# ОПЕРАТОРНОЕ ОПИСАНИЕ ПАРАКСИАЛЬНЫХ СВЕТОВЫХ ПОЛЕЙ

*В.В. Котляр*[1], *С.Н. Хонина*[1], *Я.Ванг*[2]
[1] *Институт систем обработки изображений РАН, г .Самара*
[2] *Пекинский технологический институт*

***Аннотация***

Дано описание параксиального светового поля, распространяющегося в свободном пространстве или среде с параболическим показателем преломления, с помощью операторов-инвариантов. Приведено интегральное преобразование (аналогичное преобразованию Френеля), описывающее распространение света в среде с параболическим показателем преломления. Приведены результаты численного и натурного экспериментов по формированию мод Гаусса-Эрмита с помощью фазовых ДОЭ. Отличие экспериментальных результатов от теоретических составило около 12%.

## *Введение*

В [1] описана алгебра операторов симметрии уравнения Шредингера. В данной работе, пользуясь связью уравнения Шредингера с уравнением параксиального распространения светового поля, рассмотрена оптическая интерпретация операторов-инвариантов. Показано, что действие оператора эволюции светового поля в свободном пространстве эквивалентно преобразованию Френеля, а действие оператора эволюции в среде с параболическим показателем преломления также эквивалентно некоторому интегральному преобразованию, аналогичному преобразованию Френеля.

В [2] предложен метод формирования мод Гаусса-Эрмита (ГЭ) с помощью фазовых ДОЭ, функция пропускания которых равна знаковой функции от многочлена Эрмита заданного порядка. Такой ДОЭ должен освещаться плоской волной, ограниченной диафрагмой определенного размера.

Очевидно, что фазовый ДОЭ с конечной апертурой не может идеально точно сформировать амплитудно-фазовое распределение, описывающее моду ГЭ. Ниже с помощью численного моделирования для одномерного случая показано, что в рамках данного метода [2] можно формировать моды ГЭ с номерами от 1 до 5, отличающиеся от идеальных мод, в среднем, на 10-18%. Причем после пространственной фильтрации этих мод в Фурье-плоскости в плоскости изображения ДОЭ также формируются моды ГЭ, отличающиеся от идеальных, в среднем, уже на 5-12%. При этом энергетическая эффективность любой моды - не ниже 78% (для одномерного случая).

Также приведены результаты эксперимента по формированию двухмодового инвариантного пучка ГЭ с помощью бинарного ДОЭ, рассчитанного методом частичного кодирования [3]. Среднеквадратичная ошибка поперечного распределения интенсивности в фокальной плоскости от предсказанного теоретически составила около 12%.

## *1. Операторы-инварианты*

Параксиальное уравнение распространения

$$\left(2ik\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)E(x,y,z)=0, \qquad (1)$$

где $k$ – волновое число света, $z$ – координата вдоль оси распространения света, можно записать в операторной форме:

$\mathbf{Q}E=0$,

базис алгебры симметрии которого(алгебра Ли) имеет 9 операторов [1]:

$$\begin{gathered}
\mathbf{K_2}=-\frac{z^2}{2k}\frac{\partial}{\partial z}-\frac{z}{2k}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)-\frac{z}{2k}+i\frac{x^2+y^2}{4},\\
\mathbf{K_{-2}}=2k\frac{\partial}{\partial z},\quad \mathbf{P_x}=\frac{\partial}{\partial x},\quad \mathbf{P}_y=\frac{\partial}{\partial y},\\
\mathbf{B_x}=-\frac{z}{2k}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{ix}{2},\quad \mathbf{B}_y=-\frac{z}{2k}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{iy}{2},\\
\mathbf{M}=x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x},\quad \mathbf{D}=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+2z\frac{\partial}{\partial z}+1,\quad \mathbf{E}=i.
\end{gathered} \qquad (2)$$

Операторы (2) имеют следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{gathered}
[\mathbf{D},\mathbf{K}_{\pm2}]=\pm2\mathbf{K}_{\pm2},\quad [\mathbf{D},\mathbf{B_{x,y}}]=\mathbf{B_{x,y}},\\
[\mathbf{D},\mathbf{P_{x,y}}]=-\mathbf{P_{x,y}},\quad [\mathbf{D},\mathbf{M}]=0,\ [\mathbf{M},\mathbf{K}_{\pm2}]=0,\\
[\mathbf{P_x},\mathbf{M}]=\mathbf{P_y},\ [\mathbf{P_y},\mathbf{M}]=-\mathbf{P_x},\ [\mathbf{B_x},\mathbf{M}]=\mathbf{B_y},\\
[\mathbf{B_y},\mathbf{M}]=-\mathbf{B_x},[\mathbf{K_2},\mathbf{K_{-2}}]=\mathbf{D},\\
[\mathbf{K_2},\mathbf{B_{x,y}}]=0,\ [\mathbf{K_{-2}},\mathbf{B_{x,y}}]=-\mathbf{P_{x,y}},\\
[\mathbf{K_{-2}},\mathbf{P_{x,y}}]=0,\ [\mathbf{P_{x,y}},\mathbf{K_2}]=\mathbf{B_{x,y}},\\
[\mathbf{B_{x,y}},\mathbf{P_{x,y}}]=\frac{i}{2},\quad [\mathbf{P_{x,y}},\mathbf{B_{y,x}}]=0,
\end{gathered} \qquad (3)$$

где $[\mathbf{A},\mathbf{B}]=\mathbf{AB}-\mathbf{BA}$ .

Операторы симметрии $\mathbf{L}$ в уравнении (2) и любая их линейная комбинация переводят одно решение уравнения (1) в другое решение и удовлетворяют условию:

$$[\mathbf{L},\mathbf{Q}]=R(x)\mathbf{Q}, \qquad (4)$$

где $\mathbf{Q}=2ik\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Шредингера, $R(x)$ – функция, которая может зависеть и от $\mathbf{L}$.

