

СРАВНИТЕЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ САМОИЗОБРАЖЕНИЯ ПРОЗРАЧНЫХ РЕШЁТОК

И.Г. Пальчикова, С.С. Попова, С.В. Смирнов

*Институт автоматики и электрометрии СОРАН
Новосибирский государственный университет
E-mail: palchikova@iae.nsk.su*

На основании сравнительного теоретического и экспериментального исследования эффекта Тальбота для прозрачных линейных и равномерных круговых решёток рассмотрено самопроизвольное воспроизведение поля после зонных пластинок. Выявлены особенности, связанные как с формой, так и с периодом штрихов. Показано, что качество самоизображения решёток определяется границами области воспроизводимых в изображении пространственных частот. Приводятся экспериментальные результаты визуализации фазовых объектов с помощью интерферометра Тальбота на зонных пластинках.

Введение

Электромагнитное поле за предметом, освещённым плоской монохроматической волной, представляет собой набор дифрагированных волн. Если в предметную плоскость поместить линейную дифракционную решётку (пропускающую или отражающую свет), то на некотором расстоянии от неё в результате переналожения дифрагированных волн воспроизводится структура интенсивности света в плоскости сразу после решётки. Этот эффект легко наблюдается с высоко когерентными источниками света. Принципиальная оптическая схема для наблюдения эффекта Тальбота приведена на рис. 1. Не-Ne лазер 1 и коллиматор 2-3-4 формируют плоскую монохроматическую волну. Широкий пучок падает на дифракционную решётку, помещённую в плоскость 5. Перемещая экран 6, легко найти плоскость самопроизвольного воспроизведения изображения решётки – плоскость Тальбота.

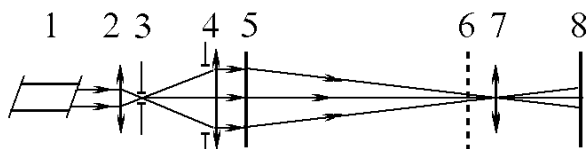


Рис.1. Принципиальная оптическая схема наблюдения эффекта Тальбота

Со времени открытия этого эффекта Тальботом в 1836 г. [1,2] появилось множество как теоретических, так и прикладных работ, посвященных его изучению и применению. Расчёт поля на различных расстояниях за дифракционной решеткой был выполнен методом Рэлея в работах [3,4,5,6]. В [7] показано, что эффект Тальбота есть частный случай более общего свойства периодических полей. А именно: если отношение расстояния между дифракционной структурой и плоскостью наблюдения к расстоянию Тальбота равно рациональному числу, то распределение поля в плоскости наблюдения представимо в виде суперпозиции конечного набора полей, каждое из которых с точностью до коэффициента совпадает с начальным полем, смещённым относительно начала координат. Количество слагаемых, дающих ненулевой вклад в сумму, зависит от положения плоскости наблюдения так что на рас-

стоянии, равном длине Тальбота, остаётся только один член суммы.

Терминология этого явления вызывает споры: возможно ли называть “эффектом Тальбота” многообразные проявления частичного воспроизведения поля за решеткой? Некоторые из авторов, например, П. Звайковский [8], вполне обоснованно полагали, что называть этим термином можно только полное воспроизведение поля непосредственно за линейной решёткой на расстояниях Тальбота, что и наблюдалось самим Тальботом. Их оппоненты, например П. Латимер, указывали на то, что все проявления частичного или полного воспроизведения поля за решеткой имеют одинаковую природу, возникают в результате интерференции дифрагированных волн и требуют единообразного описания [9,10]. Однако и до сих пор единой терминологии не существует.

Представляет интерес вопрос о том, какие именно дифракционные структуры обладают способностью формировать на некоторых отличных от нуля расстояниях поле, воспроизводящее начальное. Попытка рассмотреть вопрос в общем виде предпринята В. Монтгомери [11]. Рассмотрение проводилось методом Рэлея для случая дифракции Френеля и решёток бесконечной апертуры. Выявлена связь между координатой плоскости самовоспроизведения и обратными векторами линейной решетки. Однако переход в прямое пространство решёток не выполнен. Описан только способ, которым это можно сделать. В выводах автор отмечает, что вопрос о возможности наблюдения самопроизвольного воспроизведения поля после зонной пластинки рассмотрен недостаточно.

Эффект Тальбота применяется для визуализации сложных фазовых объектов [13,14], в спектрометрии и интерферометрии [15, 16, 17, 18, 19] для создания датчиков волновых фронтов [20, 21], массивов осветителей [22] и для повышения степени когерентности излучения коаксиальных волноводных лазеров вдоль азимутального направления [12].

Практически все работы, связанные с этим эффектом, рассматривают плоские периодические объекты с постоянным периодом, в фазовую функцию пропускания которых входит декартова координата в первой степени. Однако среди дифракционных элементов, широко используемых в оптике, есть структуры, период которых меняется в зависи-

мости от координаты, например, зонные пластинки. В работе [23] предпринята попытка рассчитать расстояние Тальбота для зонных пластинок, но полученная там формула приходит в противоречие с рассмотрением поля после зонных пластинок с позиций теории интерферометров [27] и с экспериментами, проведёнными нами.

Целью данной работы является рассмотрение самопроизвольного воспроизведения поля в ближней зоне дифракции после зонных пластинок, а именно: на основе сравнительного изучения качества самоизображения линейных и равномерных круговых решёток находится расстояние Тальбота для зонных пластинок, строится интерферометр Тальбота на зонных пластинках.

Расчёт поля за дифракционными решётками с заданными функциями пропускания τ будем проводить с помощью интеграла Кирхгофа в параболическом приближении для трёх типов дифракционных структур. Следуя единому алгоритму, определим местоположение плоскостей самопроизвольного воспроизведения поля и изучим влияние принятых приближений на качество изображения. Примем следующие обозначения для величин: λ – длина световой волны, (x, y) или (ρ, θ) – декартовы или цилиндрические координаты в предметной плоскости 5 (см. рис. 1), (x_0, y_0) или (r, ψ) – в плоскости наблюдения 6. Плоскость наблюдения находится на расстоянии z от предметной.

Эффект Тальбота

в линейных дифракционных решётках

Эффект Тальбота в случае неограниченной апертуры линейной амплитудной прозрачной дифракционной решётки рассмотрен достаточно подробно [3-6]. Нас интересуют допущения этого приближения и влияние их на резкость изображения. Ограничимся одномерным случаем и запишем амплитуду $E(x_0, z)$ поля в плоскости наблюдения в виде:

$$E(x_0, z) = \frac{E_0}{i\lambda z} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x) \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda} \left(z + \frac{x_0^2}{2z} - \frac{xx_0}{z} + \frac{x^2}{2z} \right)\right] dx. \quad (1)$$

Функция пропускания решётки является периодической и, следовательно, представима в виде ряда Фурье:

$$\tau(x) = \begin{cases} \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_p \exp(i2\pi p x / T), & |x| \leq D, \\ 0, & |x| > D, \end{cases} \quad (2)$$

где T – период решётки, p – целое, $2D$ – размер рабочей области решётки, A_p – коэффициенты ряда Фурье функции пропускания. Следует обратить внимание на то, что каждое слагаемое суммы (2) описывает соответствующий (p -ый) дифракционный

порядок, а величины p/T в показателях экспонент есть пространственные частоты решётки.

