

**ФАЗОВЫЕ ДИФРАКЦИОННЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ  
ДЛЯ ОДНОВРЕМЕННОГО ФОРМИРОВАНИЯ МОД ГАУССА-ЛАГЕРРА  
В РАЗЛИЧНЫХ ДИФРАКЦИОННЫХ ПОРЯДКАХ**

*В.В. Котляр, П. Лаакконен\*, Р.В. Скиданов, В.А. Сойфер, Я. Турунен\*, С.Н. Хонина  
Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара, Россия, e-mail: [ipsi@smr.ru](mailto:ipsi@smr.ru)  
\*) Факультет физики, Университет Йоеенсуу, Р.О. Вох 111, FIN-80101, Йоеенсуу, Финляндия.*

**Аннотация**

Рассчитаны, изготовлены и экспериментально исследованы фазовые оптические элементы, формирующие моды Гаусса-Лагерра в различных дифракционных порядках. Приведены сравнительные результаты численного моделирования и эксперимента.

**Введение**

Моды определяются как устойчивые при распространении в волноводной среде световые пучки. Моды не расплываются и не изменяют пространственной структуры в процессе распространения в своей среде, а лишь приобретают фазовый набег [1].

Рассматриваемые моды Гаусса-Лагерра сохраняют также свою структуру и в свободном пространстве, изменяясь лишь масштабно.

Актуальной задачей является создание приборов, формирующих эталоны модовых пучков, и приборов, измеряющих модовый состав лазерных пучков. Такие приборы смогут осуществить индивидуальное возбуждение, измерение и обнаружение мод когерентного излучения.

В работах [1-3] в качестве таких приборов рассматриваются дифракционные оптические элементы (ДОЭ), рассчитанные с помощью разных методов. Особый интерес представляют фазовые ДОЭ, имеющие повышенную энергетическую эффективность и многоканальный характер работы, позволяющий сформировать несколько модовых пучков. Такие ДОЭ можно использовать для параллельного ввода излучения в набор волокон или для оптического разложения когерентного поля по ортогональному базису.

Для расчета многоканальных ДОЭ, согласованных с модами Гаусса-Лагерра, в данной работе используется итерационный метод аппроксимации фазовой функции пропускания ДОЭ конечной суммой гауссовых мод [4].

Рассчитанные 9- и 24-канальные 64-градационные ДОЭ были изготовлены в Университете Йоеенсуу методом прямой записи электронным пучком на стекле.

В данной работе впервые экспериментально продемонстрирована возможность одновременной генерации набора различных модовых пучков (более 8 пучков), распространяющихся под разными углами к оптической оси.

**1. Теоретическая основа**

Данные элементы применяются как пространственные фильтры для анализа поперечного модового состава света и для одновременного ввода света в набор волокон [1].

Если ДОЭ, у которого функция пропускания представлена в виде линейной комбинации ограниченного числа базисных функций  $\{\psi_{nm}(x,y)\}$  с различными несущими пространственными частотами:

$$\tau(x,y) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \psi_{nm}^*(x,y) \exp[i(\alpha_{nm}x + \beta_{nm}y)], \quad (1)$$

совмещен со сферической линзой и освещен световой волной  $W(x,y)$ , то интенсивность света в заданных точках фокальной плоскости с пространственными частотами  $(\alpha_{nm}, \beta_{nm})$  будет приближенно пропорциональна квадратам модулей коэффициентов разложения  $w_{nm}$  светового поля по этому базису:

$$W(x,y) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M w_{nm} \psi_{nm}(x,y). \quad (2)$$

Эта пропорциональность будет тем точнее, чем больше разность соседних пространственных несущих частот:  $|\alpha_{nm} - \alpha_{pq}| \gg 1$ ,  $|\beta_{nm} - \beta_{pq}| \gg 1$ ,  $n \neq p, m \neq q$ , то есть, чем больше будут разделены между собой в пространстве отдельные моды.