Уравнение (1) можно представить в виде

$$2ik\frac{\partial E}{\partial z}=i\mathbf{K_{-2}}E\ , \qquad (5)$$

где $\mathbf{K_{-2}}=2k\frac{\partial}{\partial z}=i\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$, решение которого в операторной форме имеет вид:

$$E(x,y,z)=\exp\left(\frac{z}{2k}\mathbf{K_{-2}}\right)E_0(x,y), \qquad (6)$$

где $E_0(x,y)$ – функция $E\ (x,y,z)$ при $z$=0.

Оператор $\exp\left(\frac{z}{2k}\mathbf{K}_{-2}\right)$ – оператор, описывающий распространение светового поля вдоль оси $z$. Поэтому операторы симметрии из уравнения (2), которые коммутируют с оператором $\mathbf{K}_{-2}$, будут также коммутировать с оператором (6):

$$\exp\left(\frac{z}{2k}\mathbf{K}_{-2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2k}\right)^n\frac{\mathbf{K}_{-2}^n}{n!}, \quad (7)$$

то есть являются инвариантами распространения.

Можно показать, что действие оператора распространения (6) эквивалентно преобразованию Френеля:

$$\exp\left(\frac{z}{2k}K_{-2}\right)E_0(x,y)=\sum_{n-0}^{\infty}\left(\frac{iz}{2k}\right)^n(n!)^{-1}\iint_{-\infty}^{\infty}E_0(\xi,\eta)$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n\delta(x-\xi,y-\eta)d\xi d\eta=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{iz}{2k}\right)^n(n!)^{-1}$$
$$\iint_{-\infty}^{\infty}F(\alpha,\beta)\left(\alpha^2+\beta^2\right)^n\exp\left[-i(x\alpha+y\beta)\right]d\alpha d\beta=$$
$$=\iint_{-\infty}^{\infty}F(\alpha,\beta)\exp\left[-i\frac{z}{2k}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right]\times \quad (8)$$
$$\times\exp\left[-i(x\alpha+y\beta)\right]d\alpha d\beta=$$
$$=\frac{-ik}{2\pi z}\iint_{-\infty}^{\infty}E_0(\xi,\eta)\exp\left\{i\frac{k}{2z}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]\right\}d\xi d\eta$$

где $\delta(x,y)$ – дельта-функция Дирака, $F(\alpha,\beta)$ – Фурье-образ функции $E_0(\xi,\eta)$.

Из уравнения (3) видно, что имеются пять операторов-инвариантов. Операторы $\mathbf{P_x}$ и $\mathbf{P_y}$ описывают малые смещения светового поля по осям $x$ и $y$ соответственно (операторы сноса пучка [4]). Оператор $\mathbf{K}_{-2}$ описывает дифракционную расходимость светового поля. Оператор $\mathbf{M}$ определяет малые повороты вокруг оси $z$ и может быть назван оператором углового момента [5]. Оператор $\mathbf{E}$ определяет тождественное преобразование и связан с сохранением энергии светового поля при его распространении. Из этих пяти операторов-инвариантов с помощью линейных комбинаций можно образовать и другие инвариантные операторы.

Остальные четыре оператора из (3) не являются инвариантами распространения, но тоже имеют наглядный физический смысл. Операторы $\mathbf{B_x}$ и $\mathbf{B_y}$ при $z$=0 описывают малый наклон светового поля вдоль оси $x$ и $y$ соответственно. Оператор $\mathbf{K_2}$ при $z$=0 описывает малую квадратичную фазовую задержку светового поля. Оператор $\mathbf{D}$ при $z$=0 описывает малые растяжения (сжатия) светового поля по осям $x$ и $y$.

Можно показать, что действия перечисленных операторов определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}&\exp(\theta\mathbf{M})E_0(r,\varphi)=E_0(r,\varphi+\theta),\\&\exp[c\,\mathbf{D}(0)]E_0(x,y)=\mathrm{e}^c\,E_0\left(\mathrm{e}^c\,x,\mathrm{e}^c\,y\right),\\&\exp[b\,\mathbf{K_2}(0)]E_0(x,y)=\exp\left[\frac{ib\left(x^2+y^2\right)}{4}\right]E_0(x,y),\\&\exp[d\,\mathbf{B_x}(0)]E_0(x,y)=\exp\left[\frac{idx}{2}\right]E_0(x,y),\\&\exp[a\,\mathbf{P_x}]E_0(x,y)=E_0(x+a,y).\end{aligned} \quad (9)$$

Базис операторов симметрии уравнения (1) при $z$=0 имеет вид:

$$\begin{aligned}&\mathbf{K_2}(0)=i\frac{x^2+y^2}{4},\quad \mathbf{B_x}(0)=\frac{ix}{2},\quad \mathbf{B}_y(0)=\frac{iy}{2},\\&\mathbf{D}(0)=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+1,\quad \mathbf{K}_{-2}=i\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),\\&\mathbf{P_x}=\frac{\partial}{\partial x},\quad \mathbf{P}_y=\frac{\partial}{\partial y},\quad \mathbf{M}=x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x},\quad \mathbf{E}=i.\end{aligned} \quad (10)$$

Операторы (10) подчиняются тем же коммутационным соотношениям (3). Операторы (2) и (10) связаны между собой формулами:

$$\mathbf{L}(z)=\exp\left(\frac{z}{2k}\mathbf{K}_{-2}\right)\mathbf{L}(0)\exp\left(-\frac{z}{2k}\mathbf{K}_{-2}\right). \quad (11)$$

Оптический смысл оператора $\mathbf{K_2}(z)$ в том, что он описывает изменение эффективного радиуса светового поля, определенного как момент второго порядка по интенсивности при распространении вдоль оси $z$. Действительно,

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int E_0^*(x,y)K_2E_0(x,y)\,dxdy=\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int E^*(x,y,z)K_2(0)E(x,y,z)\,dxdy=\\&=\frac{i}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int\left(x^2+y^2\right)\left|E(x,y,z)\right|^2dxdy=\\&=-\left(\frac{z}{2k}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int E_0^*(x,y)K_{-2}E_0(x,y)\,dxdy-\\&-\left(\frac{z}{2k}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\int E_0^*(x,y)D(0)E_0(x,y)\,dxdy+\\&+\frac{i}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int\left(x^2+y^2\right)\left|E_0(x,y)\right|^2dxdy\end{aligned} \quad (12)$$

Независящие от $z$ интегралы в уравнения (12):

$$\iint_{-\infty}^{\infty}E_0^*(x,y)\mathbf{K}_{-2}E_0(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
$$\iint_{-\infty}^{\infty}E_0^*(x,y)\mathbf{D}(0)E_0(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

описывают расходимость светового поля из-за дифракции и смещение с оптической оси, соответственно.

