

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОКАНАЛЬНОГО ФАЗОВОГО ДОЭ, СОГЛАСОВАННОГО С МОДАМИ ГАУССА-ЛАГЕРРА И ОЦЕНКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

А.А. Алмазов, С.Н. Хонина

Институт систем обработки изображений РАН
Самарский государственный аэрокосмический университет

Аннотация

В данной работе осуществляется синтез многоканального фазового фильтра для разложения световых полей по базису обобщённых мод Гаусса-Лагерра, $\Psi_{nm}(r, \varphi)$, $0 \leq n, |m| \leq N$. Фильтр позволяет осуществлять селекцию любой из 9-ти наперёд заданных мод. Вклад той или иной моды в анализируемом изображении можно определить по величине корреляционного пика в фокальной плоскости в соответствующем дифракционном порядке. Проведено исследование по выбору оптимального радиуса плоского и гауссовского освещающих пучков. Приведены результаты численного моделирования эксперимента по селекции заданных мод в лазерном пучке, представляющем собой линейную комбинацию мод Гаусса-Лагерра. Предложен алгоритм оценки отклонений экспериментально полученных изображений от теоретических; приведены результаты его программной реализации в полуавтоматическом режиме. Проводится оценка геометрической погрешности экспериментальных изображений.

Введение

В последнее время наблюдается устойчивый рост интереса к средствам передачи информации на расстояние. Сейчас наиболее перспективным направлением в этой области считается передача информации оптическими методами, например, по оптическим волокнам различной конфигурации. В настоящее время получили широкое распространение градиентные волокна с параболическим поперечным распределением показателя преломления. Моды Гаусса-Лагерра и Гаусса-Эрмита сохраняют поперечное сечение при распространении в этих волокнах [1]. Кроме того, они представляют собой полную ортонормированную систему, т.е. допускают разложение по ним заданного изображения с любой наперёд заданной точностью. Таким образом, решив задачу генерации линейной комбинации мод с заданными весами, можно формировать желаемые распределения световых пучков и использовать их для передачи информации по оптическому волокну.

Естественно, что для построения удовлетворительной системы связи помимо задачи разложения и трансляции изображения, необходимо решить задачу распознавания (селекции) мод, выбранных в качестве базиса разложения. Для генерации и селекции необходимых мод целесообразно использовать дифракционные оптические элементы (ДОЭ) [2]. Основное преимущество подобных устройств – непревзойдённое быстродействие, недостатки – всевозможные неточности, присущие аналоговым устройствам (ошибки дискретности, неизбежные технологические ограничения в процессе изготовления ДОЭ). В настоящей работе осуществляется построение ДОЭ, предназначенных для селекции и генерации мод Гаусса-Лагерра (ГЛ). Приводятся результаты численного моделирования их работы.

Часть данной работы посвящена решению проблемы анализа экспериментальных данных и оценке их погрешности. Единственный критерий, сравнительно легко доступный для наблюдения, по которому можно производить оценку погрешности получаемых изображений – картина распределения интенсивности в плоскости перпендикулярной оси пучка (как правило, в плоскости ДОЭ, либо же в фокальной плоскости). Чтобы сравнить полученные экспериментальные картины с теоретическими и оценить среднеквадратичную и геометрическую погрешности, нужно произвести ряд действий: совмещение центров изображений, масштабирование, поворот и нормировку. При отсутствии автоматизации процесса, это становится весьма трудоёмким делом. Для преодоления этих трудностей был разработан метод совмещения и оценки изображений.

Теоретические основы

Обобщённые моды ГЛ имеют вид:

$$\Psi_{nm}(r, \varphi) = \frac{\sqrt{n!}}{\sigma \sqrt{\pi(n+|m|)!}} \left(\frac{r}{\sigma}\right)^{|m|} \exp\left[-\left(\frac{r}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right] L_n^{|m|}\left[\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2\right] \exp[i m \varphi], \quad (1)$$

где σ – параметр, характеризующий эффективную ширину модовой функции, $r^2 = x^2 + y^2$ – радиус в поперечной плоскости (x, y – декартовы координаты в поперечной плоскости), $\varphi = \arctg(y/x)$ – полярный угол в поперечной плоскости, $L_n^{|m|}(x)$ – обобщённый многочлен Лагерра:

$$L_n^m(x) = (m+n)! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!(m+k)!(n-k)!} x^k, \quad (2)$$

(n, m) – индексы моды, где n имеет физический смысл количества тёмных колец в поперечном сечении, а m – количества скачков фазы (см. рис. 1).