Рассмотрим метод расчета оптических элементов, формирующих высокоэффективные моды Гаусса-Лагерра в заданных дифракционных порядках с требуемым распределением энергии света между модами.

Пусть требуется вычислить фазу оптического элемента  $S(x,y)$ , который образует (будучи освещенным плоским пучком света с амплитудой  $A_0(x,y)$ ) моды Гаусса-Лагерра в дифракционных порядках, определенных векторами несущих пространственных частот  $(\alpha_{nm}, \beta_{nm})$ , характеризующих наклон к оси распространения пучка с номерами  $(n,m)$ . Комплексная функция пропускания такого элемента должна удовлетворять в полярных координатах соотношению:

$$A_0(r,\varphi) \exp[iS(r,\varphi)] = \sum_{n=0}^N \sum_{|m| \leq n} C_{nm} \Psi_{nm}(r,\varphi) \times \exp[-ir\rho_{nm} \cos(\varphi - \theta_{nm})] \quad (3)$$

где  $\Psi_{nm}(r,\varphi)$  - обобщенная функция Гаусса-Лагерра:

$$\Psi_{nm}(r,\varphi) = \frac{2\sqrt{\pi(n-|m|)!}}{a\sqrt{(n!)^3}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\sigma_0}\right)^{|m|} \times \exp\left[-\left(\frac{r}{\sigma_0}\right)\right] L_n^{|m|} \left[\left(\frac{\sqrt{2}r}{\sigma_0}\right)^2\right] \exp[im\varphi] \quad (4)$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad n \geq 0, |m| \leq n,$$

$L_n^m(x) = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} [L_{m+n}(x)]$  - обобщенный многочлен Лагерра,  $\sigma_0$  - радиус перетяжки. Квадраты модулей коэффициентов  $|C_{nm}|^2$  характеризуют энергетический вклад каждой моды, а аргументы  $C_{nm}$  являются свободными параметрами задачи,  $(\rho_{nm}, \theta_{nm})$  - вектор несущих пространственных частот в полярных координатах.

При достаточно большой разнице между соседними векторами пространственных частот

$$\begin{aligned} \omega_{n,m;n+1,m+1}^2 &= \rho_{n,m}^2 + \rho_{n+1,m+1}^2 - \\ &- 2\rho_{n,m}\rho_{n+1,m+1} \cos(\theta_{n,m} - \theta_{n+1,m+1}) \end{aligned} \quad (5)$$

можно считать, что пучки пространственно разделяются в Фурье-плоскости и функции

$$\Psi_{nm}(r, \varphi) \exp[-ir\rho_{nm} \cos(\varphi - \theta_{nm})] \quad (6)$$

почти ортогональны. Тогда коэффициенты в (3) можно вычислять по формуле:

$$\begin{aligned} C_{nm} &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} A_0(r, \varphi) \exp[iS(r, \varphi)] \Psi_{nm}^*(r, \varphi) \times \\ &\times \exp[ir\rho_{nm} \cos(\varphi - \theta_{nm})] r dr d\varphi \end{aligned} \quad (7)$$

Далее для расчета ДОЭ с фазой  $S(r, \varphi)$  применяется итеративный алгоритм, описанный в [4].

Функции Гаусса-Лагерра являются собственными функциями преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \Psi_{nm}(r, \varphi) \exp[-ir\rho \cos(\varphi - \theta)] \times \\ \times r dr d\varphi = (-1)^n (-i)^m \Psi_{nm}(\rho, \theta) \end{aligned} \quad (8)$$

что позволяет использовать их для эффективного ввода излучения в световые волокна [1].

Заметим, что функции Гаусса-Лагерра со взаимно противоположной «закруткой»  $\exp[\pm im|\varphi]$  имеют одинаковые собственные значения:

$$\lambda_{nm} = (-1)^n (-i)^{|m|}. \quad (9)$$

Совокупность мод Гаусса-Лагерра с одинаковыми собственными значениями можно считать «модовой группой», так как она также представляет собой собственную функцию преобразования Фурье.