Алгебра операторов (2), (3) описывает не только распространение светового поля в свободном пространстве, но также распространение его в волноводе с параболической зависимостью показателя преломления:

$$n^2(r)=n_0^2\left(1-2\Delta\frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad (13)$$

где $n_0$ - показатель преломления на оси, $\Delta$ - параметр дисперсии показателя преломления, $r_0$ - радиус волокна.

Параксиальное уравнение, описывающее световое поле в среде (13) имеет вид:

$$\left(2ik\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\alpha^2\frac{x^2+y^2}{4}\right)E(x,y,z)=0\,, \quad (14)$$

где $\alpha=2\sqrt{2\Delta}\dfrac{n_0}{r_0}$.

В операторном виде уравнения (14) можно записать

$$2ik\frac{\partial E}{\partial z}=i\mathbf{L_{3б}}E\,, \quad (15)$$

где $\mathbf{L_{3б}}=\mathbf{K_{-2}}-\alpha^2\mathbf{K_2}(0)$.

Замкнутая алгебра операторов $\mathbf{L_{3\alpha}}$, $\mathbf{D}(0)$ и $\mathbf{L_{2б}}=\mathbf{K_{-2}}+\alpha^2\mathbf{K_2}(0)$ имеет вид:

$$\begin{gathered}[L_{3\alpha},D(0)]=2L_{2\alpha}\,,\quad [L_{2\alpha},D(0)]=2L_{3\alpha}\,,\\ [L_{2\alpha},L_{3\alpha}]=2\alpha^2D(0)\end{gathered} \quad (16)$$

Решение уравнения (15) можно записать в операторном виде

$$E(x,y,z)=\exp\left(\frac{z}{2k}\mathbf{L_{3б}}\right)E_0(x,y)\,. \quad (17)$$

Можно показать, что для оператора распространения в среде с параболическим показателем преломления (13) имеет место соотношение:

$$\exp\left(\frac{z}{2k}\mathbf{L_{3б}}\right)=\exp(a\mathbf{K_2}(0))\exp(b\mathbf{K_{-2}})\exp(c\mathbf{D}(0)), \quad (18)$$

где
$$\begin{gathered}a=-\alpha\,\mathrm{tg}(\omega z),\ b=\frac{\sin(\omega z)}{2\alpha},\\ c=\ln[\cos(\omega z)],\ \omega=\frac{\alpha}{2k}\end{gathered}\,. \quad (19)$$

Из (18) с учетом (8) и (9) следует:

$$\begin{aligned}&\exp\left(\frac{z}{2k}\mathbf{L_{3б}}\right)E_0(x,y)=\frac{\alpha}{4\pi i\sin(\omega z)}\times\\ &\times\exp\left[\frac{i\alpha\,\mathrm{ctg}(\omega z)}{4}\left(x^2+y^2\right)\right]\times\\ &\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int E_0(\xi,\eta)\exp\left\{\frac{i\alpha}{4\sin(\omega z)}\times\right.\\ &\left.\times\left[\left(\xi^2+\eta^2\right)\cos(\omega z)-2(x\xi+y\eta)\right]\right\}\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta.\end{aligned} \quad (20)$$

Уравнения (20) является аналогом преобразования Френеля (8) в среде (13). Из уравнения (20) видно, что при $z_m=(\pi/2+m\pi)\omega^{-1}$ в среде будет формироваться Фурье-спектр исходного поля, а при $z_m=m\pi\omega^{-1}$ будет формироваться изображение исходного поля.

Заметим, что так как оператор углового момента $\mathbf{M}$ коммутирует с операторами $\mathbf{K_{-2}}(0)$, $\mathbf{K_2}$, $\mathbf{D}(0)$, то из уравнения (18) следует, что оператор $\mathbf{M}$ также коммутирует с оператором распространения в среде с параболическим показателем преломления $\exp\left(\dfrac{z}{2k}\mathbf{L_{3б}}\right)$. Поэтому можно утверждать, что угловой момент светового поля при распространении в такой среде сохраняется.

Действие операторов симметрии $\exp(a\mathbf{L})$ на решение уравнения (1) $E(x,y,z)$ эквивалентно действию операторов $\mathbf{T}$, определенных матрицами $\|A\|$:

$$\mathbf{T}(\|A\|)=\exp(a\mathbf{L})\,, \quad (21)$$

где $\|A\|=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, $\alpha\delta-\beta\gamma=1$.

Действие оператора $\mathbf{T}$ описывается соотношением:

$$\begin{aligned}&\mathbf{T}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}E(x,y,z)=\\ &=\frac{\exp\left[\dfrac{i\beta\left(x^2+y^2\right)}{4u}\right]}{u}E\left(\frac{x}{u},\frac{y}{u},\frac{\gamma+\alpha z/2k}{u}\right)\end{aligned}\,, \quad (22)$$

где $u=\delta+\dfrac{z}{2k}\beta$.

Для конкретных операторов уравнения связи (21) имеют вид:

$$\begin{aligned}&\exp(a\mathbf{K_{-2}})=\mathbf{T}\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix},\ \exp(b\mathbf{D}(0))=\mathbf{T}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^b & 0\\ 0 & \mathrm{e}^b\end{pmatrix},\\ &\exp(c\mathbf{L_3})=\mathbf{T}\begin{pmatrix}\cos(c) & -\sin(c)\\ \sin(c) & \cos(c)\end{pmatrix},\\ &\exp(d\mathbf{K_2}(0))=\mathbf{T}\begin{pmatrix}1 & d\\ 0 & 1\end{pmatrix},\end{aligned} \quad (23)$$

где $\mathbf{L_3}=\mathbf{K_{-2}}-\mathbf{K_2}$.

Формулы (23) дают связь операторного и матричного описаний светового поля.

