

# ФАЗОВЫЙ ФИЛЬТР ДЛЯ СЕЛЕКЦИИ УГЛОВЫХ ГАРМОНИК

В.В. Котляр, С.Н. Хонина  
Институт систем обработки изображений РАН

## Аннотация

В данной работе рассматриваются ДОО, предназначенные для селекции угловых гармоник, присутствующих в лазерном пучке. Угловая гармоника – это комплексная экспонента, аргумент которой линейно зависит от полярного угла, причем коэффициент пропорциональности – целое число – ее номер. Рассчитан фазовый 8-ми канальный ДОО для селекции угловых гармоник с номерами  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$  и проведено численное моделирование для пучков Бесселя и Гаусса-Лагерра.

## Введение

Известны световые лазерные моды, которые формируются в лазерных резонаторах и световых волокнах, и фаза которых линейно зависит от полярного угла в цилиндрической системе координат. Это моды Гаусса-Лагерра, Бесселя. В поперечном сечении распределения интенсивности таких мод имеются точки с нулевой интенсивностью. Световое поле в окрестности этих нулей интенсивности ведет себя как гидродинамическая воронка.

Комплексную амплитуду любого поля можно разложить в цилиндрических координатах по угловым гармоникам. Угловая гармоника (УГ) – это комплексная экспонента, аргумент которой линейно зависит от полярного угла, причем коэффициент пропорциональности – целое число – номер УГ.

УГ описывает сингулярность фазы волнового фронта, т.к. при обходе вокруг центра полярной системы координат фаза приобретает набег равный  $2\pi n$ ,  $n$  – номер УГ.

В работах [1-7] УГ генерировались с помощью специальных оптических элементов цифровой голографии [1,2,6], амплитудных дифракционных решеток [5,7] и фазовых дифракционных оптических элементов (ДОО) [3,4].

УГ генерировались в составе мод Бесселя [8] и Гаусса-Лагерра на выходе резонатора лазера [9], в составе квазимодовых пучков [10,11]. Линейная комбинация из УГ формировалась с помощью амплитудных и фазовых оптических элементов для демонстрации эффектов вращения световых пучков [12-16]: бесселевых многомодовых пучков [12], многомодовых пучков Гаусса-Лагерра [13-15] и спиральных гауссовых пучков [16].

Оптическое разложение светового поля по ортогональному базису, согласованному с модами Гаусса-Лагерра и Бесселя рассматривалось в [17].

В данной работе рассматриваются ДОО, предназначенные для селекции УГ, присутствующих в лазерном пучке. В [18] такая задача была решена с помощью амплитудного 3-х канального фильтра, который представляет из себя дифракционную решетку со сбоем и выделяет только УГ  $\pm 1$ -го порядков. В данной работе рассчитан фазовый 8-ми канальный ДОО для селекции УГ с номерами  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$  и проведено численное моделирование для различных модовых пучков.

## 1. Теоретическое основание

Комплексную амплитуду светового поля  $f(r, \varphi)$  в цилиндрических координатах  $\{x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi\}$  можно аппроксимировать усеченным функциональным рядом ортогональных базисных функций угловых гармоник [17,18]  $\exp(in\varphi)$ ,  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ :

$$f(r, \varphi) = \sum_{n=-N}^N f_n(r) \exp(in\varphi), \quad (1)$$

где

$$f_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \exp(-in\varphi) d\varphi. \quad (2)$$

Пропускание многоканального фильтра, осуществляющего оптическое разложение светового поля (1) по базису угловых гармоник имеет вид:

$$\tau(r, \varphi) = \sum_{m=-M}^M C_m \times \exp\left[-im\varphi + i\frac{k}{f} r \rho_m \cos(\varphi - \theta_m)\right], \quad (3)$$

где  $k=2\pi/\lambda$  – волновое число света с длиной волны  $\lambda$ ,  $f$  – фокусное расстояние линзы, выполняющей Фурье-преобразование и в плоскости пространственного спектра которой формируется комплексная амплитуда:

$$\begin{aligned} F(\rho, \theta) &= \frac{ik}{2\pi f} \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \tau(r, \varphi) \times \\ &\times \exp\left[-i\frac{k}{f} r \rho \cos(\varphi - \theta)\right] r dr d\varphi = \\ &= \frac{ik}{2\pi f} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N C_m \frac{i^{m-n}}{2\pi} \times \\ &\times \exp[-i(m-n)\vartheta_m(\rho, \theta)] \int_0^R f_n(r) J_{m-n} \times \\ &\times \left(\frac{k}{f} r \sqrt{\rho^2 + \rho_m^2 - 2\rho\rho_m \cos(\theta - \theta_m)}\right) r dr, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\mathcal{G}_m(\rho, \theta) = \arctg \left[ \frac{\rho_m \sin \theta_m - \rho \sin \theta}{\rho_m \cos \theta_m - \rho \cos \theta} \right], \quad (5)$$