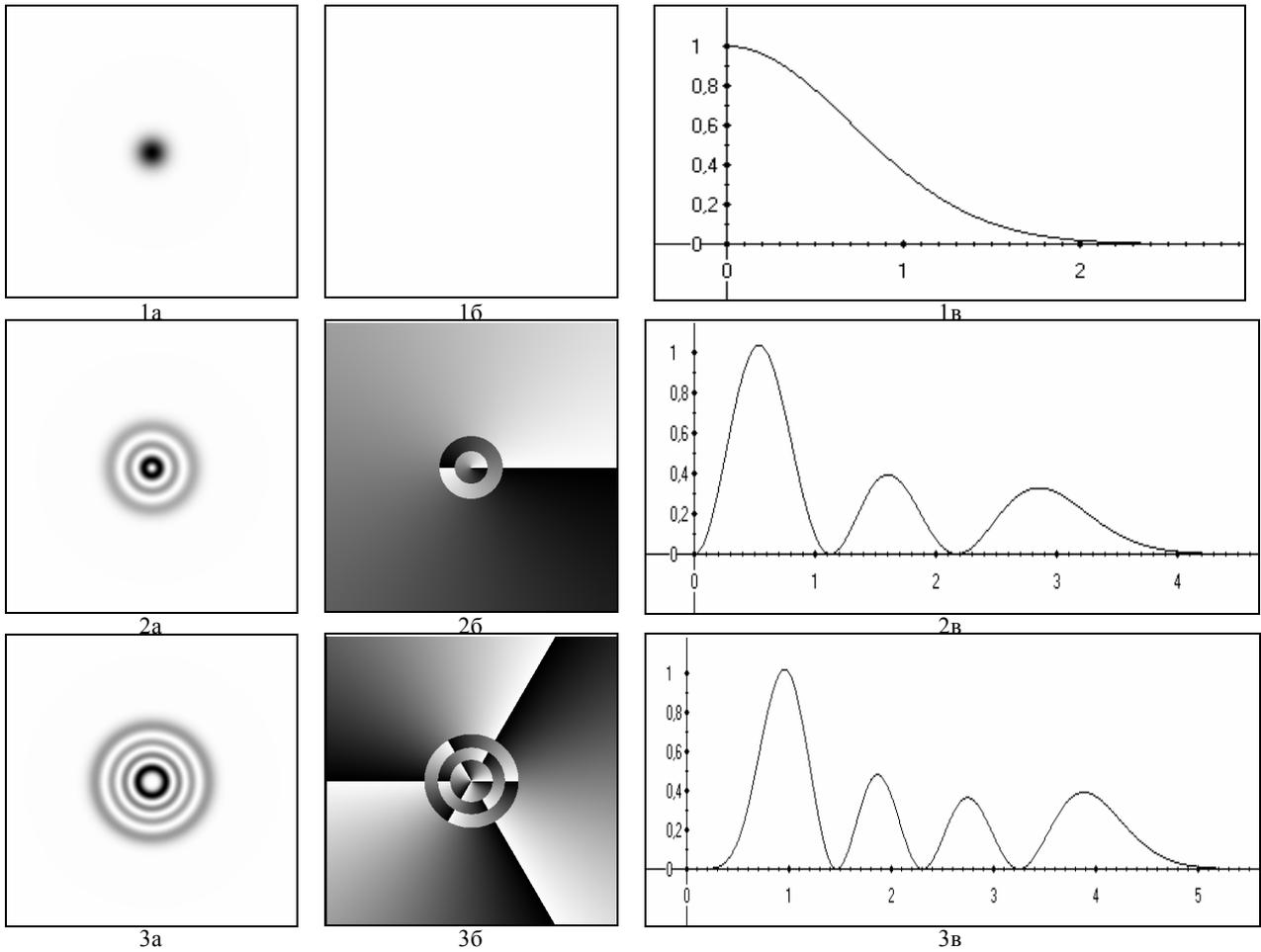


Рис. 1. 1а, 2а, 3а – распределение интенсивности; 1б, 2б, 3б – распределение фазы, 1в, 2в, 3в – радиальное сечение интенсивности мод (n,m) : $(0,0)$ $(2,-1)$ $(3,-3)$, соответственно