### *2. Формирование инвариантных пучков*

Примером решения уравнения (1) могут служить моды Гаусса-Эрмита и Гаусса-Лагерра [6]. Они инвариантны к действию оператора распространения в свободном пространстве с точностью до масштаба.

В работах [2, 7] предложен простой метод расчета фазовых ДОЭ для эффективного формирования одномодовых гауссовых пучков, основанный на пропорциональности функции пропускания ДОЭ знаковой функции соответствующего полинома. Например, для мод Гаусса-Эрмита:

$$\begin{aligned}&\exp[i\varphi_{nm}(x,y)]=\\ &=\exp\left\{i\arg H_n\left(\frac{x}{\sigma}\right)+i\arg H_m\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right\},\end{aligned} \quad (24)$$

где $H_n(x)$ - полином Эрмита, $\sigma$ - параметр, характеризующий эффективную ширину моды ГЭ.

При освещении фазового ДОЭ (24) плоской или гауссовой волной в спектральной плоскости сформируется световое поле с комплексной амплитудой, близкой к заданной моде. Сохранение структуры формируемого пучка на различных расстояниях подтверждает его модовый характер [8].

Введение в спектральную плоскость диафрагмы, аналогично [9], позволяет получать в плоскости изображения световое поле, также близкое к заданной моде. На рис. 1 показана оптическая схема для формирования гауссовых мод.

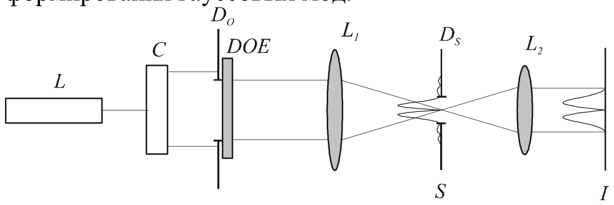



*Рис. 1. Оптическая схема для формирования гауссовых мод.*

Гелий-неоновый лазер $L$ освещает $DOE$, фаза которого пропорциональна знаковой функции соответствующего полинома. Диафрагма $D_O$ подстраивается на оптимальный для формируемой моды размер [10]. Сферическая линза $L_1$ формирует в плоскости $S$ пространственный спектр, из которого диафрагмой $D_S$ выделяется эффективная часть. Полученное с помощью сферической линзы $L_2$ в плоскости $I$ изображение имеет комплексную амплитуду, демонстрирующую модовый характер сформированного поля.

На рис. 2 и 3 показано формирование 4-й и 5-й мод ГЭ соответственно. При этом для наглядности все распределения амплитуды и интенсивности выравнены по максимальному значению, а не по энергетическим характеристикам. На рис. 2а и 3а показано распределение амплитуды идеальной моды (линия 1) и бинарная фаза ДОЭ (линия 2). На рис. 2б и 3б показано распределение интенсивности, получаемое в спектральной плоскости при освещении ДОЭ плоским пучком (линия 2) и для сравнения распределение интенсивности идеальной моды (линия 1). Положение диафрагмы здесь выделено пунктирной линией. На рис. 2в и 3в показаны распределения интенсивности в плоскости изображения (линия 3), Фурье-образа такого изображения (линия 2) и идеальной моды (линия 1). На рис. 2г и 3г приведены соответствующие фазы.

На рис. 4 приведены аналогичные результаты для 1-й, 2-й и 3-й мод ГЭ. На рис. 4а, в, д показаны распределения интенсивности в плоскости изображения (линия 3), Фурье-образа такого изображения (линия 2) и идеальной моды (линия 1). На рис. 4б, г, е приведены соответствующие фазы.