## 2. Численное моделирование

При численном моделировании использовались следующие параметры: 256 отсчетов по радиусу  $r$  и 256 отсчетов по угловой составляющей  $\theta$ , диапазон изменения аргументов  $r \in [0, 7\text{мм}]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , длина волны  $\lambda = 0.63$  мкм, фокусное расстояние  $f = 100$  мм,

радиус гауссового пучка в перетяжке  $a = 1$  мм. В формуле (3.3) рассматривались члены ряда с номерами  $n, m \leq N = 7$ . Модули всех коэффициентов выбирались равными:  $|C_{nm}| = \text{const}$ .

В качестве освещающего пучка  $A_0(r, \theta)$  выбирались плоский и гауссовый. В Таблице 1 приведены результаты численного моделирования для 9-канального и 24-канального ДОЭ для следующих параметров, характеризующих качество работы ДОЭ:

$\delta_c$  - относительное среднеквадратичное отклонение рассчитанных коэффициентов от заданных;

$\delta$  - относительное среднеквадратичное отклонение распределения рассчитанной амплитуды  $|E_r(\xi, \eta)|$  в Фурье-плоскости от идеальной  $|E_0(\xi, \eta)|$ :

$$\begin{aligned} \delta = \left[ \iint_{\Omega} (|E_r(\xi, \eta)| - |E_0(\xi, \eta)|)^2 d\xi d\eta \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left[ \iint_{\Omega} |E_0(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \right]^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\Omega$  - область в Фурье-плоскости, в которой заключено 99% энергии идеальной дифракционной картины;  $\eta$  - коэффициент корреляции:

$$\eta = \sum_{n,m \in Q} |C_{nm}|^2 \left[ \int_0^{R/2} \int_0^{2\pi} A_0(r, \theta) r dr d\theta \right]^{-1}, \quad (11)$$

где  $Q$  - множество заданных (полезных) коэффициентов.

Из Таблицы 1 видно, что освещение гауссовым пучком предпочтительней, чем плоским. Увеличение количества мод в фильтре почти в 3 раза приводит к увеличению относительного отклонения сформированных мод от идеальных не более, чем на 12%. Несмотря на высокую ошибку  $\delta$  в Таблице 1, поперечная структура рассчитанных пучков совпадает со структурой идеальных мод, отличие же заключено в перераспределении энергии внутри этой структуры. Коэффициент корреляции  $\eta$  показывает, что данные пучки будут возбуждать соответствующие моды со средней эффективностью более 70%.

На рис. 1 представлены графики зависимости среднеквадратичной ошибки  $\delta_c$  от числа итераций  $p$  для 9-канального (а) и 24-канального (б) фильтров, соответственно. Видно, что в обоих случаях после 5-6 итераций наступает эффект стагнации.

Таблица 1. Результаты численного моделирования для 9- и 24-канального ДОЭ.

Число каналов	Освещающий пучок	Радиус апертуры, R (mm) / Радиус осв. пучка Rg (mm)	Ошибка, $\delta_c$ (%)	Ошибка, $\delta$ (%)	Коэффициент корреляции, $\eta$ (%)
9	плоский	3.5 / 3.5	6.3	41.2	76.3
9	гауссовый	6.0 / 3.0	4.6	31.3	76.5
24	гауссовый	6.5 / 4.0	5.4	43.1	73.7

