

## РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРОДОЛЬНО-РЕГУЛЯРНЫХ СТРУКТУРАХ

Н.Л.Казанский<sup>1</sup>, Г.А.Подлипнов<sup>2</sup>, А.А.Рахаев<sup>3</sup>, М.Л.Соснин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт систем обработки изображений

<sup>2</sup> Самарский государственный аэрокосмический университет

<sup>3</sup> Дирекция по техническому развитию АО "АВТОВАЗ"

### Аннотация

Получены аналитические выражения, описывающие распределение электромагнитного поля в продольно-регулярных линиях передачи.

В приближении равномерного распределения тока проводимости на центральном проводнике рассчитано распределение составляющих электромагнитного поля в линии передачи.

### Введение

Работы, посвященные определению электродинамических характеристик регулярных линий передачи (в том числе и распределение электромагнитного поля), можно условно разделить на несколько групп.

К первой группе следует отнести работы, в которых электродинамические параметры определяются на основе замены анализируемой структуры приближенной расчетной моделью. В большинстве работ используется либо квазистатическое или коротковолновое приближение, либо модель Олинера [1]. Эти приближенные методы анализа основаны на априорном эвристическом предположении о характере поля в модели. На основе такого подхода рассчитаны характеристики большого числа регулярных линий передачи и различных функциональных элементов [2]. Характеристики линий передач и функциональных элементов описываются достаточно простыми аналитическими выражениями в замкнутой форме, однако главный недостаток такого подхода заключается в том, что установить адекватность реальной анализируемой структуры и ее эвристической модели не представляется возможным. Оценить степень точности модели и сделанных допущений оказывается задачей более сложной и трудоемкой, чем решение самой задачи.

Ко второй группе следует отнести работы, в которых электродинамические характеристики анализируются численными методами с минимальной аналитической обработкой анализируемой структуры. К таким методам относятся метод минимальных автономных блоков [3] и метод сингулярных интегральных уравнений, основанный на интегральных представлениях электромагнитного поля для каждой кусочно-однородной области структуры [4]. Эти методы являются наиболее универсальными и позволяют анализировать наиболее сложные структуры (структуры с некоординатными границами, продольно-нерегулярные линии передачи, нелинейные структуры). Однако они не являются оптимальными для расчета характеристик продольно-регулярных линий передач, ибо получаемые численные результаты не позволяют выявить существенные особенности анализируемой структуры.

К третьей группе следует отнести работы по определению электродинамических характеристик регулярных линий передачи методом частичных областей [5] и методом сингулярных интегральных

уравнений [6]. Эти методы являются предпочтительными для расчета характеристик продольно-регулярных линий передачи и позволяют рассчитать их электродинамические характеристики с достаточной точностью. Целью работы является разработка методики расчета составляющих электромагнитного поля в продольно-регулярной линии передачи.

### 1. Выражения для составляющих полей в продольно-регулярной линии передачи

Поперечное сечение продольно-регулярной линии передачи (рис.1) представим в виде первой (1) и второй (2) областей, в общем случае имеющих разные абсолютные диэлектрические  $\epsilon_{a1}$ ,  $\epsilon_{a2}$  и магнитные  $\mu_{a1}$ ,  $\mu_{a2}$  проницаемости.

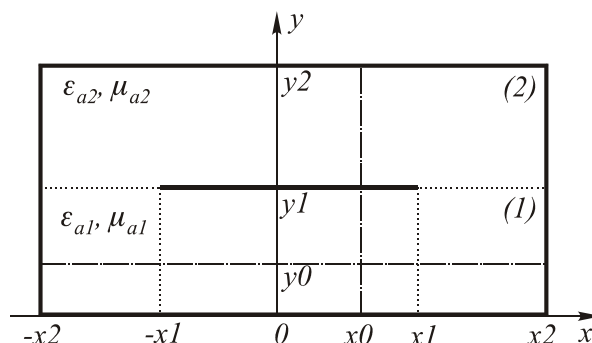


Рис.1. Поперечное сечение анализируемой структуры

Известно, что для регулярных линий передач продольная зависимость электромагнитного поля описывается множителем  $e^{-i\gamma z}$ . Тогда электрическое и магнитное поля в  $\xi$ -ой ( $\xi=1,2$ ) области можно записать в виде