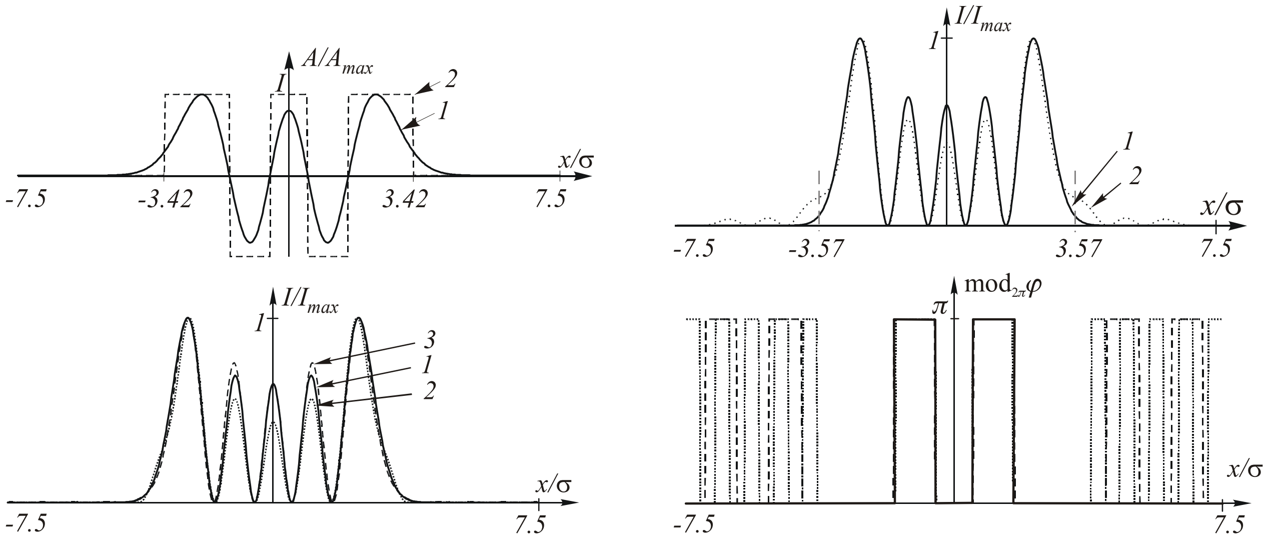



*Рис. 2. Формирование 4-ой моды ГЭ с помощью бинарного фазового ДОЭ.*

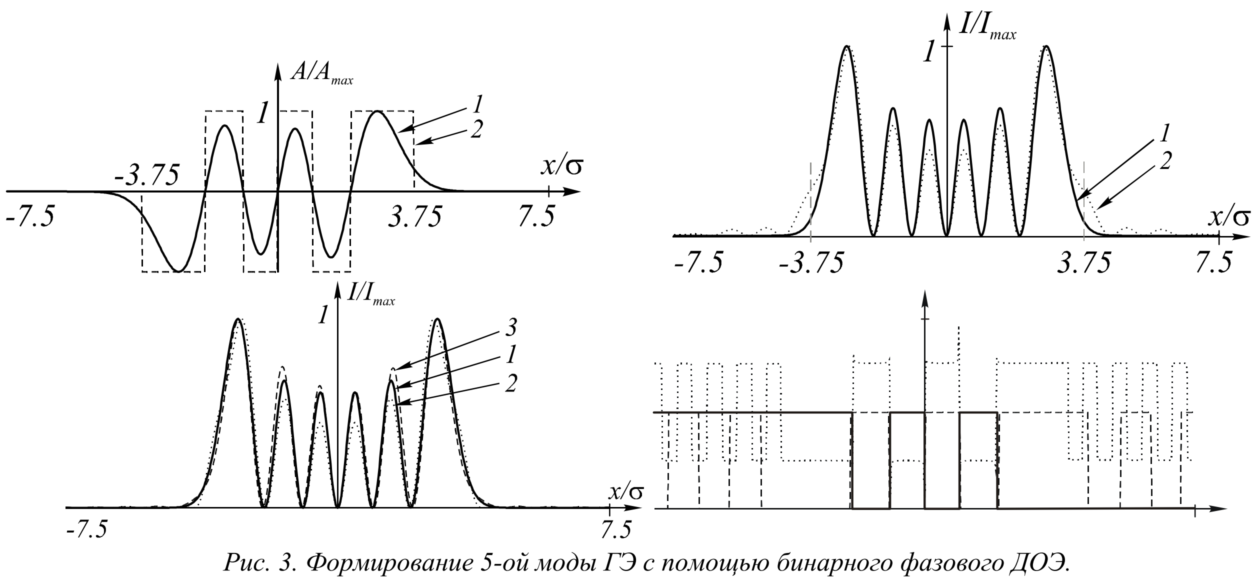



*Рис. 3. Формирование 5-ой моды ГЭ с помощью бинарного фазового ДОЭ.*

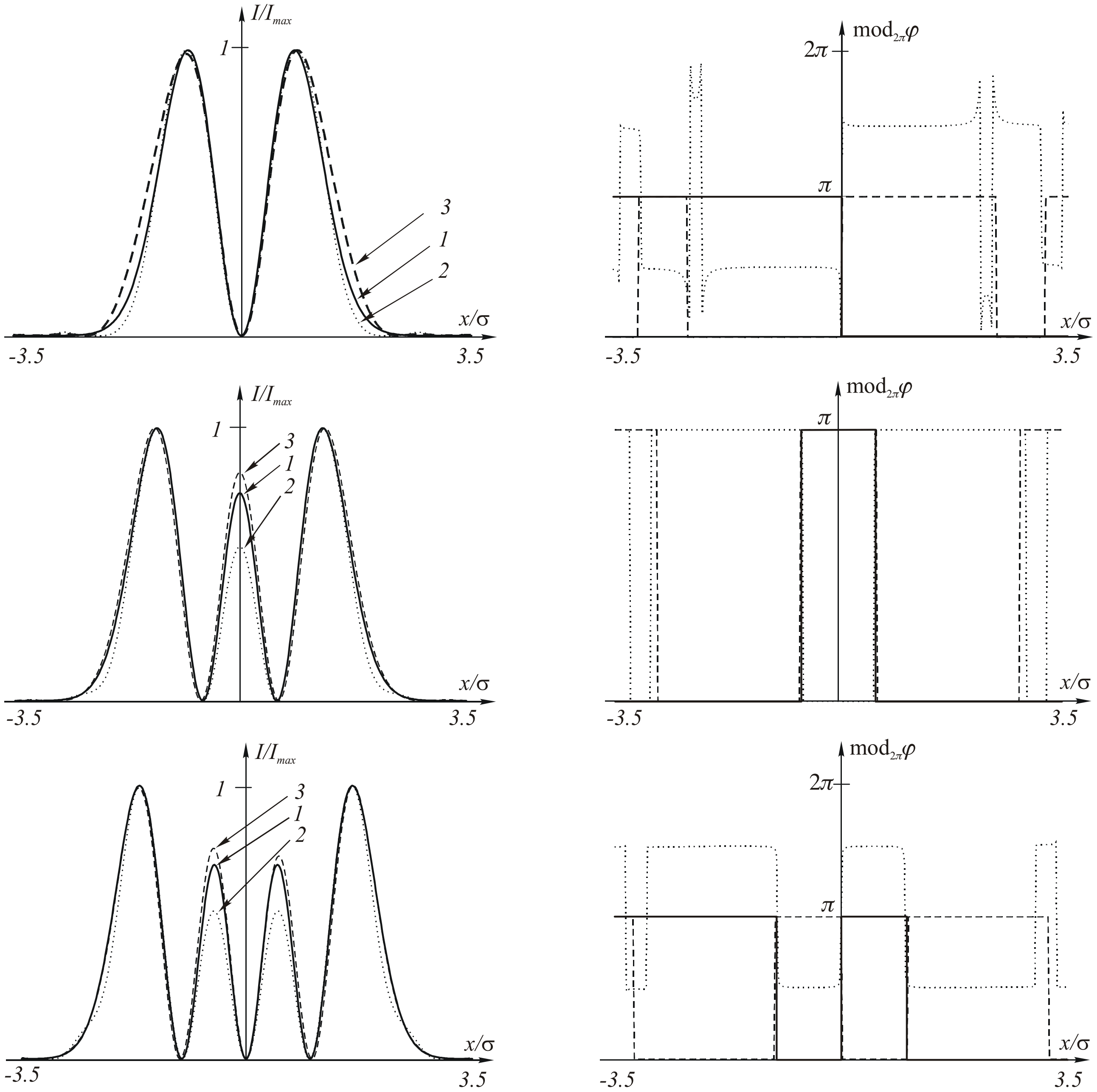



*Рис. 4. Формирование 1-ой (а, б), 2-ой (в, г) и 3-ей (д, е) мод ГЭ с помощью бинарных фазовых ДОЭ.*

