетки (19) при $M=N+1$.

3. Двухволновые ДОЭ

Уравнения (11), (16) могут быть использованы для расчета двухволновых ДОЭ, предназначенных для разделения и преобразования двух длин волн из (18). Обозначим $\varphi_M(\mathbf{u}), \varphi_{1N}(\mathbf{u})$, где $\mathbf{u} = (u, v)$ - декартовы координаты в плоскости ДОЭ, квантованные по M и N уровням фазовые функции, рассчитанные для некоторых заданных преобразований плоских монохроматических пучков с длинами волн λ_0, λ_{+1} из (18). Тогда высота рельефа в каждой точке \mathbf{u} апертуры двухволнового ДОЭ определяется по формулам (14)-(16), где числа (i, j) соответствуют индексам значений квантованных функций $\varphi_M(\mathbf{u}), \varphi_{1N}(\mathbf{u})$ в данной точке. Таким образом, расчет двухволнового ДОЭ сводится к двум независимым задачам расчета квантованных фазовых функций, для решения которых разработаны эффективные итерационные алгоритмы [4, 5].

При достаточно больших M, N , (при $N > 4$) ошибкой квантования можно пренебречь. В этом случае можно проводить расчет двухволновых ДОЭ на основе непрерывных функций $\varphi(\mathbf{u}), \varphi_1(\mathbf{u})$. Действительно, полагая в (16)

$$\begin{aligned} (j-i) &= \text{int} \left[\frac{N}{2\pi} \varphi_1(\mathbf{u}) \right] - \text{int} \left[\frac{M}{2\pi} \varphi(\mathbf{u}) \right] \approx \\ &\approx \text{int} \left[\frac{N}{2\pi} \left(-\frac{M}{N} \varphi(\mathbf{u}) + \varphi_1(\mathbf{u}) \right) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

получим непрерывный аналог формулы (16) в виде

$$H(\mathbf{u}) = \frac{\lambda_0}{2\pi(n_0-1)} \left[\varphi(\mathbf{u}) + 2\pi \cdot \text{mod}_N \left(\alpha_1 \cdot \text{int} \left[\frac{N}{2\pi} \left(-\frac{M}{N} \varphi(\mathbf{u}) + \varphi_1(\mathbf{u}) \right) \right] \right) \right] \quad (21)$$

Функцию рельефа (21) удобно представить в виде:

$$H(\mathbf{u}) = \frac{\lambda_0}{2\pi(n_0-1)} \left[\varphi(\mathbf{u}) + G(\tilde{\varphi}(\mathbf{u})) \right] \quad (22)$$

где функция G описывает нелинейное преобразование фазы

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{u}) = \text{mod}_{2\pi}(-M \cdot \varphi(\mathbf{u}) / N + \varphi_1(\mathbf{u})) \quad (23)$$

по закону фазового набегу спектральной решетки (19) для длины волны λ_0 ;

$$G(\xi) = 2\pi \cdot \text{mod}_N(\alpha_1 \cdot \text{int}[N \cdot \xi / 2\pi]), \quad \xi \in [0, 2\pi] \quad (24)$$

4. Спектральные линзы

В качестве важного примера двухволнового ДОЭ рассмотрим расчет спектральных линз для разделения и фокусировки длин волн (18) в три точки на оптической оси. Рельеф линзы определим в виде (22), (24), где

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{u}) = \text{mod}_{2\pi}(-p \cdot \varphi(\mathbf{u})/N + \varphi_1(\mathbf{u})), \quad (25)$$

$$\varphi(\mathbf{u}) = \text{mod}_{2\pi}\left(-\frac{\pi \mathbf{u}^2}{\lambda_0 f_0}\right), \quad \varphi_1(\mathbf{u}) = -\frac{\pi \mathbf{u}^2}{\lambda_0 f_1} \quad (26)$$

фазовые функции линз с фокусами f_0 и f_1 .