$$\vec{E}_\xi(x, y, z) = \vec{E}_\xi(x, y) \cdot e^{-i\gamma z},$$

$$\vec{H}_\xi(x, y, z) = \vec{H}_\xi(x, y) \cdot e^{-i\gamma z},$$

где  $\gamma$  - продольное волновое число.

В этом случае уравнения Максвелла, описывающие электромагнитное поле внутри анализируемой структуры, сводятся к однородным уравнениям Гельмгольца, решение которых известно. Из них нужно выбрать такие, которые удовлетворяют граничным условиям для касательных составляющих электрического  $\vec{E}_\tau$  и нормальных составляющих

магнитного  $\vec{H}_n$  полей на идеально проводящей внешней поверхности  $S$  анализируемой структуры

$$\vec{E}_\tau|_S = 0, \quad \vec{H}_n|_S = 0.$$

С учетом этих граничных условий при симметричном распределении поля относительно плоскости  $x=0$  продольные составляющие электрического и магнитного полей определяются соотношениями

$$E_{1z}(x, y) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} A_{1m} \cdot \cos(\gamma_{xm} \cdot x) \cdot \sin(\gamma_{y1} \cdot y), \quad (1)$$

$$H_{1z}(x, y) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} B_{1m} \cdot \sin(\gamma_{xm} \cdot x) \cdot \cos(\gamma_{y1} \cdot y), \quad (2)$$

$$E_{2z}(x, y) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} A_{2m} \cdot \cos(\gamma_{xm} \cdot x) \cdot \sin(\gamma_{y2} \cdot (y2 - y)), \quad (3)$$

$$H_{2z}(x, y) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} B_{2m} \cdot \sin(\gamma_{xm} \cdot x) \cdot \cos(\gamma_{y1} \cdot (y2 - y)), \quad (4)$$

где

$$\gamma_{y\xi}^2 = k_\xi^2 - \gamma^2 - \gamma_{xm}^2, \quad \gamma_{xm} = \frac{\pi m}{2 \cdot x2},$$

$$k_\xi = \omega \sqrt{\varepsilon_{a\xi} \mu_{a\xi}}.$$

Зная выражения для продольных составляющих электрического и магнитного полей, с помощью известных соотношений можно определить и остальные составляющие в анализируемой структуре

$$E_{x1}(x, y) = \frac{i}{k_1^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (A_{1m} \cdot \gamma \cdot \gamma_{xm} + B_{1m} \cdot \omega \cdot \mu_{a1} \cdot \gamma_{y1}) \cdot \sin(\gamma_{xm} \cdot x) \times \sin(\gamma_{y1} \cdot y), \quad (5)$$

$$E_{y1}(x, y) = \frac{i}{k_1^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-A_{1m} \cdot \gamma \cdot \gamma_{y1} + B_{1m} \cdot \omega \cdot \mu_{a1} \cdot \gamma_{xm}) \cdot \cos(\gamma_{xm} \cdot x) \times \cos(\gamma_{y1} \cdot y), \quad (6)$$

$$H_{x1}(x, y) = -\frac{i}{k_1^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (B_{1m} \cdot \gamma \cdot \gamma_{xm} - A_{1m} \cdot \omega \cdot \varepsilon_{a1} \cdot \gamma_{y1}) \cdot \cos(\gamma_{xm} \cdot x) \times \cos(\gamma_{y1} \cdot y), \quad (7)$$