Из рисунков 2в, г, 3в, г и 4 видно, что сформированные световые поля имеют модовый характер, то есть сохраняется как амплитудное, так и фазовое распределение в плоскости изображения и спектральной плоскости. При сравнении фазовых распределений нужно учитывать, что после каждого преобразования Фурье моды ГЭ приобретают фазовый набег $\pi n/2$, где $n$ - номер моды. В таблице 1 приведены фазовый набег (взятый по модулю $2\pi$) в плоскости изображения - $\varphi_I$ и фазовый набег в следующей спектральной плоскости - $\varphi_{SS}$. Понятно, что для мод ГЭ, номер которых $n$ кратен 4, фазовый портрет будет одинаковым как в плоскости изображения, так и в спектральной плоскости. Для четных мод ГЭ, но не кратных 4, комплексные распределения в плоскости изображения и в спектральной плоскости будут находиться в противофазе.

На рис. 5. показаны графики среднеквадратичного отклонения распределения интенсивности от идеальной в спектральной плоскости $\delta_S$ для 4-й (линия 1) и 5-й (линия 2) мод ГЭ, а также в плоскости изображения $\delta_I$ для 4-й (линия 3) и 5-й (линия 4) мод в зависимости от размера диафрагмы. Интересно отметить, что если глобальные минимумы на рис. 5 (линии 1, 2) соответствуют оптимальному размеру ДОЭ, то дополнительные (локальные) минимумы совпадают с последними нулями полиномов Эрмита.

Оптимальные размеры ДОЭ $x_0/\sigma$ и диафрагмы в спектральной плоскости $x_S/\sigma$ приведены в сводной таблице 1. Из таблицы видно, что среднеквадратичное отклонение распределения интенсивности в плоскости изображения от идеального $\delta_I$, как правило, меньше отклонения в спектральной плоскости $\delta_S$. При этом отклонение в следующей спектральной плоскости $\delta_{SS}$ (то есть для Фурье-образа изображения) меньше, чем $\delta_S$. То есть оптическая система на рис. 1, повторяемая последовательно несколько раз, представляет собой некоторое приближение резонатора.

На рис. 6 приведены графики энергетической эффективности $\varepsilon$ (линии 1, 2) и среднеквадратичное отклонение распределения интенсивности от идеального (линии 3, 4) в зависимости от количества преобразований Фурье, $k$, для 4-й (линии 1, 3) и 5-й (линии 2, 4) мод ГЭ. При этом $k$=0 соответствует плоскость ДОЭ, $k$=1 - первая спектральная плоскость (см. $\delta_S$, $\varepsilon_S$ в Таблице 1), $k$=2 - первая плоскость изображения (см. $\delta_I$, $\varepsilon_I$ в таблице 1), $k$=3 - вторая спектральная плоскость (см. $\delta_{SS}$ в таблице 1), $k$=4 - вторая плоскость изображения.

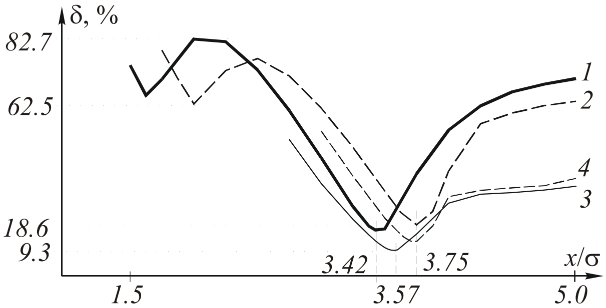



*Рис. 5. График среднеквадратичного отклонения распределения интенсивности от идеального в спектральной плоскости* $\delta_S$ *для 4-й (линия 1) и 5-й (линия 2) мод ГЭ в зависимости от размера ДОЭ* $x_0/\sigma$*, а также в плоскости изображения* $\delta_I$ *для 4-й (линия 3) и 5-й (линия 4) мод в зависимости от размера диафрагмы* $x_S/\sigma$*.*

Из рис. 6 видно, что после этапа низкочастотной фильтрации в первой спектральной плоскости ($k$=1) дальнейшие потери энергии незначительны. То есть практически вся энергия изображения, как и спектра, сосредоточена на конечном интервале, что также свойственно гауссовым модам.

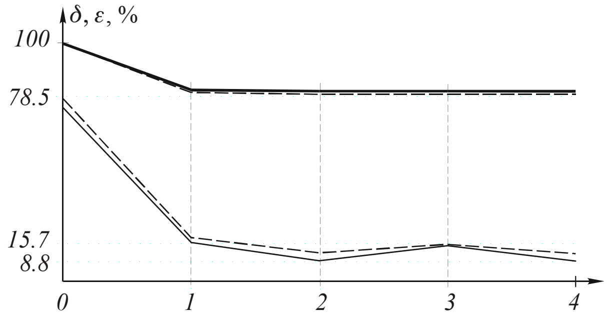



*Рис. 6. Графики энергетической эффективности ε (линии 1, 2) и среднеквадратичное отклонение распределения интенсивности от идеального (линии 3, 4) в зависимости от количества преобразований Фурье,* k*, для 4-й (линии 1, 3) и 5-й (линии 2, 4) мод ГЭ.*

### *3. Эксперимент*

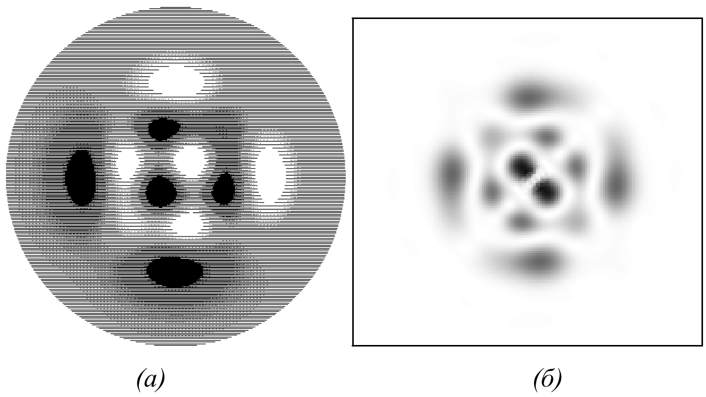
В работе [8] была экспериментально продемонстрирована возможность эффективного (65-70%) формирования одномодовых пучков ГЭ с невысокими индексами - (1,0), (1,1), (1,2) - бинарными ДОЭ с фазой (24). Однако точность формируемых мод сильно зависит от размера освещающего пучка или диафрагмы, которая его ограничивает.