После подстановки функции (2) в интеграл (1) и выполнения несложных преобразований выражение (1) примет вид:

$$E(x_0, z) = -\frac{E_0 e^{i2\pi x_0 / \lambda}}{2\lambda z} \cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} C \cdot A_p \cdot \exp(i2\pi x_0 / T) \cdot \exp(-i\pi p^2 \lambda z / T^2), \quad (3)$$

где

$$C = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} e^{i\xi^2} d\xi, \quad (4)$$

$$\xi_{\max} = D \sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}} + \left(\frac{\lambda p}{T} - \frac{x_0}{z} \right) \sqrt{\frac{\pi z}{\lambda}},$$

$$\xi_{\min} = -D \sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}} + \left(\frac{\lambda p}{T} - \frac{x_0}{z} \right) \sqrt{\frac{\pi z}{\lambda}}.$$

Если считать апертуру неограниченной, то интеграл (4) есть постоянная величина $-\sqrt{i\pi}/2$, которая выносится за знак суммы. Величина ошибки такого допущения зависит от всех переменных, определяющих ξ . Например, для характерных параметров системы: длина волны $\lambda=0,63 \cdot 10^{-3}$ мм, $z=200$ мм, $|D|=5$ мм, -10 мм $< x_0 < 10$ мм; $p/T=0,1$ мм $^{-1}$, значения ξ_{\max} и ξ_{\min} составят $-36,15 < \xi_{\min} < -13,66$; $13,66 < \xi_{\max} < 36,15$, а ошибка, возникающая при замене пределов интегрирования на бесконечные не превышает 10%. Однако при достаточно малых периодах p/T точка 0, являющаяся стационарной, окажется вне промежутка интегрирования (ξ_{\min}, ξ_{\max}) и модуль интеграла (4) станет пренебрежимо мал по сравнению с постоянной $|\sqrt{i\pi}/2|$. Ещё одним фактором, обуславливающим отличие суммы в (3) от суммы в (2), является сомножитель $\exp(-i\pi p^2 \lambda z / T^2) = \exp(-i\pi a p^2)$. Если коэффициент $a=\lambda z / T^2$ чётный, то экспонента равна единице для всех номеров p и поле за решёткой может быть пропорционально её функции пропускания. Для нечётных a коэффициенты Фурье домножаются на $(-1)^p$: $A_p \cdot (-1)^p$.

Из теории рядов Фурье известно, что если A_p – коэффициенты Фурье T -периодической функции $\tau(x)$, то $A_p \exp(i2\pi p u / T)$ – коэффициенты Фурье функции $\tau(x+u)$. Следовательно, поле за линейной решёткой в плоскостях z , соответствующих нечётным a может быть пропорционально функции пропускания решётки, сдвинутой на половину её периода. В случае нецелых a сумма $\sum_{p=-\infty}^{\infty} A_p \exp(i2\pi p x_0 / T) \exp(-i\pi a p^2)$ очевидно не будет рядом Фурье ни для функции $\tau(x)$, ни для функции, полученной из $\tau(x)$ сдвигом вдоль оси x .

Таким образом, в случае неограниченной апертуры в плоскостях $z_T = 2mT^2/\lambda$ (m – целое) поле за линейной решёткой будет пропорционально её функции пропускания $\tau(x)$, а в плоскостях $z'_T = (2m+1)T^2/\lambda$ – функции пропускания, сдвинутой на половину периода $\tau(x+T/2)$.

Аналитическое рассмотрение подтверждается результатами численных расчётов распределения интенсивности $I(x_0, z) \sim |E(x_0, z)|^2$, которые проводились по формуле (1) методом интегрирования первого порядка. Функция пропускания прозрачной решётки в пределах рабочей области $|x| \leq D$ имеет вид

$$\tau(x) = \begin{cases} 1, & x \in [jT \div (2j+1)T/2], x \in [-(2j+1)T/2 \div -(j+1)T] \\ 0, & x \in ((2j+1)T/2 \div (j+1)T), x \in (-jT \div -(2j+1)T/2), \\ & j = 0, 1, 2, 3 \dots K. \end{cases}$$

Для параметров приняты следующие значения: длина волны $\lambda = 0,63 \cdot 10^{-3}$ мм, диаметр пучка $2D = 10$ мм, период $T = 100$ мкм.

Полученные графики представлены на рисунке 2. Кривая 1 отвечает положению плоскости наблюдения на расстоянии $z = 316$ мм ($a = 20$) от плоскости решётки, кривая 2 – $z = 321$ мм ($a = 20,3$), кривая 3 – $z = 323,5$ мм ($a = 20,5$), кривая 4 – $z = 326$ мм ($a = 20,6$), кривая 5 – $z = 331$ мм ($a = 20,9$). Кривые 1 и 5 соответствуют координатам z_T и z'_T . Рисунок 2 иллюстрирует нарушение качества самовоспроизведения из-за конечного размера решётки.

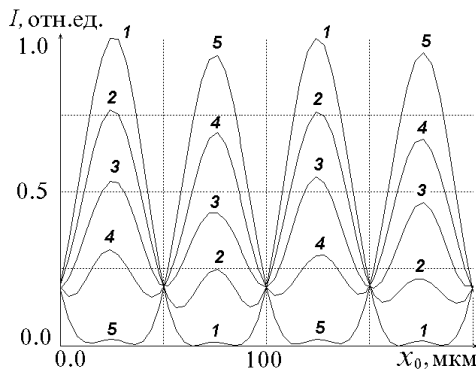


Рис. 2. Численный эксперимент с линейными решётками. Распределения интенсивности $I(x_0)$ (отн. ед.) в различных плоскостях наблюдения. $\lambda = 0,63 \cdot 10^{-3}$ мм, $2D = 10$ мм, $T = 100$ мкм. Кривая 1 соответствует $z = 316$ мм ($a = 20$), кривая 2 – $z = 321$ мм ($a = 20,3$), кривая 3 – $z = 323,5$ мм ($a = 20,5$), кривая 4 – $z = 326$ мм ($a = 20,6$), кривая 5 – $z = 331$ мм ($a = 20,9$).

Из рис. 2 видно, что график распределения интенсивности в плоскости, расположенной на расстоянии $z_T = 316$ мм (кривая 1; $a = 20$) не совпадает со ступенчатой функцией пропускания решётки, но имеет тот же период T . Основной причиной их от-

личия является зависимость величины C в сумме (3) от номера p . Для порядков, у которых стационарная точка интеграла (4) лежит в промежутке интегрирования (ξ_{\min}, ξ_{\max}) , величину C можно считать постоянной. Условие наличия стационарной точки в промежутке интегрирования записывается в виде неравенства:

$$\frac{D}{z} \geq \left| \frac{\lambda p}{T} - \frac{x_0}{z} \right|_{\max} \quad (5)$$

В окрестности оптической оси в плоскости наблюдения из (5) следует условие на количество порядков, принимающих участие в формировании самоизображения:

$$p \leq \frac{D T}{\lambda z}. \quad (6)$$

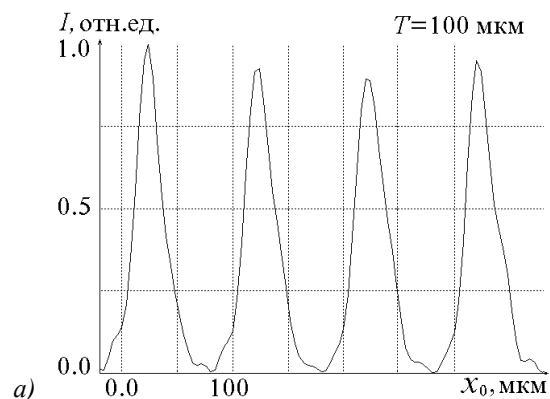
В плоскостях Тальбота $z_T = 2mT^2/\lambda$ и найденное условие (6) упрощается:

$$p \leq \frac{D}{2mT}. \quad (7)$$

С позиций геометрической оптики наличие стационарной точки в промежутке интегрирования равнозначно требованию присутствия в точке наблюдения x_0, z лучей, распространяющихся после решётки под углами дифракции $\lambda p/T$. То есть тангенс угла D/z , под которым видна решётка из точки наблюдения, должен быть равен тангенсу угла дифракции порядка с номером p . Из последнего условия вновь получаем (6).