$J_m(x)$  – функция Бесселя первого рода  $m$ -го порядка.

$$F(\rho_m, \theta_m) = \frac{ikC_m}{(2\pi)^2 f} \int_0^R f_m(r) r dr + \frac{ik}{(2\pi)^2 f} \sum_{m' \neq m} C_{m'} (-i)^{m'-m} \times \\ \times \exp[i(m'-m)\mathcal{G}_{m'}(\rho_{m'}, \theta_{m'})] \int_0^R f_m(r) J_{m'-m} \left( \frac{k}{f} r \sqrt{\rho_m^2 + \rho_{m'}^2 - 2\rho_m \rho_{m'} \cos(\theta_m - \theta_{m'})} \right) r dr, \quad (6)$$

Второе слагаемое в ур. (6) много меньше первого, т.к. аргумент функции Бесселя в несколько раз больше  $2\pi$ .

$$\frac{k}{f} R \sqrt{\rho_m^2 + \rho_{m'}^2 - 2\rho_m \rho_{m'} \cos(\theta_m - \theta_{m'})} \gg 2\pi.$$

Это неравенство следует из того, что точки  $(\rho_m, \theta_m)$  и  $(\rho_{m'}, \theta_{m'})$  принадлежат разным дифракционным порядкам (диаметр которых примерно равен  $\lambda f/R$ ), пространственно разделенным в Фурье-плоскости. С учетом этого замечания вместо ур. (6) запишем приближенное выражение для интенсивности в центре  $m$ -го порядка:

$$I(\rho_m, \theta_m) = |F(\rho_m, \theta_m)|^2 \approx \\ \approx \left( \frac{kC_m}{4\pi^2 f} \right)^2 \cdot \left| \int_0^R f_m(r) r dr \right|^2. \quad (7)$$

Может оказаться, что интеграл в ур. (7) равен нулю при  $f_m(r) \neq 0$ , тогда датчик не определит наличие в пучке  $m$ -ой УГ, хотя она будет присутствовать в поле с амплитудой  $f(r, \varphi)$ . Чтобы избежать этого случая можно регистрировать последовательно несколько распределений интенсивности  $I_q(\rho_m, \theta_m)$ ,  $q=1, 2, \dots$  при разных радиусах диафрагмы  $R_q$ .

$$F(\rho, \theta) = \frac{ik}{(2\pi)^2 f} \sum_m C_m (-i)^m \exp[im\mathcal{G}_m(\rho, \theta)] \int_0^R f_0(r) J_m \left( \frac{k}{f} r \sqrt{\rho^2 + \rho_m^2 - 2\rho \rho_m \cos(\theta - \theta_m)} \right) r dr. \quad (9)$$

В разностных координатах, связанных с центром  $m$ -го дифракционного порядка  $\Delta\rho_m = |\vec{\rho} - \vec{\rho}_m|$ , где  $\vec{\rho} = (\rho, \theta)$  и  $\vec{\rho}_m = (\rho_m, \theta_m)$ , интенсивность будет пропорциональна преобразованию Ханкеля  $m$ -го порядка:

$$I_m = \left| \frac{kC_m}{(2\pi)^2 f} \int_0^R f_0(r) J_m \left( \frac{k}{f} r \Delta\rho_m \right) r dr \right|^2. \quad (10)$$

То есть фильтр (3) для радиально-симметричного поля выполняет параллельно несколько преобразований Ханкеля заданных порядков.

В точке Фурье-плоскости с полярными координатами  $(\rho_m, \theta_m)$  амплитуда светового поля (4) будет иметь вид:

Если  $f_m(r) \equiv 0$ , т.е. в световом поле  $f(r, \varphi)$  не присутствует гармоника  $\exp(in\varphi)$ , то в центре дифракционного порядка при  $(\rho, \theta) = (\rho_m, \theta_m)$  значение интенсивности, как следует из ур. (7), будет равно нулю (с учетом замечаний, относящихся ко второму слагаемому в ур. (6)).