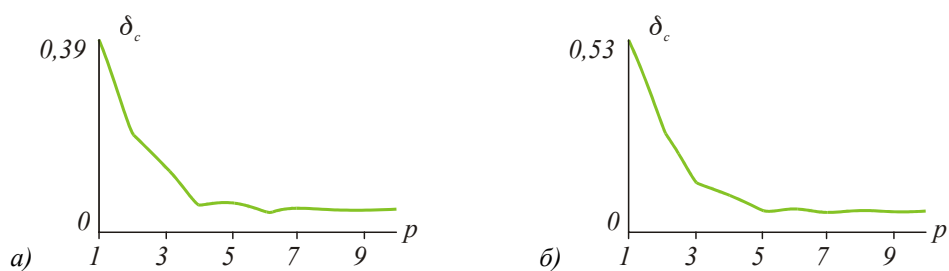


Рис. 1. Графики сходимости после 10 итераций для 9-канального (а) и 24-канального (б) фильтров, соответственно

На рис. 2 и 3 показаны результаты численного моделирования работы рассчитанных 9- и 24-канальных фильтров, соответственно: (а) фаза ДОЭ,

(б) распределение интенсивности в Фурье-плоскости, (в) схема, показывающая расположение номеров мод по порядкам.

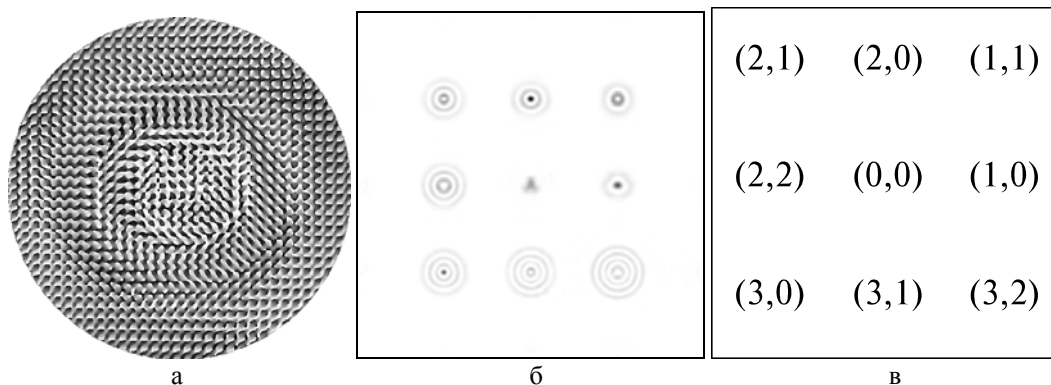


Рис. 2. Численное моделирование работы 9-канального фильтра при освещении гауссовым пучком: (а) фаза ДОЭ, (б) распределение интенсивности в Фурье-плоскости, (в) схема, показывающая расположение номеров мод по порядкам.

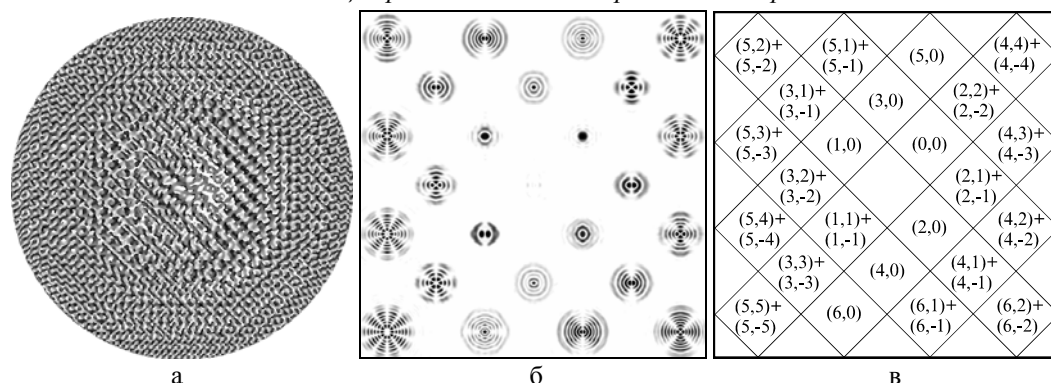


Рис. 3. Численное моделирование работы 24-канального фильтра при освещении гауссовым пучком: (а) фаза ДОЭ, (б) распределение интенсивности в Фурье-плоскости, (в) схема, показывающая расположение номеров мод по порядкам.