Согласно (6) верхняя граница воспроизводимых в изображении пространственных частот зависит от произведения отношений D/λ и T/z . Если зафиксировать положение плоскости Тальбота z_T , λ и D , то ширина спектра пространственных частот в самоизображении решётки увеличивается с ростом периода.

Рис. 3 иллюстрирует последний вывод. Численные расчёты интеграла (1) в плоскости Тальбота $z_T = 254$ мм для решёток с периодами $T = 100$ мкм, 200 мкм, 400 мкм выполнялись со следующими параметрами: длина волны $\lambda = 0,63 \cdot 10^{-3}$ мм, диаметр пучка – 10 мм. На рис. 3а-в масштаб оси абсцисс выбран таким образом, что одна клетка равна половине периода решётки.



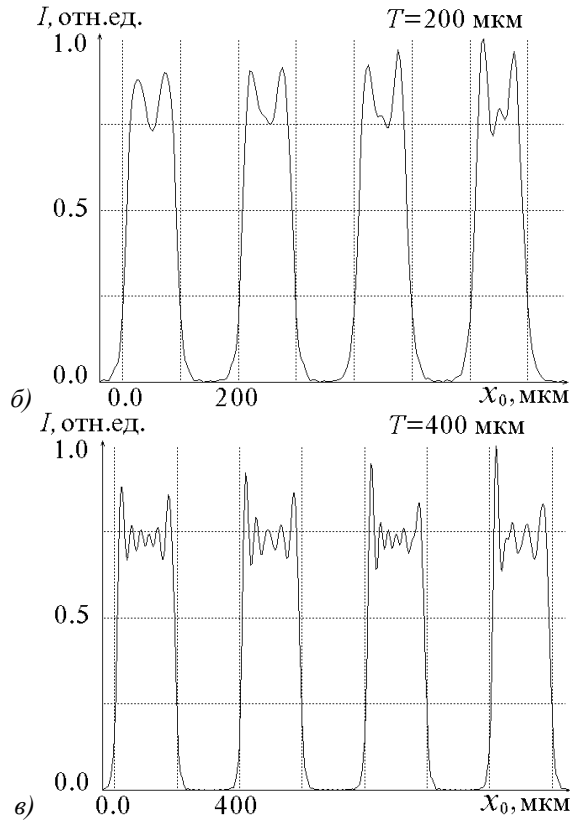


Рис.3. Численный эксперимент с линейными решётками. Распределения интенсивности $I(x_0)$ (отн.ед) в плоскости Тальбота $T=100$ мкм (рис.3а), 200 мкм (рис.3б) 400 мкм (рис.3в). $\lambda=0,63 \cdot 10^{-3}$ мм, $2D=10$ мм. Масштаб по x_0 : ширина клетки есть $T/2$ для каждого из графиков.

Распределение интенсивности на рис.3а ($T=100$ мкм) повторяет лишь период решётки. Границы штрихов в изображении не выявляются. Здесь $2m=16$ и количество воспроизводимых порядков в окрестности рассматриваемой точки $p \sim 2$. Кривая на рис. 3б ($T=200$ мкм) уже принимает характерную ступенчатую форму ($2m=4, p \sim 3$); на графике 3в ($T=400$ мкм, $2m=1, p \sim 6$) отчётливо наблюдаются границы штрихов в изображении решётки и виден эффект Гиббса: у ряда Фурье, описывающего разрывную функцию отсутствует равномерная сходимость; функция, получающаяся в результате конечного суммирования членов функционального ряда, имеет характерные выбросы вблизи точки разрыва исходной функции, ширина которых уменьшается с увеличением числа слагаемых конечной суммы ряда, а высота остается приблизительно постоянной.

Таким образом, проведённое рассмотрение выявило верхнюю границу пространственных частот, воспроизводимых в самоизображении линейной решётки.

Эффект Тальбота в равномерных круговых дифракционных решётках

Эффект Тальбота в равномерных круговых решётках имеет одно существенное отличие от самоизображения линейных решёток – это отсутствие

самоизображения внутри конуса, ось которого совпадает с оптической осью, а образующая составляет с ней угол, равный углу первого порядка дифракции. Этот факт имеет простое феноменологическое объяснение. Пусть пучки $+1$ порядка дифракции после линейной решётки направлены вверх, а -1 порядка – вниз. Самоизображение образуется в области пространства, где пересекаются все порядки. Мысленно изогнём штрихи решётки таким образом, чтобы они перешли в окружности, центры которых совпадают. Локально в окрестности каждой точки на решётке направления лучей в дифрагированных пучках относительно плоскости, содержащей касательную к штриху и нормаль к плоскости решётки, будут сохраняться. Поэтому вокруг оптической оси, проходящей через общий центр круговых штрихов решётки, пучками ± 1 порядков образуется конус, в который попадают только пучки -1 -го порядка. А значит в этом конусе самоизображение решётки не образуется.

Более строгое рассмотрение явления будем основывать на интеграле Френеля. Амплитуда поля в плоскости наблюдения имеет вид:

$$E(r, \psi, z) = \frac{e^{i2\pi/\lambda} \cdot E_0}{i\lambda z}$$

$$\cdot \int_0^{\infty} \tau(\rho) \exp[i\pi(r^2 + \rho^2)/\lambda z] J_0(2\pi\rho r/\lambda z) \rho d\rho. \quad (8)$$

Здесь функция $\tau(\rho)$ осесимметрична и интегрирование по угловой координате θ уже выполнено, $J_0(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Функцию пропускания равномерной круговой решётки запишем в виде ряда [24]:

$$\tau(\rho) = \begin{cases} \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_p \exp(2\pi i p \rho / T), & \rho \leq D/2, \\ 0, & \rho > D/2, \end{cases} \quad (9)$$

здесь вновь T – период решётки, D – её диаметр, A_p – коэффициенты ряда Фурье функции пропускания.

После подстановки функции (9) в интеграл (8) для амплитуды поля после решётки получим:

$$E(r, z) = \frac{e^{i2\pi/\lambda} D/2}{i\lambda z} \int_0^{D/2} \sum_p A_p \cdot \exp[2\pi i p \rho / T + \pi i(r^2 + \rho^2)/\lambda z] J_0(2\pi\rho r/\lambda z) \rho d\rho. \quad (10)$$

Если выполнено условие $2\pi\rho r/\lambda z > 25$, что в случае $\rho \geq 4T$ равнозначно условию

$$r > \lambda z / T, \quad (11)$$

то функцию Бесселя в (10) можно заменить тригонометрической аппроксимацией,

$$J_0\left(\frac{2\pi\rho r}{\lambda z}\right) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda z}{\rho r}} \cdot \left\{ \exp\left[i\pi\left(\frac{2\rho r}{\lambda z} - \frac{1}{4}\right)\right] + \exp\left[-i\pi\left(\frac{2\rho r}{\lambda z} - \frac{1}{4}\right)\right] \right\}. \quad (12)$$

Подставив (12) в (10) и выделив в показателях экспонент интересующие нас слагаемые, получаем

$$E(r, z) = \frac{e^{i2\pi/\lambda}}{2\pi i \sqrt{\lambda z}} \cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p A_p \cdot \exp(i2\pi p r / T) \cdot \exp(-i\pi p^2 \lambda z / T^2), \quad (13)$$

где

$$C_p = \int_{4T}^{D/2} \exp\left\{ \frac{i\pi}{4} + i\pi \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda z}} + \frac{p\sqrt{\lambda z}}{T} - \frac{r}{\sqrt{\lambda z}} \right)^2 \right\} \sqrt{\rho} d\rho + \int_{4T}^{D/2} \exp\left\{ -\frac{i\pi}{4} + i\pi \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda z}} + \frac{p\sqrt{\lambda z}}{T} + \frac{r}{\sqrt{\lambda z}} \right)^2 - 4\pi i p r / T \right\} \cdot \sqrt{\rho} d\rho. \quad (14)$$

Из выражения (13) следует, что аналогично случаю линейных решёток (см. (3)), за плоскостью 5 существуют плоскости, в которых поле с точностью до коэффициента совпадает с распределением поля непосредственно за круговой решёткой: $z_T = 2mT^2/\lambda$ и $z'_T = (2m+1)T^2/\lambda$. Однако здесь должны выполняться более жёсткие условия. Во-первых, при получении (13) предполагалось выполнение неравенства (11), которое означает, что точка наблюдения находится вне конуса лучей, расходящихся под углом $2\lambda/T$ из осевой точки решётки. Во-вторых, определённый интеграл (14) должен слабо зависеть от номера p и тогда он может быть вынесен за знак суммы. В противном случае границы штрихов в самоизображении решётки смазываются.