$$H_{y1}(x, y) = \frac{i}{k_1^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (B_{1m} \cdot \gamma \cdot \gamma_{y1} + A_{1m} \cdot \omega \cdot \varepsilon_{a1} \cdot \gamma_{xm}) \cdot \sin(\gamma_{xm} \cdot x) \times \sin(\gamma_{y1} \cdot y), \quad (8)$$

$$E_{x2}(x, y) = \frac{i}{k_2^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (A_{2m} \cdot \gamma \cdot \gamma_{xm} + B_{2m} \cdot \omega \cdot \mu_{a2} \cdot \gamma_{y2}) \cdot \sin(\gamma_{xm} \cdot x) \times \cos(\gamma_{y2} \cdot (y2 - y)), \quad (9)$$

$$E_{y2}(x, y) = \frac{i}{k_2^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-A_{2m} \cdot \gamma \cdot \gamma_{y2} + B_{2m} \cdot \omega \cdot \mu_{a2} \cdot \gamma_{xm}) \cdot \cos(\gamma_{xm} \cdot x) \times \cos(\gamma_{y2} \cdot (y2 - y)), \quad (10)$$

$$H_{x2}(x, y) = -\frac{i}{k_2^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (B_{2m} \cdot \gamma \cdot \gamma_{xm} - A_{2m} \cdot \omega \cdot \varepsilon_{a2} \cdot \gamma_{y2}) \cdot \cos(\gamma_{xm} \cdot x) \times \cos(\gamma_{y2} \cdot (y2 - y)), \quad (11)$$

$$H_{y2}(x, y) = \frac{i}{k_2^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (B_{2m} \cdot \gamma \cdot \gamma_{y2} + A_{2m} \cdot \omega \cdot \varepsilon_{a2} \cdot \gamma_{xm}) \cdot \sin(\gamma_{xm} \cdot x) \times \sin(\gamma_{y2} \cdot (y2 - y)). \quad (12)$$

В этих соотношениях для составляющих полей неизвестные коэффициенты  $A_{1m}$ ,  $B_{1m}$ ,  $A_{2m}$ ,  $B_{2m}$  и величины  $\gamma$ ,  $\gamma_{y1}$ ,  $\gamma_{y2}$  подлежат определению из граничных условий в плоскости расположения центрального проводника.

## 2. Расчет амплитудных коэффициентов

Для определения неизвестных коэффициентов  $A_{\xi m}$ ,  $B_{\xi m}$  и величин  $\gamma$ ,  $\gamma_{y1}$ ,  $\gamma_{y2}$  необходимо воспользоваться граничными условиями для касательных составляющих электрического и магнитного полей в плоскости расположения центрального проводника, которые сводятся к уравнениям

$$A_{1m} \cdot \sin(\gamma_{y1} \cdot y1) = A_{2m} \cdot \sin(\gamma_{y2} \cdot (y2 - y1)), \quad (13)$$

$$\frac{1}{k_1^2} (A_{1m} \cdot \gamma \cdot \gamma_{xm} + B_{1m} \cdot \omega \cdot \mu_{a1} \cdot \gamma_{y1}) \times \sin(\gamma_{y1} \cdot y1) = \frac{1}{k_2^2} (A_{2m} \cdot \gamma \cdot \gamma_{xm} + B_{2m} \cdot \omega \cdot \mu_{a2} \cdot \gamma_{y2}) \cdot \sin(\gamma_{y2} \cdot (y2 - y1)). \quad (14)$$