### 3. Изготовление многоуровневых ДОЭ.

Для изготовления многоуровневых элементов в Университете Йёнсуу (Финляндия) были использованы новый низкоконтрастный негативный электроннолучевой резист X AR-N 7700 фирмы AllResist GmbH (Берлин), электронно-лучевой генератор изображений Leica LION LV1 и реактивное ионное травление.

Резист был нанесен на кварцевую подложку толщиной 1100 нм и затем подложка подвергалась термической обработке при температуре 85°C в течение 30 мин. в воздушно-циркулярной печи. Алюминиевый слой толщиной 20 нм наносился на подложку. Формирование изображения на резисте выполнялось с помощью электронно-лучевого генератора изображений Leica LION LV1 при уско-

ряющем напряжении 12.5 кВ. После экспозиции алюминиевый слой был удален раствором гидрохлорной кислоты и деионизированной воды. Затем подложка подвергалась чередующейся термической обработке в воздушно-циркулярной печи (30 мин. при 110°C и 4 часа при 70°C). Проявление было выполнено за 50 сек. с помощью проявляющего раствора AR 300-47/деионизированная вода (2/1). Для переноса профиля резиста на SiO<sub>2</sub> было использовано пропорциональное реактивно-ионное травление в CHF<sub>3</sub>.

Существенного загрязнения в результате повторного осаждения продуктов травления не наблюдалось и желаемая глубина профиля может быть получена обычным способом с точностью 30 нм (не хуже 2.5%).

На рис. 4 приведен пример профиля дифракционной поверхности, полученного в результате экспозиции в резисте X AR-N 7700 и пропорционального травления в SiO<sub>2</sub>. Элемент имеет 16 уровней и размер пиксела 2.5 мкм × 2.5 мкм.

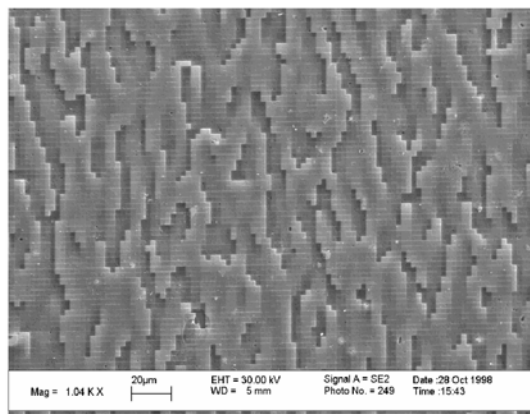


Рис. 4. Пример 16-уровневого профиля дифракционной поверхности, полученного в результате экспозиции в резисте X AR-N 7700 и пропорционального травления в SiO<sub>2</sub>.

#### 4. Эксперимент

Для проверки ДОО формирующих пучки Гаусса-Лагерра в различных дифракционных порядках был проведен ряд натурных экспериментов. Оптическая схема экспериментальной установки приведена на рис. 5. Здесь *L* - He-Ne лазер, *K* – коллиматор, *F* - ДОО, *L1* – первая линза, *D* - диафрагма, *L2* – вторая линза, *TV* - телекамера, *PC* - компьютер.

С помощью коллиматора *K* формируется плоский пучок, который попадает на ДОО – *F*. После ДОО в Фурье-плоскости первой линзы формируется набор пространственно разделенных мод. Диафрагма *D* вырезает из набора одну моду, затем вторая линза формирует ее Фурье-образ, который вводится в компьютер через телекамеру. В ходе эксперимента также осуществлялась регистрация всего

набора мод в плоскости диафрагмы. Для этого убиралась часть оптической схемы, которая обведена пунктирной линией.

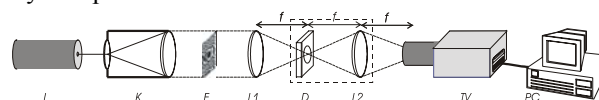


Рис. 5. Оптическая схема экспериментальной установки.