Аналитические оценки мы дополнили численным экспериментом. Равномерную круговую решётку можно рассматривать как набор концентрических кольцевых щелей, образованных окружностями радиусов $2nT$ и $(2n+1/2)T$ (ширина прозрачного кольца равна ширине непрозрачного). В параболическом приближении Френеля интенсивность поля $I(r, z)$ в плоскости наблюдения равна квадрату модуля суммы полей, дифрагированных на щелях:

$$I(r, z) = I_0 \left| \sum_n \int_{2nT}^{(2n+1/2)T} \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda z} t^2\right) J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda z} t r\right) t dt \right|^2. \quad (15)$$

Для характерных значений параметров $2\pi/\lambda = 10^5 \text{ см}^{-1}$, $10 \text{ см} < z < 50 \text{ см}$, $0 < r < 0,5 \text{ см}$, $T = 100 \text{ мкм}$ коэффициенты при t и t^2 в (15) (обозначим их α и β соответственно) лежат в пределах: $10^3 i \text{ см}^{-2} < \alpha < 5 \cdot 10^3 i \text{ см}^{-2}$, $0 < \beta < 5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$. Распределение интенсивности за круговой решёткой было построено путем численного интегрирования и суммирования в (15). При этом шаг интегрирования определялся скоростью изменения сомножителей в подынтегральном выражении из условий, что приращение их аргументов при увеличении переменной интег-

рирования на Δt не должно превышать $2\pi/50$ (50 точек на период) на всём промежутке интегрирования для любых (из указанного выше интервала) значений параметров. При этом относительная погрешность вычислений составила $\sim 5\%$. Эти условия привели к выбору шага $\Delta t \approx 10^{-4} \text{ мм}$; интегрирование производилось методом первого порядка. Типичный вид распределения интенсивности за круговой решёткой в плоскости, параллельной плоскости решетки, приведен на рис. 4.

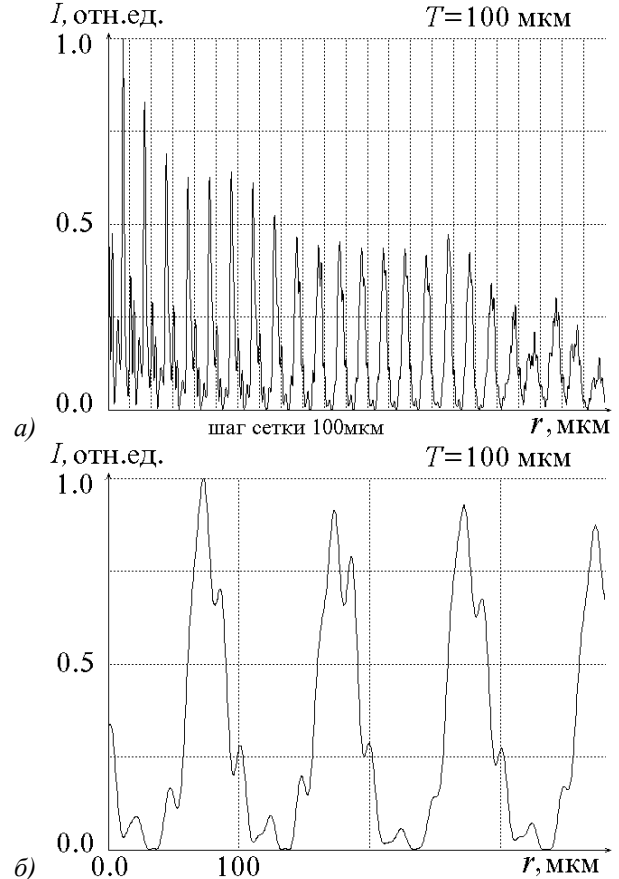


Рис.4. Численный эксперимент с круговыми равномерными решётками. Распределения интенсивности $I(r)$ (отн.ед) в плоскости Тальбота $z_T = 310 \text{ мм}$, $T = 100 \text{ мкм}$, $D = 5 \text{ мм}$, $\lambda = 0,63 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$. Масштаб по r : ширина клетки равна T .

Из графика на рис. 4(б), являющегося фрагментом распределения на рис. 4(а), видно, что пики на графике повторяются с периодом, совпадающим с периодом решётки, а резких границ, соответствующих границам штрихов решётки, не наблюдается. Из сравнения рис. 3 и рис. 4 следует, что недостаточное качество самоизображения обусловлено плохой передачей пространственных частот (см. (13)).

Эффект Тальбота в зонных пластинках

Период дифракционной структуры зонных пластинок (ЗП) зависит от радиальной координаты [25]. Функцию пропускания круговых ЗП удобно представлять в виде

$$\tau(\rho) = \begin{cases} \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_p \cdot \exp(-i \frac{\pi p \rho^2}{\lambda f_1}), & \rho \leq D/2, \\ 0, & \rho > D/2 \end{cases} \quad (16)$$

где f_1 – фокусное расстояние ЗП в первом порядке дифракции, коэффициенты A_p зависят от типа ЗП [25].

Амплитуда поля в плоскости наблюдения находится путём подстановки (16) в (8):

$$E(r, z) = \frac{E_0}{i\lambda z} \exp\left(i \frac{2\pi z}{\lambda} + i \frac{\pi r^2}{\lambda z}\right) \cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_p \int_0^{D/2} J_0\left(\frac{2\pi p r}{\lambda z}\right) \exp\left[\frac{i\pi \rho^2}{\lambda} \left(\frac{1}{z} - \frac{p}{f_1}\right)\right] d\rho. \quad (17)$$

Если апертура ЗП не ограничена, то интеграл в (17) становится табличным (6.631.4 из [26]) и выражение (17) переходит в следующее:

$$E(r, z) = \frac{E_0 f_1}{2\pi} e^{i2\pi z / \lambda} \cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{A_p}{-pz + f_1} \exp\left[\frac{-i\pi p r^2}{\lambda(-pz + f_1)}\right]. \quad (18)$$

Из сравнения (18) и (16) следует, что в отличие от случая линейных решёток (см(3)), за ЗП не существует плоскостей в которых поле самовоспроизводится. При попытке представить поле (18) в виде $E(r, z_T) = const \tau(\rho)$, немедленно возникает условие не только на координату z , но и на номер порядка p , поскольку величина коэффициента перед экспонентой в сумме (18) существенно зависит от p .

В случае ограниченной апертуры ЗП положение лишь усугубляется.