Используя формулу (3) несложно получить фазовые набегги, формируемые линзой (22), (24), (25), (26) для длин волн (18) в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{u}; \lambda_0) &= \varphi(\mathbf{u}) = -\frac{\pi \mathbf{u}^2}{\lambda_0 f_0}, \quad \Phi(\mathbf{u}; \lambda_{+1}) = \\ &= \left(\frac{N+p}{N}\right) \cdot \varphi(\mathbf{u}) + F_N \left(-\frac{p}{N} \varphi(\mathbf{u}) + \varphi_1(\mathbf{u})\right), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{u}; \lambda_{-1}) &= \left(\frac{N-p}{N}\right) \cdot \varphi(\mathbf{u}) - \\ &- F_N \left(-\frac{p}{N} \varphi(\mathbf{u}) + \varphi_1(\mathbf{u})\right) \end{aligned}$$

Пренебрегая ошибкой квантования в (27) и полагая $F_N \left(-\frac{p}{N} \varphi(\mathbf{u}) + \varphi_1(\mathbf{u})\right) \approx -\frac{p}{N} \varphi(\mathbf{u}) + \varphi_1(\mathbf{u})$, получим

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{u}; \lambda_0) &= \varphi(\mathbf{u}) = -\frac{\pi \mathbf{u}^2}{\lambda_0 f_0}, \quad \Phi(\mathbf{u}; \lambda_{+1}) = \\ &= \varphi(\mathbf{u}) + \varphi_1(\mathbf{u}) = -\frac{\pi \mathbf{u}^2}{\lambda_{+1} f_{+1}}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\Phi(\mathbf{u}; \lambda_{-1}) = \varphi(\mathbf{u}) - \varphi_1(\mathbf{u}) = -\frac{\pi \mathbf{u}^2}{\lambda_{-1} f_{-1}},$$

где

$$\begin{aligned} f_{+1} &= \frac{N+p}{N} \cdot \frac{f_0 \cdot f_1}{f_1 + f_0}, \\ f_{-1} &= \frac{N-p}{N} \cdot \frac{f_0 \cdot f_1}{f_1 - f_0}. \end{aligned} \quad (29)$$

Фазовые набегги (28) соответствуют фазовым функциям линз с фокусами f_0, f_{+1}, f_{-1} , что обеспечивает требуемое разделение и фокусировку длин волн (18) в трех точках на оптической оси. Для уменьшения частоты микрорельефа целесообразно рассчитывать спектральную линзу как дополнение к тонкой не дифракционной линзе с фокусом f_0 . В этом случае положим $\varphi(\mathbf{u}) \equiv 0$ в (22), (25) и получим спектральную зонную пластинку

$$H(\mathbf{u}) = \frac{\lambda_0}{2\pi(n_0 - 1)} \left[G \left(\text{mod}_{2\pi} \left(\frac{\pi \mathbf{u}^2}{\lambda_0 f_1} \right) \right) \right] \quad (30)$$

Зонная пластинка (30) для длин волн (18) формирует фазовые набегги

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{u}; \lambda_0) &= 0, \quad \Phi(\mathbf{u}; \lambda_{+1}) = F_N(\varphi_1(\mathbf{u})) \approx \varphi_1(\mathbf{u}), \\ \Phi(\mathbf{u}; \lambda_{-1}) &= F_N(\varphi_1(\mathbf{u})) \approx -\varphi_1(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (31)$$

Добавляя фазовые набегги (31) к фазовым набеггам

$$\varphi(\mathbf{u}) = -\frac{\pi \mathbf{u}^2}{\lambda_i f_0}, \quad i = 0, +1, -1, \quad (32)$$

формируемым для длин волн (18) тонкой не дифракционной линзой, получим сферические пучки с фокусами

$$\begin{aligned} f_0, f_{+1} &= \frac{N+p}{N} \cdot \frac{f_0 \cdot f_1}{f_1 \cdot \frac{N+p}{N} + f_0}, \\ f_{-1} &= \frac{N-p}{N} \cdot \frac{f_0 \cdot f_1}{f_1 \cdot \frac{N-p}{N} - f_0} \end{aligned} \quad (33)$$

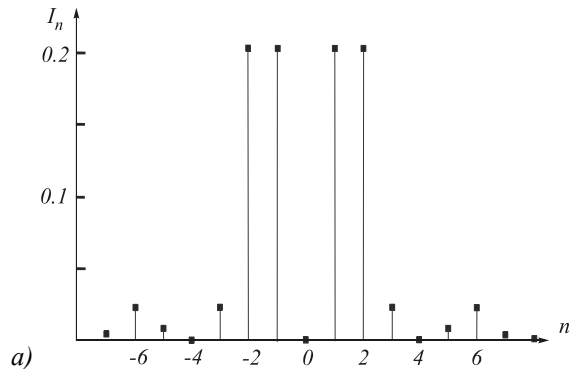
что обеспечивает требуемое разделение длин волн.