На рис. 6 показаны экспериментальные результаты по формированию 9-ти мод Гаусса-Лагерра с номерами (*n,m*): (0,0), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1), (3,2) в различных дифракционных порядках.

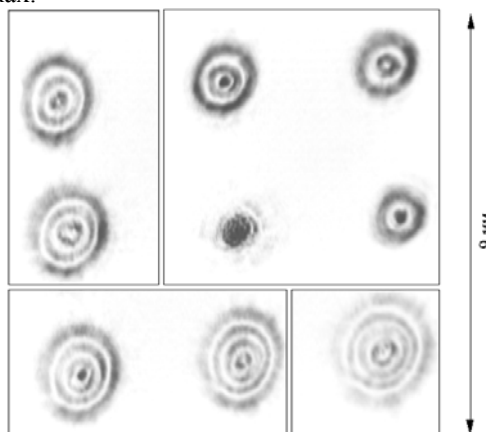


Рис. 6. Экспериментально зарегистрированное распределение интенсивности в фокальной плоскости линзы для 9-канального фильтра (для лучшей видимости составлено из фрагментов).

На рис. 7а,в,д,ж показаны более крупным планом экспериментально зарегистрированные порядки, соответствующие модам (1,0), (1,1), (2,1), (3,0), а на рис. 7б,г,е,з приведены их Фурье-спектры. Видно, что сформированные пучки сохраняют свою структуру, проявляя модовый характер.

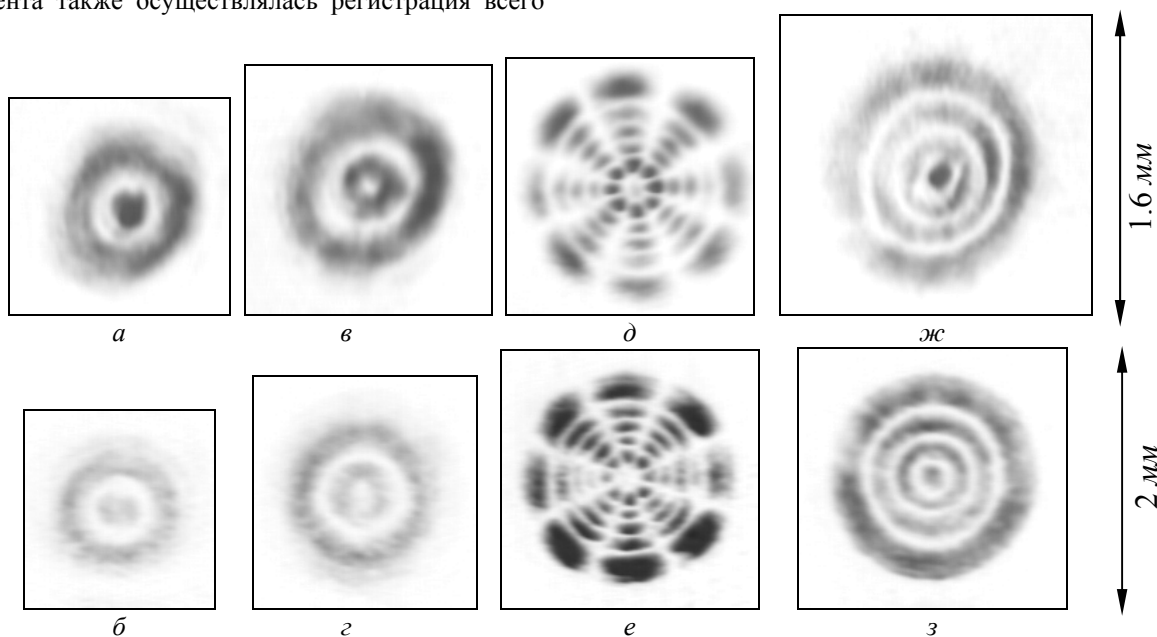


Рис. 7. Дифракционные порядки, соответствующие модам (1,0) (а), (1,1) (в), (2,1) (д), (3,0) (ж) в 9-канальном фильтре, и их Фурье-спектры (б, г, е, з).