Покажем, что после ЗП в плоскости наблюдения возможно получить периодическое распределение интенсивности, период которого совпадает с периодом ЗП, но распределение интенсивности в пределах периода не соответствует изображению зоны ЗП. Проведённое выше рассмотрение качества самоизображения линейных и круговых решёток указывает на то, что не совпадение распределения интенсивности в пределах периода самоизображения является скорее правилом, чем исключением. Поэтому все свойства самоизображения, за исключением качества края, должны сохраняться и в схемах с ЗП. Назовём это частичным самовоспроизведением или частичным самоизображением.

Частичному воспроизведению поля можно дать следующее феноменологическое объяснение. ЗП (например, линзу Габора) можно рассматривать как голограмму точечного источника. В схеме восстановления изображения голограмма (ЗП) освещается плоскопараллельной опорной волной и на фокусном расстоянии f_1 воспроизводит изображение источника. Однако, если порядки не разделяются пространственно, то при дальнейшем распространении света на фокусном расстоянии от изображения источника вновь возникнет интерференционная картина, повторяющая голограмму.

Определим, при каких условиях совпадают фазовые части функции пропускания ЗП и поля за ней, если в сумме (16) положить $p = -1$. Приравнявая показатели экспонент в выражениях (18) и (16) получим условие на z координату плоскости наблюдения:

$$z_T = 2f_1. \quad (19)$$

Из (19) следует, что частичное воспроизведение возможно лишь в одной плоскости. Качество самоизображения очевидно будет неудовлетворительным, поскольку коэффициенты ряда (18) существенно отличаются от коэффициентов ряда (16). Качество так же будет зависеть от типа ЗП, так как в них разнится распределение энергии по порядкам.

У ЗП Сорэ (дифракционная эффективность $\eta_0=25\%$; $\eta_{\pm 1}=10,1\%$), Френеля ($\eta_0=25\%$; $\eta_{\pm 1}=10,1\%$) и линзы Габора ($\eta_0=25\%$; $\eta_{\pm 1}=6,3\%$) основная часть энергии делится между нулевым и первыми порядками дифракции. Если падающая волна – плоская, то после ЗП порядок +1 сходится в точку $z = f_1$, а –1 порядок расходится из точки $z = -f_1$. Для этих ЗП в описании поля в плоскости $z=2f_1$ можно ограничиться только двумя членами суммы (18), что согласуется с методами описания интерференционных свойств зонных пластинок [27]. В [27] показано, что на расстояниях $z > f_1/2$ в принятой нами схеме наблюдения (рис. 1) преобладает картина именно двухлучевой интерференции (0,+1) порядков. Поэтому распределение интенсивности на расстоянии $z_T=2f_1$ следует из (18) и имеет вид:

$$I(r, 2f) = I_0 + I_1 + \frac{\sqrt{I_0 I_1}}{2} \cos\left[\left(\pi r^2 / \lambda f_1\right) - \mathcal{G}\right] \quad (20)$$

где I_0, I_1 – интенсивности пучков нулевого и первого порядков, \mathcal{G} – постоянная разница фаз между интерферирующими порядками. Распределение интенсивности (20) следует гармоническому закону и не имеет резких границ. Влияние –1 порядка проявляется в слабой низкочастотной модуляции яркости основных интерференционных полос (20). Положение экстремумов в (20) определяются формулой

$$r_m = \sqrt{(m + \mathcal{G}/\pi)\lambda f_1}, \quad m - \text{целое}. \quad (21)$$

Если бы $\mathcal{G} = 0$, то экстремумы (21) совпали бы с положениями максимумов и минимумов в функции пропускания линзы Габора и соответствовали бы местоположению границ зон ЗП Френеля и Сорэ. Учтём аномалию фазы [28] вдоль лучей, проходящих через фокус гомоцентрического пучка +1 порядка дифракции. В плоскости ЗП происходит деление амплитуды освещающего пучка таким образом, что разница фаз между любыми лучами всех порядков дифракции равна нулю. Лучи нулевого и осевой луч +1 порядков дифракции имеют равные фазы в фокальной плоскости, поскольку прошли равные пути. Но в фокальной плоскости разница фаз между любыми лучами +1 порядка равна нулю. Значит в фокальной плоскости разница фаз между любыми лучами нулевого и +1 порядков равна 0. Откуда следует, что после прохождения фокуса скачок фазы

между этими порядками составит $\pi/2$ [28]. Наличие этой разницы фаз приведёт к смещению экстремумов (21) на четверть интерференционной полосы по сравнению со случаем $\mathcal{S}=0$ и реальное положение экстремумов будет совпадать с серединами зон ЗП Френеля (или Сорэ), породившей интерференционную картину.

В отличие от равномерных решёток в ЗП Френеля, Сорэ и Габора возможно лишь частичное самоизображение лишь в одной плоскости, местоположение которой следует из (19) и может быть определено как $z_T = TD/\lambda$, где D – диаметр ЗП, T – период структуры на краю ЗП, где $2\rho = D$.

Экспериментальные исследования

Эффект самопроизвольного формирования изображения решётки в дифрагированных световых пучках легко наблюдается в эксперименте, принципиальная оптическая схема которого дана на рис.1. В качестве когерентного источника света используется гелий-неоновый лазер 1. Лазерный пучок расширяется и коллимируется двухкомпонентным коллиматором: микрообъектив 2 ($40\times$) фокусирует пучок в точку, микродиафрагма 3 ($\varnothing \approx 60$ мкм) фильтрует его, а объектив 4 ($F=300$ мм), установленный конфокально с микрообъективом 2, расширяет и коллимирует пучок. В предметную плоскость 5 помещается решётка. Микрообъектив 7 с 8-ми кратным увеличением переносит изображение из плоскости 6 на экран 8, где оно наблюдается визуально или фотографируется или снимается видеокамерой, а затем оцифровывается. Микрообъектив 7 и экран 8 жёстко крепятся на одной подвижке. В экспериментах использовались линейные равномерные решётки с периодом 400 мкм, круговые равномерные решётки с периодом 300 мкм и зонные пластинки Френеля (прозрачная центральная зона) и Сорэ (непрозрачная центральная зона) с фокусным расстоянием $f_1=250$ мм для рабочей длины волны $\lambda=0,63\cdot 10^{-3}$ мм.

В таблице 1 приведены фотографии картин, наблюдаемых на экране. Каждая строка содержит фотографии, относящиеся к одному типу решёток. В первом столбце указан тип решётки, во втором - фотография самой решётки, в третьем - картина, наблюдаемая в плоскости Тальбота z'_T , в четвёртом - картина в окрестности плоскости Тальбота. Под фотографиями указана z - координата плоскости наблюдения. Самоизображение линейных и круговых решёток обладает высокой контрастностью, изображение краёв штрихов достаточно резкое и оно смазывается при выходе из плоскости Тальбота. За ЗП при любом положении экрана наблюдаются круговые интерференционные полосы. В плоскости самоизображения радиусы колец таковы, что экстремумы интенсивности совпадают с серединами зон ЗП. В центре первой непрозрачной зоны ЗП Сорэ видно технологическое отверстие.

Центральная зона в самоизображении также имеет светлое пятно с диаметром, меньшим диаметра первой зоны (третья строка таблицы 1).

Положение плоскостей самоизображения точно определяется методом муара. Если в плоскость наблюдения 6 (рис.1) соосно с исследуемой решёткой 5 расположить дополнительную (негативную) к ней решётку, то структура интерференционных полос проявится в виде муаровой картины. В частности, если светлые интерференционные полосы попадают на непрозрачные зоны дополнительной решётки, то на экране за решётками наблюдается равномерно затенённое поле. Во всех остальных случаях наблюдаются муаровые полосы различного вида.