Из этих соотношений можно выразить коэффициенты  $A_{2m}$ ,  $B_{2m}$ , через  $A_{1m}$ ,  $B_{1m}$ :

$$A_{2m} = A_{1m} \cdot \frac{\sin(\gamma_{y1} \cdot y1)}{\sin(\gamma_{y2} \cdot (y2 - y1))}, \quad (15)$$

$$B_{2m} = A_{1m} \cdot \frac{\sin(\gamma_{y1} \cdot y1)}{\sin(\gamma_{y2} \cdot (y2 - y1))} \times \left( \frac{k_2^2}{k_1^2} - 1 \right) \cdot \frac{\gamma \cdot \gamma_{xm}}{\omega \cdot \mu_{a2} \cdot \gamma_{y2}} + B_{1m} \cdot \frac{\sin(\gamma_{y1} \cdot y1)}{\sin(\gamma_{y2} \cdot (y2 - y1))} \cdot \frac{\mu_{a1} \cdot \gamma_{y1} \cdot k_2^2}{\mu_{a2} \cdot \gamma_{y2} \cdot k_1^2}. \quad (16)$$

Определим неизвестные постоянные коэффициенты  $A_{\xi m}$ ,  $B_{\xi m}$ , ( $\xi = 1, 2$ ) входящие в соотношения (1) - (12), через касательные составляющие электрического поля в первой области  $E_{1z}(x, y)$ ,  $E_{1x}(x, y)$  в плоскости центрального проводника при  $y = y1$ . Для этого левую и правую части соотношения (1)

умножим на  $\cos(\gamma_{xm} \cdot x)$  и, используя условие ортогональности, получим

$$A_{1m} = \frac{2}{x^2 \cdot \sin(\gamma_{y1} \cdot y1)} \times \int_0^{x^2} E_{1z}(x, y) \cdot \cos(\gamma_{xm} \cdot x) dx \quad (17)$$

Аналогично из соотношения (5):

$$B_{1m} = \frac{2 \cdot k_1^2}{i \cdot \omega \cdot \mu_{a1} \cdot \gamma_{y1} \cdot x^2 \cdot \sin(\gamma_{y1} \cdot y1)} \times \int_0^{x^2} E_{x1}(x, y) \cdot \sin(\gamma_{xm} \cdot x) dx - \frac{2 \cdot \gamma \cdot \gamma_{xm}}{\omega \cdot \mu_{a1} \cdot \gamma_{y1} \cdot x^2 \cdot \sin(\gamma_{y1} \cdot y1)} \times \int_0^{x^2} E_{1z}(x, y) \cdot \cos(\gamma_{xm} \cdot x) dx. \quad (18)$$

С учетом обозначений

$$e_{zm} = \frac{2}{x^2} \cdot \int_0^{x^2} E_{1z}(x, y1) \cdot \cos(\gamma_{xm} \cdot x) dx, \quad (19)$$

$$e_{xm} = \frac{2}{x^2} \cdot \int_0^{x^2} E_{1x}(x, y1) \cdot \sin(\gamma_{xm} \cdot x) dx, \quad (20)$$

соотношения (17), (18) запишутся в виде:

$$A_{1m} = \frac{1}{\sin(\gamma_{y1} \cdot y1)} \cdot e_{zm}, \quad (21)$$

$$B_{1m} = \frac{k_1^2}{i \cdot \omega \cdot \mu_{a1} \cdot \gamma_{y1} \cdot \sin(\gamma_{y1} \cdot y1)} \cdot e_{xm} - \frac{\gamma \cdot \gamma_{xm}}{\omega \cdot \mu_{a1} \cdot \gamma_{y1} \cdot \sin(\gamma_{y1} \cdot y1)} \cdot e_{zm}. \quad (22)$$

Тогда касательные составляющие магнитного поля в первой области в плоскости расположения центрального проводника при  $y = y1$  можно записать в виде

$$H_{x1}(x, y1) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( Y_{11m}^{(1)} \cdot e_{zm} + Y_{12m}^{(1)} \cdot e_{xm} \right) \cdot \cos(\gamma_{xm} \cdot x), \quad (23)$$

$$H_{z1}(x, y1) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( Y_{21m}^{(1)} \cdot e_{zm} + Y_{22m}^{(1)} \cdot e_{xm} \right) \cdot \sin(\gamma_{xm} \cdot x), \quad (24)$$