Моды ГЛ распространяются в свободном пространстве по следующему закону:

$$U(r, \varphi, z) = \exp\left[-ikz + \frac{ikr^2}{4R(z)} - \left(\frac{r}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right] \cdot \left(\frac{r}{\sigma(z)}\right)^{|m|} L_n^{|m|}\left(\left(\frac{r}{\sigma(z)}\right)^2\right) \exp[-i\beta_{nm}(z) + im\varphi], \quad (3)$$

$$\beta_{nm}(z) = (2n + |m| + 1) \cdot \arctg(z/z_0), \quad (4)$$

$$z_0 = \pi\sigma_0^2/\lambda, \quad (5)$$

$$\sigma^2(z) = \sigma_0^2(1 + z^2/z_0^2), \quad (6)$$

$$R(z) = z(1 + z_0^2/z^2), \quad (7)$$

где z_0 – расстояние Релея, z – расстояние по оси модового пучка, измеряемое от его точки перетяжки ($z=0$), σ_0 – эффективная ширина модовой функции в точке перетяжки (т.е. $\sigma_0 = \sigma(z)|_{z=0}$), λ – длина волны лазерного излучения.

Моды ГЛ представляют собой полный набор ортогональных функций:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \Psi_{nm}(r, \varphi) \Psi_{kl}^*(r, \varphi) r dr d\varphi = \delta_{nk} \delta_{ml}, \quad (8)$$

что позволяет представлять любую функцию в виде ряда по этим модам. Конечной суперпозицией мод ГЛ

$$F(r, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sum_{|m|=0}^M C_{nm} \Psi_{nm}(r, \varphi), \quad (9)$$

варьируя N, M можно аппроксимировать изображение с любой наперед заданной точностью. Коэффициенты C_{nm} в выражении (9) определяются по формуле:

$$C_{nm} = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty F(r, \varphi) \Psi_{nm}^*(r, \varphi) r dr d\varphi. \quad (10)$$

Энергетический вклад каждой моды в пучок характеризуется квадратом модуля соответствующего коэффициента $|C_{nm}|^2$.

Моды ГЛ являются собственными функциями Фурье-преобразования:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \Psi_{nm}(r, \varphi) \exp[-ir\rho \cos(\varphi - \theta)] r dr d\varphi = (-1)^n i^{|m|} \Psi_{nm}(\rho, \theta), \quad (11)$$

что позволяет использовать их для эффективного ввода излучения в световые волокна.

ДОЭ для генерации пучков Гаусса-Лагерра

Для генерации заданной суперпозиции мод ГЛ целесообразно использовать ДОЭ. Теоретически, наиболее простым решением является амплитудно-фазовый (АФ) оптический элемент, повторяющий амплитуду и фазу соответствующих мод. Однако АФ элементы весьма сложны в изготовлении и имеют низкую энергетическую эффективность, поэтому почти не используются на практике.

Наиболее эффективными являются чисто фазовые ДОЭ. Существует множество алгоритмов их расчёта. Наиболее простым из них является метод Лезема [3], предложенный для киноформов. В этом случае информация об амплитуде игнорируется (принимается постоянной), а учитывается только фаза. Однако такие фазовые элементы имеют очень большие погрешности формирования заданного светового поля, что делает это решение неудовлетворительным. Погрешность в данном случае возникает из-за того, что уравнивается энергетический вклад в изображение участков с большой и малой амплитудой. Таким образом, участки, на которые должно приходиться от 1 до 10% энергии (они составляют 30–70% площади изображения), получают энергетический вклад, пропорциональный своей площади, что сильно искажает итоговую картину. Ясно, что

для повышения качества фазовых ДОЭ необходимо «отсечь» эти участки. В [4] разработан метод знаковой функции с оптимизацией апертуры, который, в отличие от метода Лезема, позволяет часть информации об амплитуде сохранить и учесть ее в параметрах апертуры. В силу радиальной симметрии мод ГЛ, до 99% энергии сосредоточено в круге с радиусом равным радиусу наибольшего из колец мод. Поэтому имеет смысл «обрезать» ДОЭ апертурой этого радиуса. Оптимальный радиус апертуры точно находится путём минимизации среднеквадратичного отклонения Фурье-образа.