5. Расчетные примеры

В качестве примера рассмотрим расчет 'двухволновых решеток' для формирования 4-х порядков $\pm 2, \pm 1$ при длине волны $\lambda = \lambda_0$ и 3-х порядков $0, \pm 1$ при длинах волн $\lambda_{+1} = 3\lambda_0/4$ и $\lambda_{-1} = 9\lambda_0/4$, соответственно. Расчет решеток (период d) проведем по формуле (16) на основе квантованных фазовых функций 4-х и 3-порядковой решеток, принимающих в интервалах периода $[(l-1) \cdot d/4, l \cdot d/4], l = \overline{1, 4}$ значения $(0, \pi, \pi/2, 3\pi/2)$ и $(0, 0, 2\pi/3, 2\pi/3)$, соответственно. В скалярном приближении Кирхгофа интенсивности порядков I_j для решетки с фазой $\varphi(u)$ определяются как квадраты модулей коэффициентов Фурье функции $\exp(i\varphi(u))$. Для 4-порядковой решетки $I_2 = I_{-2} = I_1 = I_{-1} = 0.205$, а для 3-порядковой решетки $I_0 = 0.304, I_1 = I_{-1} = 0.25$. Следовательно, приведенные решетки концентрируют более 80% энергии в требуемых порядках $-2, -1, +1, +2$ и $-1, 0, +1$.

При $\lambda_{+1} = 3\lambda_0/4$ из (14)-(16) получим $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ и $M_0(i, j) = \text{mod}_3(j - i)$. При этом рельеф спектральной решетки для длин волн λ_0 и $\lambda_{+1} = 3\lambda_0/4$ принимает вид:

$$H(u) = \frac{\lambda_0}{2\pi(n-1)} \begin{cases} 0, & u \in [0, d/4) \\ 3\pi, & u \in [d/4, d/2) \\ 0.5\pi, & u \in [d/2, 3d/4) \\ 3.5\pi, & u \in [3d/4, d) \end{cases} \quad (34)$$



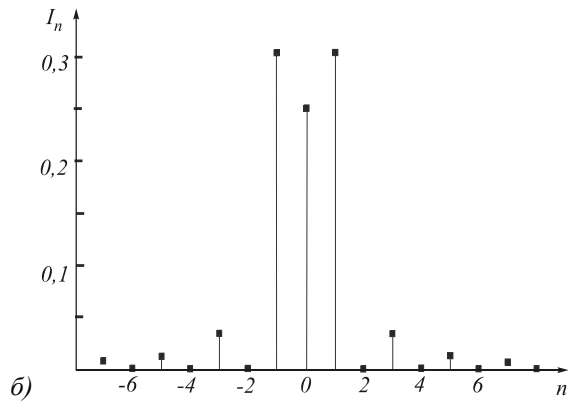


Рис. 1. Интенсивности порядков решеток (34) и (35) для длин волн λ_0 (а) и $\lambda_{+1}=9\lambda_0/4$ (б).

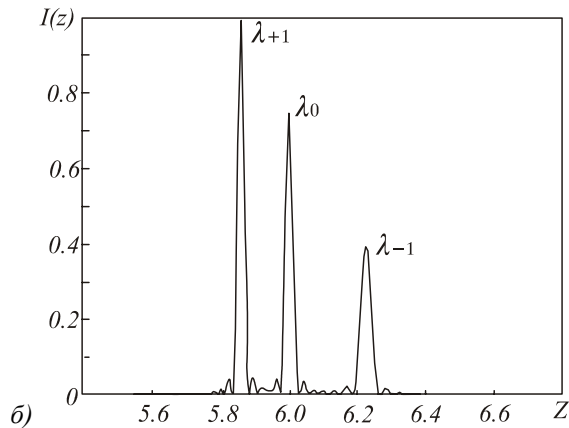
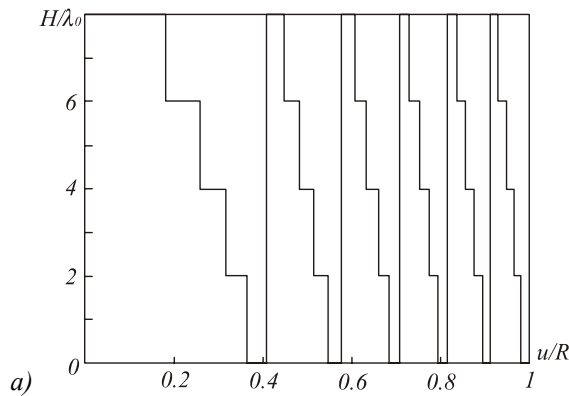