где

$$Y_{11m}^{(1)} = \frac{i}{k_1^2} \cdot \frac{\gamma^2 \cdot \gamma_{xm}^2 + k_1^2 \cdot \gamma_{y1}^2}{\omega \cdot \mu_{a1} \cdot \gamma_{y1}} \times \text{ctg}(\gamma_{y1} \cdot y1) \quad (25)$$

$$Y_{12m}^{(1)} = -\frac{\gamma \cdot \gamma_{xm}}{\omega \cdot \mu_{a1} \cdot \gamma_{y1}} \cdot \text{ctg}(\gamma_{y1} \cdot y1), \quad (26)$$

$$Y_{21m}^{(1)} = -\frac{\gamma \cdot \gamma_{xm}}{\omega \cdot \mu_{a1} \cdot \gamma_{y1}} \cdot \text{ctg}(\gamma_{y1} \cdot y1), \quad (27)$$

$$Y_{22m}^{(1)} = \frac{k_1^2}{i \cdot \omega \cdot \mu_{a1} \cdot \gamma_{y1}} \cdot \text{ctg}(\gamma_{y1} \cdot y1). \quad (28)$$

Для второй области при  $y = y1$  получим выражения для  $H_{x2}$ ,  $H_{z2}$ , аналогичные соотношениям (23), (24)

$$H_{x2}(x, y1) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( Y_{11m}^{(2)} \cdot e_{zm} + Y_{12m}^{(2)} \cdot e_{xm} \right) \cdot \cos(\gamma_{xm} \cdot x), \quad (29)$$

$$H_{z2}(x, y1) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( Y_{21m}^{(2)} \cdot e_{zm} + Y_{22m}^{(2)} \cdot e_{xm} \right) \cdot \cos(\gamma_{xm} \cdot x), \quad (30)$$

где

$$Y_{11m}^{(2)} = \frac{i}{k_2^2} \cdot \frac{\gamma^2 \cdot \gamma_{xm}^2 + k_2^2 \cdot \gamma_{y2}^2}{\omega \cdot \mu_{a2} \cdot \gamma_{y2}} \times \text{ctg}(\gamma_{y2}(y2 - y1)), \quad (31)$$

$$Y_{12m}^{(2)} = -\frac{\gamma \cdot \gamma_{xm}}{\omega \cdot \mu_{a2} \cdot \gamma_{y2}} \cdot \text{ctg}(\gamma_{y2}(y2 - y1)), \quad (32)$$

$$Y_{21m}^{(2)} = -\frac{\gamma \cdot \gamma_{xm}}{\omega \cdot \mu_{a2} \cdot \gamma_{y2}} \cdot \text{ctg}(\gamma_{y2}(y2 - y1)), \quad (33)$$

$$Y_{22m}^{(2)} = \frac{k_2^2}{i \cdot \omega \cdot \mu_{a2} \cdot \gamma_{y2}} \cdot \text{ctg}(\gamma_{y2}(y2 - y1)). \quad (34)$$

Ток проводимости на поверхности центрального проводника определяется касательной составляющей магнитного поля. Представим составляющие тока проводимости в виде ряда Фурье:

$$J_z^{\partial} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} j_{zm} \cdot \cos(\gamma_{xm} \cdot x), \quad (35)$$

$$J_x^{\partial} = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} j_{xm} \cdot \sin(\gamma_{xm} \cdot x), \quad (36)$$

где

$$j_{zm} = \frac{2}{x^2} \int_0^{x^2} J_z^{\partial} \cdot \cos(\gamma_{xm} \cdot x) dx, \quad (37)$$

$$j_{xm} = \frac{2}{x^2} \int_0^{x^2} J_x^{\partial} \cdot \sin(\gamma_{xm} \cdot x) dx. \quad (38)$$

С учетом граничных условий на поверхности центрального проводника и соотношений (23), (24), (29), (30) получим:

$$\begin{cases} j_{zm} = Y_{11m} \cdot e_{zm} + Y_{12m} \cdot e_{xm}, \\ j_{xm} = Y_{21m} \cdot e_{zm} + Y_{22m} \cdot e_{xm}, \end{cases} \quad (39)$$