Равномерно затенённое поле за ЗП наблюдается в двух случаях: когда ширина полос настолько мала, что они неразличимы глазом, а также когда ширина муаровой полосы больше, чем ширина пучка. Различить эти два случая можно немного сдвигая дополнительную пластинку в поперечном направлении. Если после сдвига освещённость остаётся равномерной, значит полосы неразличимы глазом. Если же периоды интерференционных колец и зон ЗП совпадают, то после сдвига появятся муаровые полосы в виде прямых линий, перпендикулярных направлению сдвига. Прямые линии муара появляются в плоскостях самоизображения, и в тех плоскостях наблюдения, где на каждую зону дополнительной ЗП попадает целое число интерференционных полос.

В экспериментах с ЗП методом муара удалось выявить несколько плоскостей, в которых после дополнительной пластинки наблюдалось затенённое поле. Измерения диаметров интерференционных полос выявили, что на расстоянии $z=168$ мм (расчётное значение $2f_1/3=167$ мм) на одной зоне дополнительной ЗП помещается три интерференционных экстремума, возникающих преимущественно вследствие сложения +3-его и 0-ого порядков. Аналогично, на расстояниях близких к $2f_1/5$ и $f_1/2$ проявились интерференционные полосы (+5, 0) и (+2,0) порядков. И лишь на расстоянии $z_T = 2f_1$ наблюдалось частичное самоизображение ЗП.

Интерференционная картина в плоскости самоизображения ЗП Френеля и Сорэ регистрировалась на фотоплёнку, которая затем фотометрировалась и диаметры полос измерялись микроскопом. В пределах одного периода интенсивность в полосе изменялась по гармоническому закону, а радиусы экстремумов полос совпали с серединами зон ЗП с точностью 0,1%.

Схема интерферометра Тальбота изображена на рис.5. Освещение интерферометра осуществлялось широким параллельным пучком лазерного света, полученного от коллиматора по схеме рис.1. Дополнительные ЗП крепились таким образом, чтобы дифракционные структуры были обращены друг к другу (положения ЗП1 и ЗП2 на рис.5).

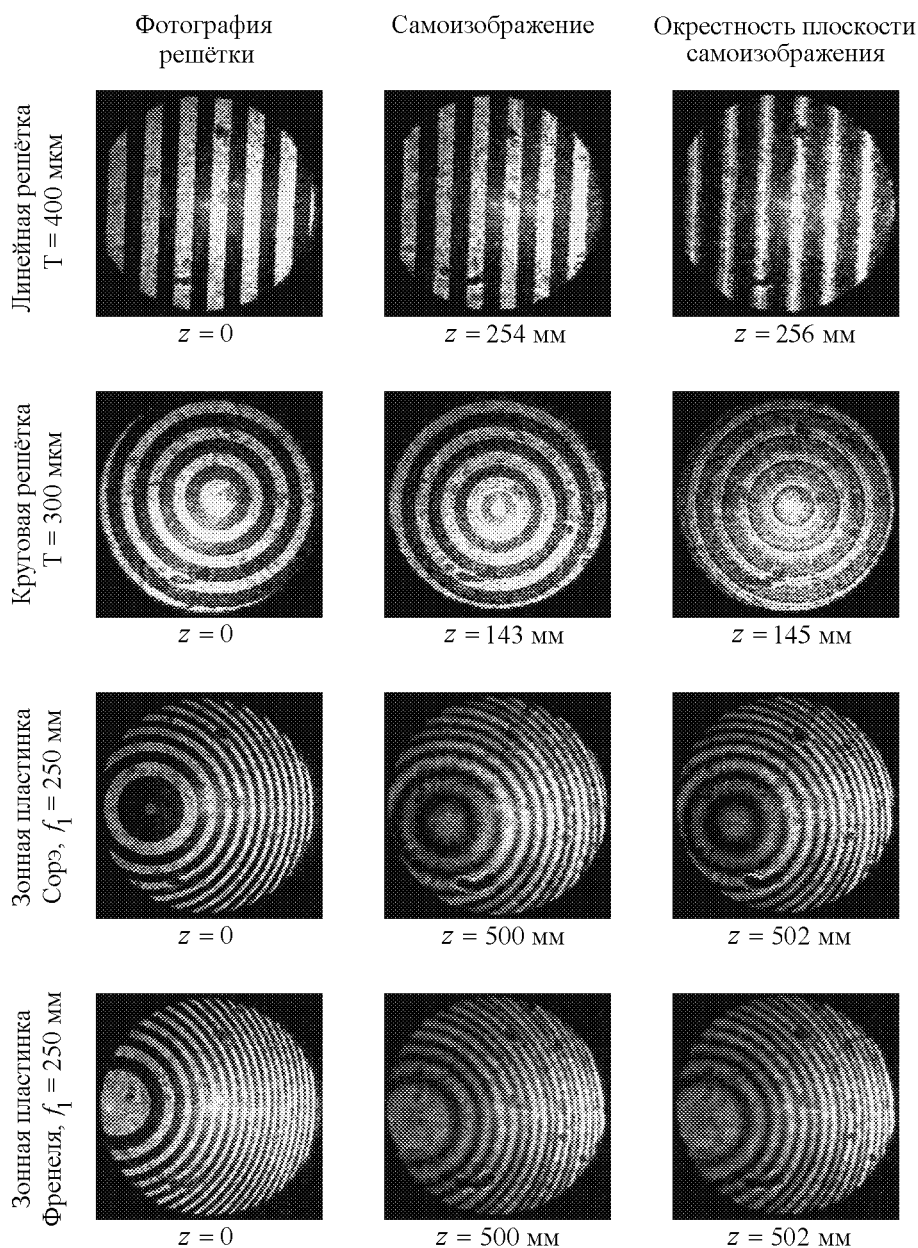


Таблица 1. Картины в различных плоскостях наблюдения.

ЗП2 размещалась на двойном фокусном расстоянии от ЗП1 на подвижном столике с микровинтами, что позволило достаточно точно контролировать смещения. Исследуемый объект O помещался между зонными пластинками, его перемещения вдоль оси и угол поворота измерялись. Расстояние l до экрана \mathcal{E} могло изменяться в пределах от 0 до 3 метров.

В отсутствие объекта непосредственно за ЗП2 наблюдается равномерно затенённое поле. При увеличении расстояния l между экраном и ЗП2 поле разделяется на две области: не изменяющееся с расстоянием круглое пятно, соответствующее параллельному пучку, и увеличивающееся в размерах пятно, соответствующее сферической волне с центром в фокальной точке f_1 между зонными пластинками.

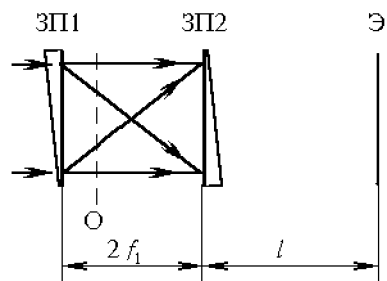


Рис.5. Схема интерферометра Тальбота.

После внесения объекта O самоизображение первой ЗП искажается. В плоскости за второй ЗП появляется муар. Муаровые полосы обладают свойствами геометрической тени. На экране в параллельном пучке размер муаровых полос не зависит от положения экрана. В расходящемся пучке муар

пропорционально увеличивается по мере увеличения расстояния l .

Наиболее простой объект для анализа работы интерферометра - это плоскопараллельная пластинка. Учёт влияние пластинки на работающие порядки ЗП1 можно с помощью приёма "приведение толщины пластинок к воздуху" ([29], редуцирование). Сущность редуцирования состоит в том, что стеклянную плоскопараллельную пластинку толщиной d заменяют эквивалентной ей в оптическом отношении воздушной пластинкой толщиной nd , n - показатель преломления стекла. Можно считать, что источники пучков приблизились (вдоль нормали к поверхности пластинки) ко второй зонной пластинке (ЗП2) интерферометра на величину Δ и луч сместился на величину Δ' после прохождения пластинки:

$$\Delta = d \left(1 - \sqrt{(1 - \sin^2 \gamma) / (n^2 - \sin^2 \gamma)} \right), \quad (22)$$

$$\Delta' = d \sin \gamma \left(1 - \sqrt{(1 - \sin^2 \gamma) / (n^2 - \sin^2 \gamma)} \right), \quad (23)$$

где γ - угол падения луча.