Для известных световых мод, описываемых функциями Бесселя или Гаусса-Лагерра, радиальными многочленами Цернике, функции из ур. (2) примут конкретный аналитический вид:

$$f_n(r) = J_n(\alpha r), \\ f_n(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2w^2}\right) L_l^{|n|} \left( \frac{r^2}{w^2} \right), \quad (8) \\ f_n(r) = R_l^n(r)$$

где  $L_l^{|n|}(r)$  – присоединенный многочлен Лагерра,  $R_l^n(r)$  – радиальный многочлен Цернике.

Если имеется радиально-симметричное поле  $f(r, \varphi) = f_0(r)$ , то вместо ур. (6) получим:

### 3. Численное моделирование.

При расчете 8-ми порядкового фильтра (3) пространственные несущие  $(\rho_m, \theta_m)$ , соответствующие каждому из порядков, были выбраны так, чтобы получить бинарную фазу. На рис. 1а показана бинарная (белый – 0, черный –  $\pi$ ) фаза 8-ми порядкового фильтра (3). Причем коэффициенты  $C_n$  были подобраны таким образом, чтобы модуль функции  $\alpha(r, \varphi)$  был близок к постоянному значению. На рис. 1б дана диаграмма дифракционных порядков с номерами УГ  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$  (радиус  $R=6$  мм) порядков (б).

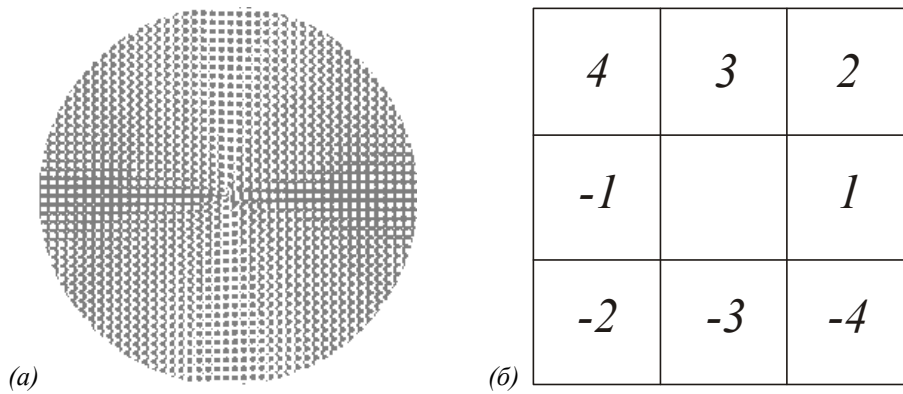


Рис. 1. Бинарная фаза 8-ми порядкового фильтра УГ (а) и диаграмма расположения дифракционных (рис. 2в).

На рис. 2 показан результат работы фильтра с фазой, приведенной на рис. 1а, при освещении его модовым пучком Гаусса-Лагерра, состоящим из одной моды с номером  $(l,n)=(4,0)$   $\exp\left(-\frac{r^2}{2w^2}\right)L_4^0\left(\frac{r^2}{w^2}\right)$  (рис. 2а) и композиции мод с номерами  $(1,1)+(4,-1)$   $\exp\left(-\frac{r^2}{2w^2}\right)\left\{L_1^1\left(\frac{r^2}{w^2}\right)\exp(i\varphi) + L_4^1\left(\frac{r^2}{w^2}\right)\exp(-i\varphi)\right\}$ .

Перетяжка гауссова пучка равна  $w=1$  мм. На рис. 2б,г показаны соответствующие картины распределения интенсивности в фокальной плоскости.

Т.к. пучок Гаусса-Лагерра с модой  $(4,0)$  является радиально-симметричным полем, то в каждом из порядков на рис.2б можно видеть результат соответствующего преобразования Ханкеля. Пучок Гаусса-Лагерра с композицией мод  $(1,1)+(4,-1)$  имеет УГ с номерами  $m=\pm 1$ , которые и были обнаружены фильтром: стрелками на рис. 2г отмечены дифракционные порядки, в центральных точках которых имеются не нулевые значения интенсивности (при  $m=\pm 1$ ), во всех других порядках на рис. 2б,г в центрах наблюдается нулевое значение интенсивности.