где

$$Y_{pqm} = Y_{pqm}^{(1)} - Y_{pqm}^{(2)}, \quad p, q = 1, 2.$$

Систему уравнений (39) можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} e_{zm} = z_{11m} \cdot j_{zm} + z_{12m} \cdot j_{xm}, \\ e_{xm} = z_{21m} \cdot j_{zm} + z_{22m} \cdot j_{xm}, \end{cases} \quad (40)$$

где

$$z_{11m} = \frac{Y_{22m}}{Y_m}, \quad z_{12m} = -\frac{Y_{12m}}{Y_m}, \quad z_{21m} = -\frac{Y_{21m}}{Y_m},$$

$$z_{22m} = \frac{Y_{11m}}{Y_m}, \quad Y_m = Y_{11m} \cdot Y_{22m} - Y_{12m} \cdot Y_{21m}.$$

Зная распределения тока, можно по приведенным выше соотношениям рассчитать электромагнитное поле в регулярной линии передачи.

Распределение тока может быть определено после решения дисперсионного уравнения, которое может быть сведено к сингулярному интегральному уравнению [6].

### 3. Результаты расчета электромагнитного поля в анализируемой структуре

Рассмотренная выше методика была применена к расчету составляющих электромагнитного поля в экранированной Т-камере. В ее регулярной части отсутствует диэлектрическое заполнение, а внутреннюю поверхность и центральный проводник можно считать идеально проводящими. При этих условиях параметры первой и второй сред одинаковы  $\varepsilon_{a1} = \varepsilon_{a2} = \varepsilon_0$ ,  $\mu_{a1} = \mu_{a2} = \mu_0$ . Так как центральный проводник расположен симметрично, то поперечная составляющая тока проводимости  $J_x$  обращается в ноль, а продольная составляющая тока в первом приближении распределена по центральному проводнику равномерно [6]. Эти особенности распределения тока проводимости позволяют по изложенной выше методике рассчитать структуру электрического и магнитного полей без решения дисперсионного уравнения.

На рис.2-3 в качестве иллюстрации приведены зависимости нормированных составляющих электрического и магнитного полей от нормированной поперечной координаты в заданном сечении анализируемой структуры  $y = y_0$ . На этих рисунках составляющие электрического поля нормировались относительно максимального значения вертикальной составляющей

$$EE_{x1} = \frac{E_{x1}(x, y_0)}{\max\{E_{y1}(x, y_0)\}}, \quad EE_{y1} = \frac{E_{y1}(x, y_0)}{\max\{E_{y1}(x, y_0)\}}$$

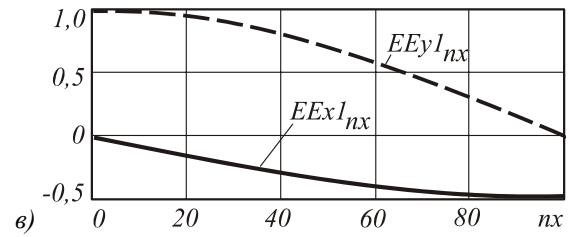
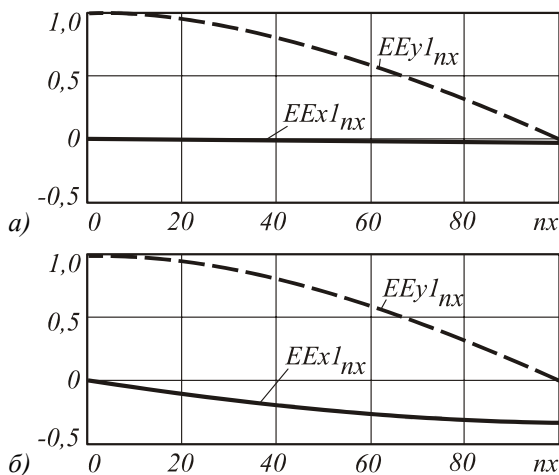