На рис. 8 показаны результаты по формированию 24-х модовых пучков Гаусса-Лагерра, представляющих собой групповые моды, инвариантные к преобразованию Фурье, с номерами  $(n, \pm m)$ : (0,0), (1,0), (1,1)+(1,-1), (2,0), (2,1)+(2,-1), (2,2)+(2,-2), (3,0), (3,1)+(3,-1), (3,2)+(3,-2), (3,3)+(3,-3), (4,0), (4,1)+(4,-1), (4,2)+(4,-2), (4,3)+(4,-3), (4,4)+(4,-4), (5,0), (5,1)+(5,-1), (5,2)+(5,-2), (5,3)+(5,-3), (5,4)+(5,-4), (5,5)+(5,-5), (6,0), (6,1)+(6,-1), (6,2)+(6,-2) в различных дифракционных порядках.

На рис. 9а,в,д,ж показаны более крупным планом экспериментально зарегистрированные порядки, соответствующие композициям мод (2,0), (2,2)+(2,-2), (4,4)+(4,-4), (5,1)+(5,-1), а на рис. 9б,г,е,з приведены их Фурье-спектры. Видно, что сформированные пучки сохраняют свою структуру, проявляя модовый характер.

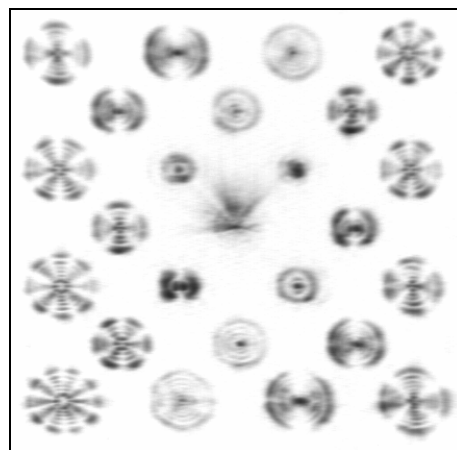


Рис. 8. Экспериментально зарегистрированное распределение интенсивности в фокальной плоскости линзы для 24-канального фильтра.