В [3] был предложен метод частичного кодирования, позволяющий варьировать соотношение двух параметров - точности и энергетической эффективности - в широком диапазоне.

На рис. 7. показаны результаты эксперимента по формированию инвариантного двухмодового пучка ГЭ (0,5)+(5,0) бинарным фазовым ДОЭ с уровнем кодирования 0,5. В этом случае теоретическое среднеквадратичное отклонение от идеального распределения интенсивности в фокальной плоскости составляет около 9% при энергетической эффективности 20%.

Таблица 1.

| $n$ | $x_0/\sigma$ | $\delta_S$, % | $\varepsilon_S$, % | $x_S/\sigma$ | $\delta_I$, % | $\varepsilon_I$, % | $\delta_{SS}$, % | $\varphi_I$ | $\varphi_{SS}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 2,25 | 10,09 | 85,59 | 3,50 | 12,00 | 85,45 | 6,09 | $\pi$ | $3\pi/2$ |
| **2** | 2,70 | 14,91 | 83,33 | 3,32 | 7,98 | 83,22 | 12,47 | 0 | $\pi$ |
| **3** | 3,10 | 15,51 | 81,76 | 3,42 | 6,67 | 81,49 | 13,82 | $\pi$ | $\pi/2$ |
| **4** | 3,42 | 16,70 | 80,50 | 3,57 | 9,32 | 80,03 | 15,20 | 0 | 0 |
| **5** | 3,75 | 18,60 | 79,45 | 3,75 | 12,48 | 78,71 | 15,92 | $\pi$ | $3\pi/2$ |



*(а)* *(б)*

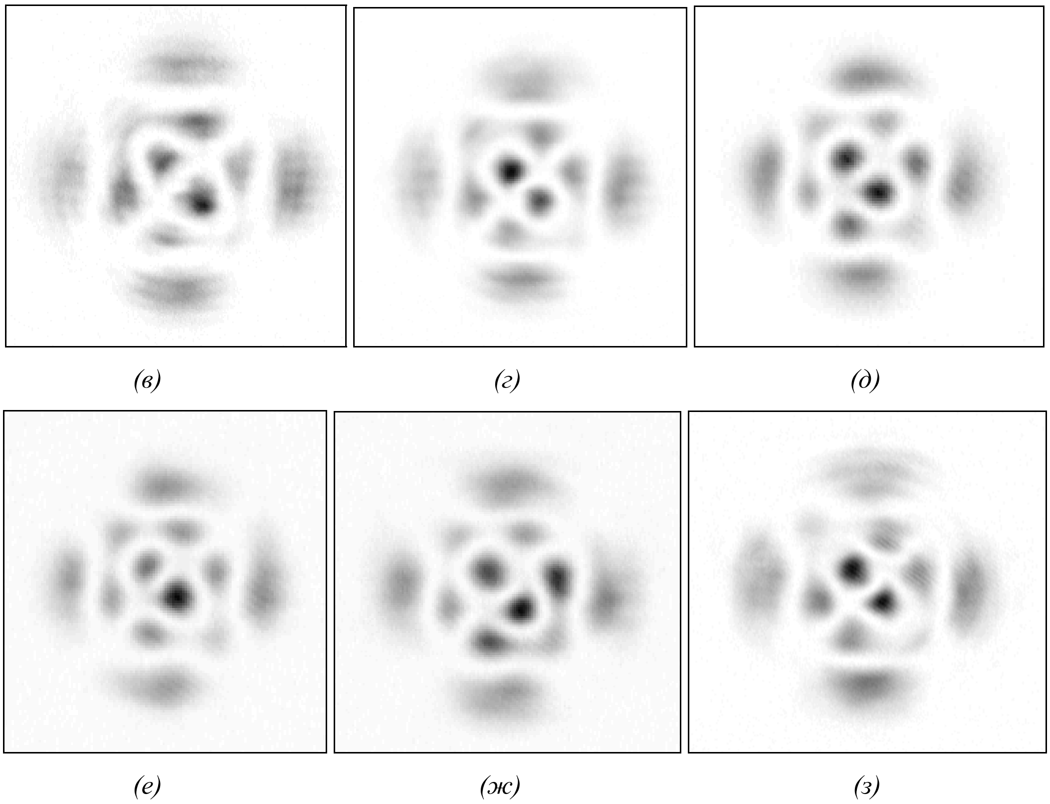



*Рис. 7. Эксперимент по формированию инвариантного двухмодового пучка ГЭ (0,5)+(5,0): бинарная фаза ДОЭ (а), теоретическое распределение интенсивности в фокальной плоскости (б), экспериментально зафиксированное поперечное распределение интенсивности на расстояниях* z*=900 мм (в),* z*=975 мм (г),* z*=1075 мм (д),* z*=1125 мм (е),* z*=1225 мм (ж),* z*=1350 мм (з) от плоскости ДОЭ при освещении его сходящимся пучком.*

Бинарный ДОЭ с фазой, показанной на рис. 7а, был изготовлен в Университете Йоенсуу (Финляндия): диаметр - 10 мм, 2000×2000 отсчетов размером 5×5 мкм. Результаты эксперимента, зафиксированные телекамерой с разрешением 8,59×8,43 мкм, при освещении ДОЭ сходящимся пучком показаны на рис. 7: поперечное распределение интенсивности на расстояниях $z$=900 мм (рис. 7в), $z$=975 мм (рис. 7г), $z$=1075 мм (рис. 7д), $z$=1125 мм (рис. 7е), $z$=1225 мм (рис. 7ж), $z$=1350 мм (рис. 7з) от плоскости ДОЭ. Видно, что сформированное поле демонстрирует инвариантные (с точностью до масштаба) к распространению свойства. Заметны некоторые вариации в центральной части картины там, где амплитуда не была закодирована.