Рис. 2. Распределение составляющих электрического поля в анализируемой структуре при  $y_0/y_1=0.025$  (а),  $y_0/y_1=0.5$  (б),  $y_0/y_1=0.75$  (в)

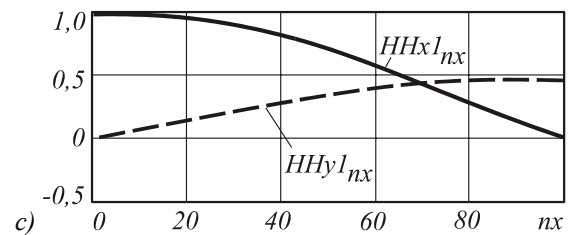
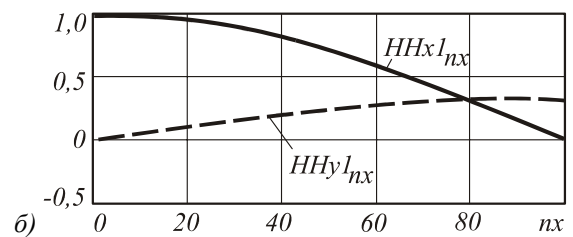
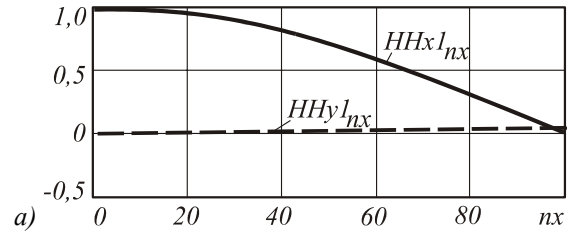


Рис.3. Распределение составляющих магнитного поля в анализируемой структуре при  $y_0/y_1=0.025$  (а),  $y_0/y_1=0.5$  (б),  $y_0/y_1=0.75$  (в)

Составляющие магнитного поля нормировались относительно максимального значения горизонтальной составляющей

$$HH_{x1} = \frac{H_{x1}(x, y_0)}{\max\{H_{x1}(x, y_0)\}},$$

$$HH_{y1} = \frac{H_{y1}(x, y_0)}{\max\{H_{x1}(x, y_0)\}},$$

а координата  $x$  по оси абсцисс отложена в процентах  $nx = \frac{x}{x_2} \cdot 100\%$ .

Полученные результаты позволяют определить неравномерность поля в анализируемой структуре.

### Заключение

Получены аналитические выражения для составляющих электрического и магнитного полей в регулярной линии передачи, выраженные через распределение тока проводимости на центральном проводнике. В приближении равномерного распределения продольной составляющей тока проводимости на центральном проводнике рассчитано распределение электрического и магнитного полей в анализируемой структуре.

### *Литература*

1. Гвоздев В.И., Нефедов Е.И. Объемные интегральные схемы СВЧ.- М.: Наука, 1985.- 256 с.
2. Справочник по расчету и конструированию СВЧ полосковых устройств. / Под ред. Вольмана В.И.- М.: Радио и связь, 1982.- 328 с.
3. Никольский В.В., Никольский Т.И. Декомпозиционный подход к задачам электродинамики. - М.: Наука, 1983.- 304 с.
4. Книшевская Л.В., Шугуров В.К. Анализ микрополосковых линий. - Вильнюс: Мокслас, 1985.- 166 с.
5. Веселов Г.И. Метод частичных областей для электродинамических задач с некоординатными границами (продольно-регулярные системы). Докторская диссертация. - М.: МВТУ им. Баумана, 1971.
6. Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.П. Современные методы проектирования линий передачи и резонаторов сверх- и крайневых частот. - М.: Педагогика-Пресс, 1998.- 328 с.