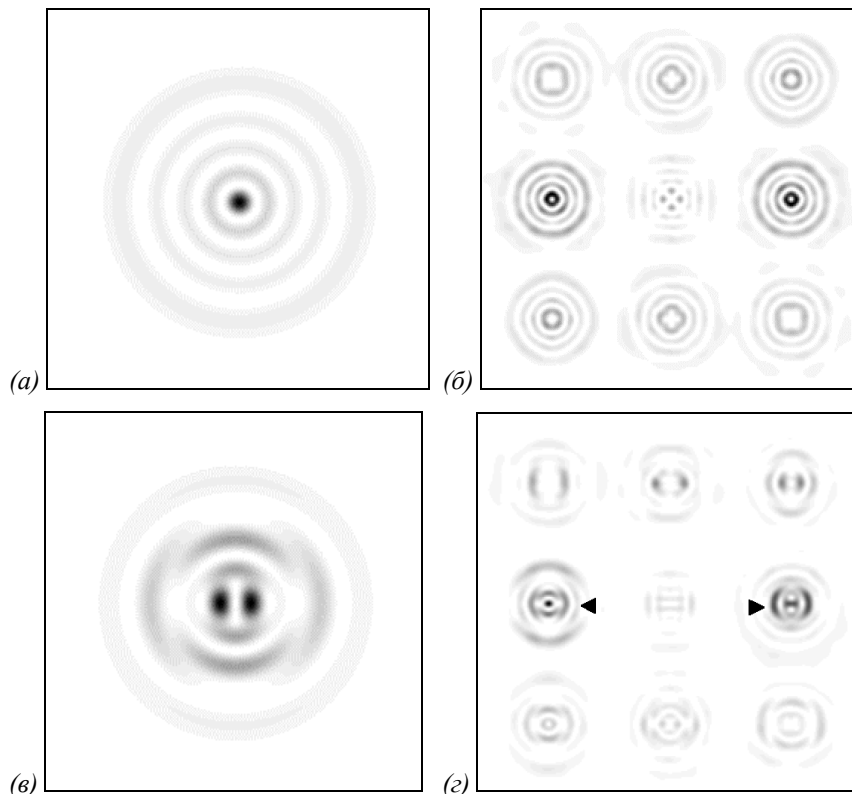


Рис. 2. Анализируемые пучки Гаусса-Лагерра: мода  $(4,0)$  (а) и композиция мод  $(1,1)+(4,-1)$  (в) и соответствующее им распределение интенсивности в фокальной плоскости после фильтра (б) и (г).

На рис. 3 показан результат работы фильтра (рис. 1а, радиус  $R=5$  мм) при освещении его модовым пучком Бесселя, состоящим из одной моды  $J_3(5r)\exp(i3\varphi)$  (рис. 3а) и композиции мод  $J_4(3r)\exp(i4\varphi) + J_4(3r)\exp(-i4\varphi)$  (рис. 3в). На

рис. 3б,г стрелками показаны дифракционные порядки, в центрах которых имеется ненулевая интенсивность. В центрах всех других порядков на рис. 3б,г наблюдается нулевая интенсивность.

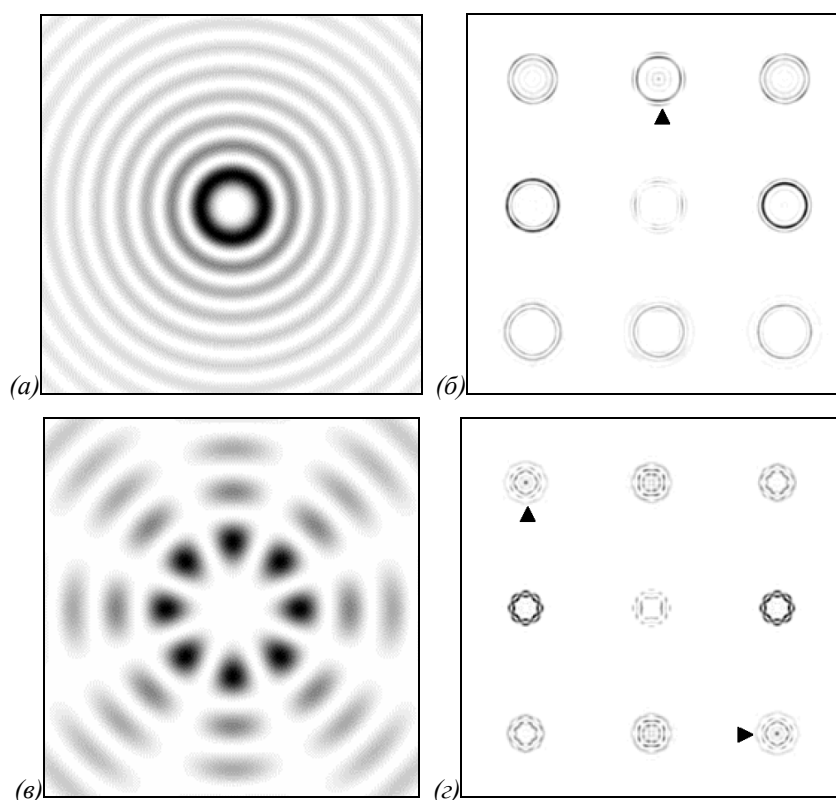


Рис. 3. Анализируемые пучки Бесселя: мода  $J_3(5r)\exp(i3\varphi)$  (а) и композиция мод  $J_4(3r)\exp(i4\varphi) + J_4(3r)\exp(-i4\varphi)$  (в) и соответствующее им распределение интенсивности в фокальной плоскости после фильтра (б) и (г).