На рис.6а показана картина на экране в отсутствие объекта. Поместим плоскопараллельную пластинку в предметную плоскость интерферометра перпендикулярно оптической оси. Распределение интенсивности в плоскости перед ЗП2 по-прежнему представляет собой кольцевую структуру с периодичностью зонной пластинки, но квадраты радиусов зон уменьшились на $m\lambda\Delta$. Можно сказать, что в этой плоскости находится самоизображение ЗП1, фокусное расстояние которой уменьшилось на Δ . Поэтому равномерно освещённое поле в пучке нулевого порядка после ЗП2 покрывается муаровыми кольцами (рис.6б). Точность выставления пластинки проверялась по совпадению фокальных точек дополнительной ЗП, образованных параллельными пучками, прошедшими и не прошедшими через плоскопараллельную пластинку. Толщина пластинки известна и равна 6 мм, она изготовлена из стекла К8 с показателем преломления 1,5183. В данном случае угол падения лучей, идущих вдоль оси интерферометра $\gamma=0$. Тогда

$$\Delta = d(n-1)/n, \quad \Delta' = 0. \quad (24)$$

Экспериментально определив величину Δ , можно рассчитать показатель преломления стекла. Возможны два способа определения Δ : муаровый и компенсационный.

В методе муара измеряются радиусы колец муаровой ЗП [29, 30], затем - рассчитывается фокусное расстояние муаровой ЗП - f_M по формулам, полученным, например в [30,31], откуда и находится величина Δ :

$$|\Delta| = f_1^2 / |f_M - f_1|. \quad (25)$$

Муаровые кольца не имеют резких границ и достаточную точность можно получить лишь измеряя кольца с большими диаметрами.

Компенсационный метод состоит в том, что изменение длины оптического пути компенсируется

изменением расстояния между зонными пластинками.

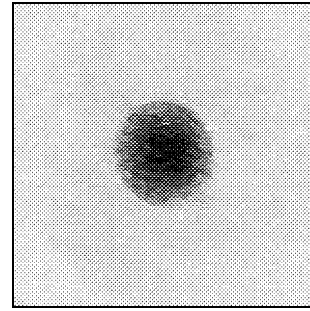


Рис.6а.

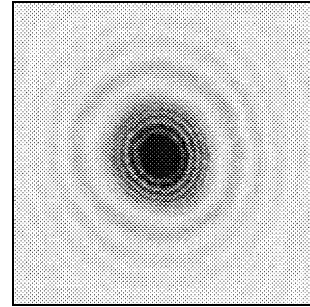


Рис.6б

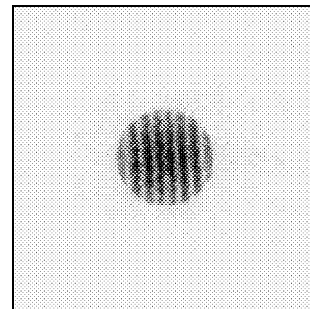


Рис.6в

Рис. 6. Изображения в плоскости наблюдения интерферометра Тальбота: ба – объект отсутствует, бб – плоскопараллельная пластинка выставлена перпендикулярно оптической оси, бв – плоскопараллельная пластинка наклонена.

Величина, на которую необходимо сместить ЗП2, чтобы вновь получить равномерную освещённость экрана и есть искомая Δ . В наших экспериментах перемещение ЗП измерялось с точностью до сотых долей мм и составило 2,05 мм. Проведя вычисления, из (24) находим $n=1,519$.

Пусть пластинка внутри интерферометра повернута на угол γ относительно оси интерферометра. Поворот плоскопараллельной пластинки приводит к появлению поперечного смещения лучей Δ' . Чтобы исключить влияние изменения общей длины оптического пути Δ , расстояние между зонными пластинками увеличивалось на эту величину. Вследствие поперечного смещения лучей, на экране появляются прямые муаровые полосы, перпендикулярные направлению смещения. Период муаровых полос [32] равен $\lambda f_1 / \Delta'$. На рис.6в показаны муаро-

вые полосы в плоскости ЗП2, возникающие при повороте пластинки на угол 2° . Измерив период муаровых полос, можно вычислить Δ' , а затем из формулы (23) - угол поворота γ . Относительная погрешность определения угла поворота по муару составила $\sim 1\%$.

С помощью интерферометра Тальбота с зонными пластинками можно визуализировать и сложные фазовые объекты. На рис.7а показана муаровая картина в плоскости ЗП2, если в качестве объекта используется пламя свечи. Тот же муар на фокусном расстоянии от ЗП2 дан рис. 7б. Изменение температуры в пламени вызывает изменение показателя преломления воздуха, что изменяет ход лучей и ведёт к изменению интерференционной картины. Показатель преломления собственно пламени близок к показателю преломления воздуха и мало изменяет длину оптического пути. Основные изменения вносит градиент показателя преломления, являющийся следствием градиента температур. Центральная, не покрытая полосами, область пламени соответствует области с постоянной температурой. Полосы по сторонам центральной части покрывают область, в которой температура и показатель преломления быстро спадают от экстремальных значений к значениям окружающего воздуха. Поднимающийся вверх от пламени нагретый воздух обеспечивает почти постоянную температуру над пламенем, поэтому в вертикальном направлении градиент показателя преломления практически равен нулю и это направление не пересечено полосами. Если на пути поднимающегося воздуха поставить преграду, например, металлическую линейку, то муаровая картина меняется (см. рис.7в). Концы линейки выходят далеко за пределы пламени, металл обладает хорошей теплопроводностью и в вертикальном направлении от центра пламени к линейке температура быстро спадает. В муаровой картине появляются параллельные линейке горизонтальные полосы.

Зонные пластинки обладают фокусирующими свойствами и это позволяет визуализировать фазовые объекты малых размеров. Если фазовый объект небольших размеров поместить в интерферометр вблизи точки схождения лучей ($z = f_1$), то он перекроет практически весь пучок первого порядка и фазовые градиенты вызовут появление муара на всём рабочем поле после ЗП2. Например, на рис.8 показан муар, порождённый каплей на булавоочной головке диаметром 3 мм, находящейся на расстоянии 255 мм от ЗП1. Если бы капля имела идеально шарообразную форму, то муар состоял бы из концентрических колец с центром на оптической оси. На рис.8 центр колец смещён вниз и влево вследствие искажения формы капли, однако кольцевой характер муара сохранился.

Выводы

В результате рассмотрения дифракции на ЗП в приближении Френеля показано, что полное самопроизвольное воспроизведение поля после ЗП не-

возможно. Частичное самовоспроизведение поля в смысле периодического распределения интенсивности, период которого совпадает с периодом ЗП, возможно лишь в одной плоскости ($z_T = 2f_1$). Проведённое экспериментальное исследование подтверждает этот вывод.

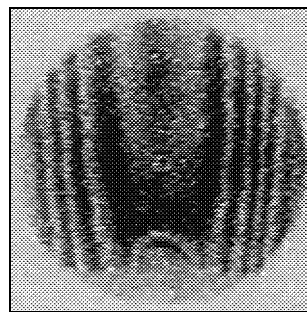


Рис.7а.

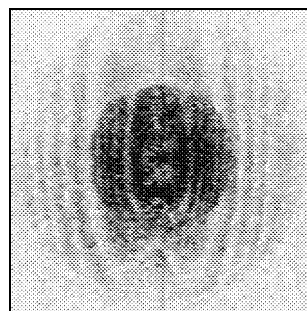


Рис.7б.