Рис.2. (а) Зонная пластинка для разделения длин волн $\lambda_0=0.63\mu\text{м}$, $\lambda_{+1}=5\lambda_0/6$, $\lambda_{-1}=5\lambda_0/4$ по трем фокусам, (б) Распределение интенсивности на оптической оси.

При $\lambda_{+1}=9\lambda_0/4$ из (14)-(16) получим $\alpha_1=-2$, $\alpha_2=1$, $M_0(i, j) = \text{mod}_9(-2(j-i))$. В результате рельеф двухволновой решетки для длин волн λ_0 и $\lambda_{+1}=9\lambda_0/4$ принимает вид:

$$H(u) = \frac{\lambda_0}{2\pi(n-1)} \begin{cases} 0, & u \in [0, d/4) \\ 9\pi, & u \in [d/4, d/2) \\ 10.5\pi, & u \in [d/2, 3d/4) \\ 1.5\pi, & u \in [3d/4, d) \end{cases} \quad (35)$$

Интенсивности дифракционных порядков решеток (34) и (35) при освещающих пучках с длинами волн λ_0 , $\lambda_{+1}=3\lambda_0/4$ и λ_0 , $\lambda_{+1}=9\lambda_0/4$ совпадают и показаны на рис. 1. Рис. 1 показывает независимое формирование 4-х и 3-х порядков для двух различных волн, что подтверждает работоспособность предложенного метода расчета.

В качестве следующего примера была рассчитана зонная пластинка (30) для разделения длин волн $\lambda_0 = 0.63 \mu\text{м}$, $\lambda_{+1} = 5\lambda_0/6 = 0,525 \mu\text{м}$, $\lambda_{-1} = 5\lambda_0/4 = 0,7875 \mu\text{м}$ ($N = 5$, $p = 1$ в (18)) по трем фокусам. Рельеф пластинки при $n=1.5$, радиусе апертуры $R=1.25\text{мм}$ и $f_1=298 \text{мм}$ показан на Рис.2а). На Рис. 2б) приведено распределение интенсивности вдоль оптической оси, формируемой зонной пластинкой вместе с тонкой линзой с фокусом $f_0=6\text{мм}$ при освещающем пучке, состоящем из трех некогерентных между собой плоских пучков с указанными длинами волн. Рис 2б) ясно показывает разделение длин волн по трем фокусам. При этом различная интенсивность фокальных пиков $I \sim 1/(\lambda f)^2$ объясняется различными фокусами и длинами волн.

Литература

1. **H. Dammann.** Color separation gratings // Appl.Opt., 1978, v.17, N_15, pp. 2273-2279.
2. **H. Dammann.** Spectral Characteristics of Stepped-phase Gratings // Optic, 1979, v.53, pp. 409-417.
3. **M. W. Farn, M. B. Stern.** Color separation by use of binary optics // Opt.Lett., 1993, v.18, pp. 1214-1216.
4. **L.L. Doskolovich, P. Perlo, O.I. Petrova, P. Repetto, V.A. Soifer.** Direct 2D calculation of quantized DOEs on the basis of a continuous series approach // Jour. of Mod.Opt., 1997, v. 44, pp.685-695.
5. **L.L. Doskolovich, P. Perlo, O.I. Petrova, P. Repetto, V.A. Soifer.** Direct two-dimensional calculation of binary DOEs using a non-binary series expression approach // Int. Jour. Of Optoelectronics, 1995, v. 10, pp.243-249.