Видно, что фильтр работает независимо от подаваемого на фильтр размера пучка, при этом меняется только размер дифракционного порядка. Хотя для того, чтобы приближенное выражение (7) было более точным, нужно чтобы как можно дальше были разнесены.

#### Заключение.

В данной работе получены следующие результаты:

- Рассмотрен фазовый ДОО для обнаружения угловых гармоник, содержащихся в лазерном пучке.
- Проведено теоретическое рассмотрение и численное моделирование работы данного ДОО, и показано, что он одинаково эффективно обнаруживает угловые гармоники в многомодовых пучках Бесселя и Гаусса-Лагерра.
- В последующих работах планируется изготовление данного ДОО и его экспериментальная апробация.

#### Благодарность

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований

N 98-01-00894, 99-01-39012, 00-15-96114, 00-01-00031.

#### Литература

1. Березный А.Е., Прохоров А.М., Сисакян И.И., Соифер В.А., Бессель-оптика, ДАН СССР, **274**(4), 802-805 (1984)
2. Vasara A., Turunen J., Friberg A.T., Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms, J. Opt. Soc. Am. **6**, 1748-1754 (1989)
3. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Shinkaryev M.V., Uspleniev G.V., Trochoson, Optics Communications **91**(3,4), 158-162 (1992)
4. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Shinkaryev M.V., Soifer V.A., Uspleniev G.V., The phase rotor filter, J. Mod. Opt. **39**(5), 1147-1154 (1992)

5. Bazhenov V.Yu., Soskin M.S., Vasnetsov M.V., Screw dislocations in light wavefronts, *J. Mod. Opt.* **39**(5), 985-990 (1992)
6. Heckenberg N.R., McDuff R., Smith C.P., White A.G., Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms, *Opt. Lett.*, **17**, 221-223 (1992)
7. Basistiy I.V., Bazhenov V.Yu., Soskin M.S., Vasnetsov M.V., Optics of light beams with screw dislocations, *Opt. Commun.* **103**, 422-428 (1993)
8. Paakkonen P., Turunen J., Resonators with Bessel-Gauss modes, *Opt. Commun.* **156**, 359-366 (1998)
9. Abramochkin E., Losersky N., Volostnikov V., Generation of spiral-type laser beams, *Opt. Commun.* **141**, 59-64 (1997).
10. Spektor B., Piestun R., Shamir J., Dark beams with a constant notch. *Opt. Lett.* **21**(7), 456-458 (1996)
11. Piestun R., Schechner Y.V., Shamir J., Self-imaging with finite energy, *Opt. Lett.* **22**(4), 200-202 (1997)
12. Paakkonen P., Lautanen J., Honkanen M., Kuittinen M., Turunen J., Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Friberg A.T., Rotating optical fields: experimental demonstration with diffractive optics, *J. Mod. Opt.* **45**(11), 2355-2370 (1998)
13. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Honkanen M., Lautanen J., Turunen J., Generation of rotating Gauss-Laguerre modes with binary-phase diffractive optics, *J. Mod. Opt.*, **42**(2), 227-238 (1999)
14. Schechner Y.V., Piestun R., Shamir J., Wave propagation with rotating intensity distributions, *Physical Review E* **54**(1), 50-53 (1996)
15. Piestun R., Schechner Y.V., Shamir J., Self-imaging with finite energy, *Opt. Lett.* **22**(4), 200-202 (1997)
16. Abramochkin E., Volostnikov V., Spiral-type beams: optical and quantum aspects, *Opt. Commun.* **125**, 302-323 (1996)
17. Kotlyar V.V., Khonina S.N., and Soifer V.A., Light field decomposition in angular harmonics by means of diffractive optics, *J. Mod. Opt.*, **45**(7), 1495-1506 (1998)
18. Trapani P.D., Berzanskis A., Minardi S., Sapone S., Chinaglia W., Observation of optical vortices and  $J_0$  Bessel-like beams in quantum-noise parametric amplification, *Phys. Rev. Lett.*, **81**(23), 5133-5151 (1998)