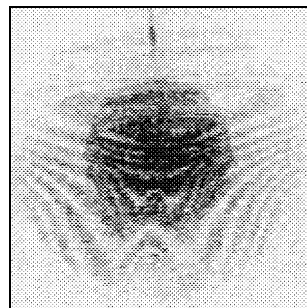


Рис.7в.

Рис.7. Муаровые полосы от пламени свечи: 7а – плоскость наблюдения совпадает с ЗП2, 7б – плоскость наблюдения на фокусном расстоянии от ЗП2, 7в – визуализация изменения распределения температуры в пламени.

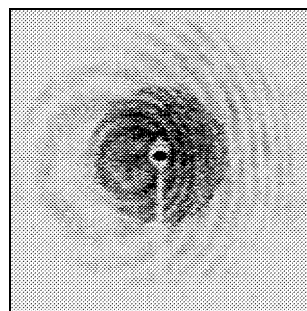


Рис.8. Муар, порождённый каплей.

Качество самоизображения решёток определяется границами области воспроизводимых в изображении пространственных частот. В случае ли-

нейных решёток существует верхняя граница этой области, которая обратно пропорциональна λz_T и увеличивается с ростом периода решётки и её размера. ($z_T = 2mT^2/\lambda$, $z'_T = (2m+1)T^2/\lambda$). В случае равномерных круговых решёток самоизображение может наблюдаться только вне конуса лучей, расходящихся под углом $2\lambda/T$ из осевой точки решётки ($z_T = 2mT^2/\lambda$, $z'_T = (2m+1)T^2/\lambda$). При прочих равных условиях воспроизведение пространственных частот уступает случаю линейных решёток. В случае ЗП самовоспроизведение поля может быть только частичным и резкие границы в самоизображении отсутствуют. Экспериментально наблюдаемые картины подтверждают теоретические выводы.

Эффект частичного самоизображения ЗП позволяет построить интерферометр Тальбота, который может быть использован в качестве интерферометра сдвига для визуализации фазовых объектов, измерения показателей преломления и их градиентов.

Авторы выражают признательность Маточкину А.Е. за оцифровку муаровых картин.

Литература

1. H.F. Talbot// Phil. Mag. And J. Sci. London. - 1836. - v.9. - p.401.
2. Lord Rayleigh// Phil. Mag. - 1881. - v.11. - p.196.
3. Y.-S. Cheng, R.-C. Chang. Theory Of Image Formation Using The Talbot Effect// Appl. Opt. - 1994. - v.33, №10. - p.1863.
4. J.T.Winthrop, C.R. Worthington. Theory Of Fresnel Images// J.Opt. Soc. Am. - 1965. - v.55, № 4. - p.373 - 381.
5. J.Westernholm, J. Turunen, J.Hattunen. Fractional Talbot Effect// J.Opt. Soc. Am.A - 1994. - v.11, № 4. - p.1283 - 1290.
6. V.Arrizon, E.Tepichin, M.Outiz-Gutierrez, A.W.Lohmann. Fresnel Diffraction At $1/4$ Of The Talbot Distance Of An Anisotropic Grating// Opt. Commun. - 1996. - v.127. - p.171 - 175.
7. В.И.Кислов. Эффект Тальбота и самовоспроизводимость периодического поля между плоскостями Тальбота// Оптика и спектроскопия. - 1990. - т. 78, №1. - с.144 - 147.
8. P. Szwaykowski. Talbot Effect Reinterpreted: comment// Appl. Opt. - 1993. - v.32, №19. - p.3466 - 3467.
9. P. Latimer. Talbot Effect Reinterpreted: reply to comment// Appl. Opt. - 1993. - v.32, №19. - p.3468 - 3469.
10. P. Latimer. Talbot Plane Pattern: grating Images Or Interference Effect?// Appl. Opt. - 1993. - v.32, №17. - p.1078 - 1083.
11. W.D.Montgomery. Self - Imaging Objects Of Infinite Aperture// J.Opt. Soc. Am. - 1967. - v.57. - p.772 - 778.
12. Ю.А.Ананьев, В.Д.Соловьёв. О возможности применения эффекта Тальбота в волноводных коаксиальных лазерах// Оптика и спектроскопия. - 1998 - т. 85. - с.866 - 869.
13. R.R.Vera, D.Kerr, F.M.Santoyo. 3-D contouring of diffuse objects by Talbot projected fringes// J.Modern Optics. - 1991. - v.38. - p.1935 - 1945.
14. H. Damman, G.Groh, M.Kock. Restoration Of Faulty Images Of Periodic Objects By Means Self-Imaging// Appl. Opt. - 1971. - v.10. - p.1454 - 1455.
15. A.W.Lohmann, D.E.Silva. A Talbot Interferometer With Circular Grating// Opt. Commun. - 1972. - v.4, №5. - p.326 - 328.
16. D.E.Silva. Interferometer For Radial And Lateral Derivatives// Appl. Opt. - 1972. - v.11, №11. - p.2613.
17. C.Shakher, A.J.P.Daniel. Talbot Interferometer With Circular Grating For Measurements Of Temperature In Axisymmetric Gaseous Flames// Appl. Opt. - 1994. - v.33, №25. - p.6068 - 6072.
18. S.Yokozeki, T.Suzuki. Shering Interferometer Using Grating As The Beam Splitter// Appl. Opt. - 1971. - v.10, №7. - p.1575 - 1690.
19. H.Kajun, J.Jahns, A.W.Lohmann. Talbot Interferometry With A Vibrating Phase Object// Opt. Commun. - 1983 - v.45, №5. - p.295 - 300.
20. В.В.Лобачёв, В.А.Соколов. Амплитудно-фазовый датчик светового поля на основе эффекта Тальбота// Оптика и спектроскопия. - 1996. - т.81, №1. - с.119 - 126.
21. А.С.Коряковский, В.М.Марченко. Датчик волнового фронта на основе эффекта Тальбота//ЖТФ - 1981. - т.51, вып.7. - с. 1432 - 1438.
22. H.Hamam. Talbot Array Illuminator: General Approach// Appl. Opt. - 1997. - v.36. - p.2319.
23. R.D.Torroba. Zone Plate Periodicities And Talbot Effect// Optik - 1990. - v.84, №2. - p.64 - 65.
24. A.Boivin. Theorie et Calcul des Figures de Diffraction de Revolution, Quebec: Gauthier Villars, Les Presses de l'Universite Laval, 1964.
25. V.P. Koronkevich, I.G. Pal'chikova. Modern zone plates// Optoelectronics, Instrumentation & Data Processing. - 1992. - N1. - p.86 - 101.
26. Грандштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Гос. изд. физ.-мат.литер. - 1963. - 1100 с.
27. Koronkevitch V.P., Palchikova I.G. Interference properties of zone plates// Optoelectronics, Instrumentation & Data Processing. - 1994. - N3. - p.85 - 100.
28. М.Борн, Э. Вольф. Основы оптики, М.: Наука, 1970, 856 с.
29. М.П.Гвоздева, К.И.Коркина. Прикладная оптика и оптические измерения, М.: Машиностроение, 1976.
30. H.H.M. Chau. Properties Of Two Overlapping Zone Plates Of Different Focal Lengths// J.Opt. Soc. Am. - 1970. - v.60, №2 - p.255 - 259.
31. H.H.M. Chau. Moire Pattern Resulting From Superposition Of Two Zone Plates// Appl. Opt. - 1969. - v.8, №8. - p.1707 - 1712.
32. G.Oster, M.Wasserman, C.Zwerling. Theoretical Interpretation Of Moire Patterns// J.Opt. Soc. Am. - 1964. - v.54, №2 - p.169 - 175.