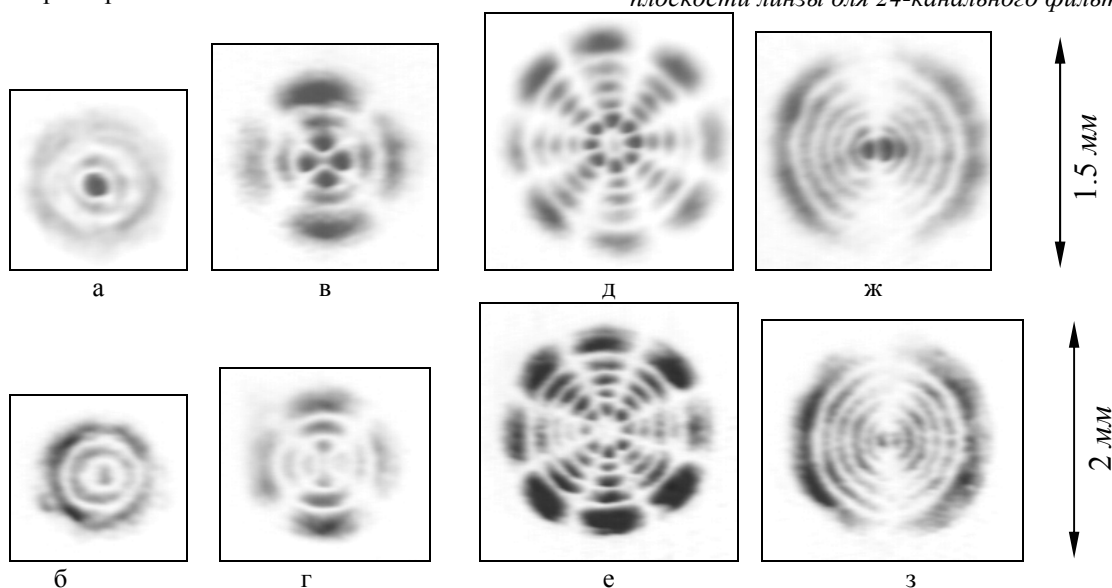


Рис. 9. Дифракционные порядки, соответствующие пучкам (2,0) (а), (2,2)+(2,-2) (в), (4,4)+(4,-4) (д), (5,1)+(5,-1) (ж) в 24-канальном фильтре, и их Фурье-спектры (б, г, е, з).

### Заключение

В данной работе получены следующие результаты:

- рассчитаны и изготовлены методом прямой записи электронным пучком на стекле фазовые 64-градационные ДОЭ, формирующие с эффективностью около 90% одновременно 9 и 24 разных пучков Гаусса-Лагерра, распространяющихся под заданными углами к оптической оси;
- экспериментально показано, что пучки сохраняют свою структуру в Фурье-плоскости (в дальней зоне), то есть действительно являются модами свободного пространства.

### Благодарность

Данная работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (№98-01-00894, 99-01-39012).

### Литература

1. Soifer V.A., Golub M.A. *Laser beam mode selection by computer generated holograms*, CRC Press, Boca Raton, U.S., 1994.
2. Soifer V.A., Kotlyar V.V., Doskolovich L.L. *Iterative methods for diffractive optical elements computation*, Taylor & Francis, London, 1997.
3. Kotlyar V.V., Khonina S.N., and Soifer V.A., Light field decomposition in angular harmonics by means of diffractive optics, *Journal of Modern Optics*, v.45, No.7, pp.1495-1506 (1998)
4. Khonina S.N., Kotlyar V.V., and Soifer V.A., Diffraction optical elements matched to the Gauss-Laguerre modes, *Optics and Spectroscopy*, vol.85, No.4, pp.636-644 (1998)

# Phase diffractive optical elements for the simultaneous generation of Laguerre-Gaussian modes in different diffraction orders

V.V. Kotlyar, P. Laakkonen<sup>1</sup>, A.A. Kovalev, R.V. Skidanov, V.A. Soifer, J. Turunen<sup>1</sup>, S.N. Khonina  
Image Processing Systems Institute of RAS  
<sup>1</sup>University of Joensuu, Finland

## *Abstract*

Phase optical elements generating Laguerre-Gaussian modes in various diffraction orders have been designed, produced and experimentally investigated. The comparison between numerical simulations and experimental results is presented.

*Citation:* Kotlyar VV, Laakkonen P, Kovalev AA, Skidanov RV, Soifer VA, Turunen J, Khonina SN. Phase diffractive optical elements for the simultaneous generation of Laguerre-Gaussian modes in different diffraction orders. *Computer Optics* 1999; 19: 107 - 111.

## *References*

- [1] Soifer V.A., Golub M.A. Laser beam mode selection by computer generated holograms, CRC Press, Boca Raton, U.S., 1994.
- [2] Soifer V.A., Kotlyar V.V., Doskolovich L.L. Iterative methods for diffractive optical elements computation, Taylor & Francis, London, 1997.
- [3] Kotlyar V.V., Khonina S.N., and Soifer V.A., Light field decomposition in angular harmonics by means of diffractive optics, *Journal of Modern Optics*, v.45, No.7, pp.1495-1506 (1998)
- [4] Khonina S.N., Kotlyar V.V., and Soifer V.A., Diffraction optical elements matched to the Gauss-Laguerre modes, *Optics and Spectroscopy*, vol.85, No.4, pp.636-644 (1998).