Нужно отметить хорошую согласованность теоретических и экспериментальных результатов: среднеквадратичное отклонение распределения интенсивности на различных расстояниях от теоретически рассчитанного в фокальной плоскости (рис. 7б) составило следующие величины: 17,4% ($z$=900 мм), 15,2% ($z$=975 мм), 11,7% ($z$=1075 мм), 12,3% ($z$=1125 мм), 15,7% ($z$=1225 мм), 16,8% ($z$=1350 мм). Минимальная ошибка (около 12%), как и следовало ожидать, наблюдалась на расстоянии $z$=1075 мм (рис. 7д), что соответствует фокальной плоскости сходящегося освещающего пучка. При этом отклонение после прохождения фокальной плоскости меньше, чем отклонение до нее. Этот эффект связан с чисто фазовым характером ДОЭ: для того, чтобы фазовое распределение под воздействием дифракции перешло в амплитудное, необходимо, чтобы световая волна преодолела определенное расстояние.

## *Заключение*

В данной работе дана оптическая интерпретация операторов симметрии алгебры Ли параксиального уравнения распространения. Показано, что действие оператора эволюции светового поля в пространстве и в параболической среде эквивалентно интегральному преобразованию, аналогичному преобразованию Френеля.

С помощью компьютерного моделирования показано, что фазовый ДОЭ, функция пропускания которого равна знаковой функции от многочлена Эрмита $n$-го порядка, освещаемый плоской волной, ограниченной диафрагмой определенного размера, формирует моду ГЭ с номером 1-5, отличную от идеальной не более чем на 13%.

Приведены результаты эксперимента по формированию двухмодового инвариантного пучка ГЭ. Отличие экспериментальных результатов от теоретических составило 12%.

### *Благодарность*

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 98-01-00894, 99-01-39012, 00-15-96114, 00-01-00031).


### *Литература*


1. Миллер У., Симметрия и разделение переменных, М., Мир, 1981.
2. V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer Generalized Hermite beams in free space // Optik, **108** (1), 20-26 (1998)/
3. Котляр В.В., Хонина С.Н., Сойфер В.А. Метод частичного кодирования для расчета фазовых формирователей мод Гаусса-Эрмита // Автометрия. № 6. С. 74-83. (1999).
4. Лебедев В.В., Лукьянов Ю.Н., Орлов М.И., Преображенский Н.Г., Соколовский Р.И. Амплитудно-фазовые характеристики световых пучков с минимальной расходимостью // Препринт Института теоретической и прикладной механики СО РАН. 1989. №16-89.
5. E. Abramochkin, V. Volostnikov Structurally stable singular wavefields // Proceedings of SPIE: International conference on singular optics. 3487. P. 20-28 (1998).
6. Методы компьютерной оптики // под ред. В.А.Сойфера, М., Физматлит. 2000. 688с.
7. S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer Diffraction optical elements matched to the Gauss-Laguerre modes // Optics and Spectroscopy, 85 (4). P. 636-644 (1998).
8. S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, J. Lautanen, M. Honkanen, J. Turunen Generation of Gauss-Hermite modes using binary DOEs // Proceedings of SPIE: Photonics Prague'99, Device and Systems, 4016. P. 234-239. (2000).
9. Павельев В.С., Хонина С.Н. Быстрый итерационный расчет фазовых формирователей мод Гаусса-Лагерра // Компьютерная оптика, 1997. № 17. С. 15-20.
10. Хонина С.Н. Формирование мод Гаусса-Эрмита с помощью бинарных ДОЭ // II. Оптимизация апертурной функции, Компьютерная оптика. 1998. № 18, С. 28-36.

# Operator description of paraxial light fields

*V.V. Kotlyar[1], S.N. Khonina[1], Ya. Wang[2]*
*[1]Image Processing Systems Institute of RAS, Samara*
*[2]Beijing Institute of Technology*

***Abstract***

The paper uses invariant operators to describe a paraxial light field propagating in free space or a medium with a parabolic refractive index. An integral transform (similar to the Fresnel transform) is provided that describes the propagation of light in a medium with a parabolic refractive index. The results of numerical and natural experiments on the generation of Gauss-Hermite modes using phase DOEs are presented. The difference between the experimental and theoretical results amounted to approximately 12%.

Citation: Kotlyar VV, Khonina SN, Wang Ya. Operator description of paraxial light fields. Computer Optics 2001; 21: 45-52.

***References***

[1] Miller W. Symmetry and separation of variables. Cambridge University Press; 1984.
[2] Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA. Generalized Hermite beams in free space. Optik 1998; 108(1): 20-26.
[3] Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA. A partial encoding technique to design phase shapers for generating Hermite-Gaussian modes [In Russian]. Avtometriya 1999; 6: 74-83.
[4] Lebedev VV, Lukyanov YN, Orlov MI, Preobrazhensky NG, Sokolovsky RI. Amplitude-phase characteristics of light beams with minimal divergence [In Russian]. Pre-print of lnstitute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS 1989; 16-89.
[5] Abramochkin E, Volostnikov V. Structurally stable singular wavefields. Proc SPIE 1998; 3487: 20-28.
[6] Soifer VA, ed. Methods of computer optics [In Russian]. Moscow: "Fizmatlit" Publisher; 2000.
[7] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA. Diffraction optical elements matched to the Gauss-Laguerre modes. Opt Spectrosc 1998; 85(4): 636-644.
[8] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Lautanen J, Honkanen M, Turunen J. Generation of Gauss-Hermite modes using binary DOEs. Proc SPIE 2000; 4016: 234-239.
[9] Pavelyev VS, Khonina SN. Fast iterative calculation of Gauss-Laguerre phase mode shapers [In Russian]. Computer Optics 1997; 17: 15-20.
[10] Khonina SN. Formation of Gaussian-Hermite modes using binary DOEs. II. Optimization of the aperture function [In Russian]. Computer Optics 1998; 18: 28-36.