Кроме использования ДОЭ с апертурой нужного радиуса можно использовать другие способы «гашения» лишней энергии, например, освещение ДОЭ не плоской волной, а пучком с Гауссовским распределением амплитуды $F(r, \varphi) = \exp(-r^2/2\sigma^2)$. Тогда распределение интенсивности $I(r, \varphi) = \exp(-r^2/2\sigma^2)$, где σ – гауссовский радиус пучка. Оптимальный радиус σ находится путём минимизации среднеквадратичного отклонения Фурье-образа.

Пример для композиции мод (n, m) : $(1, 1) + (2, 2) + (2, 11)$ (см. на рис. 2 и в таб. 1), ε – часть энергии амплитудно-фазового эталонного распределения, проходящего через апертурную функцию (круг или гаусс), δ – среднеквадратичное отклонение Фурье-образа).

Таблица 1. Параметры ДОЭ, согласованного с композицией мод (n, m) : $(1, 1) + (2, 2) + (2, 11)$

Тип ДОЭ	Радиус (пиксели)(изображение 350×350)	ε (%)	δ (%)
Амплитудно-фазовый	–	100	0
Фазовый с круглой апертурной функцией	$r=73$	77,96	49,05
Фазовый с гауссовой апертурной функцией	$\sigma=57$	56,65	45,05

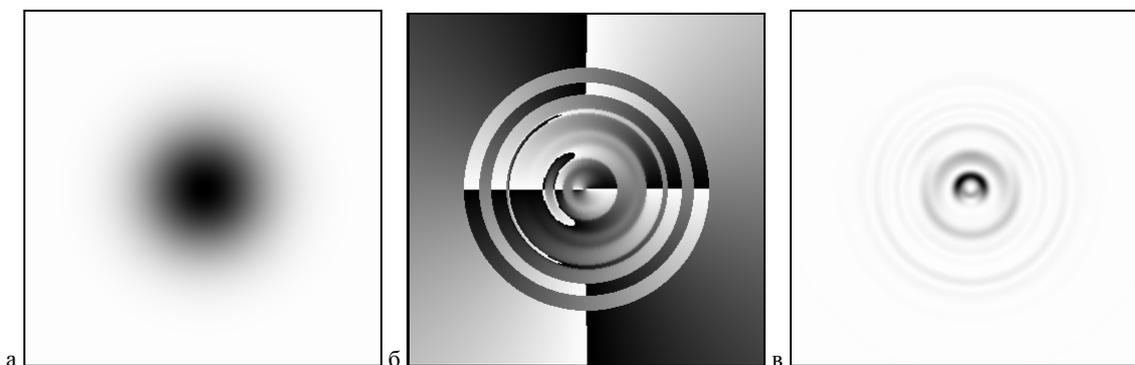


Рис. 2. Фазовый ДОЭ, освещаемый гауссовым пучком: а – распределение интенсивности; б – распределение фазы; в – распределение интенсивности Фурье-образа композиции мод (n, m) : $(1, 1)$ $(2, 2)$ $(2, 11)$

Многоканальные ДОЭ, согласованные с модами Гаусса-Лагерра

В задаче распознавания изображений инвариантно к их повороту в плоскости наблюдения целесообразно использовать пространственные фильтры, разделяющие амплитуду когерентного светового поля на отдельные дифракционные составляющие специальных ортогональных базисов, содержащих угловые гармоники [5]. Под угловыми гармониками понима-

ются комплексные функции с единичным модулем и линейной зависимостью от полярного угла $\exp(im\varphi)$. Такие гармоники появляются, например, при генерации многомодовых пучков Гаусса-Лагерра. Сферическая линза фактически играет роль Фурье-анализатора, так как она раскладывает световое поле на плоские волны и пространственные Фурье-гармоники. Аналогично, комбинация «линза + ДОЭ» может быть названа анализатором Гаусса-Лагерра, если данный оптический элемент раскладывает ана-

лизируемое световое поле по соответствующему базису [5–7]. Разложение по модам Гаусса-Лагерра может быть использовано при селекции поперечных мод на выходе многомодового волокна с параболическим профилем показателя преломления [8].

Функция комплексного пропускания (ФКП) ДОО такого анализатора представляется линейной комбинацией конечного числа базисных функций $\psi_{nm}(x,y)$ взятых с заданными наклонами и единичными весами.

$$\tau(x,y) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \Psi_{nm}^*(x,y) \cdot \exp[i(\alpha_{nm}x + \beta_{nm}y)] \quad (12)$$

Если такой ДОО поместить перед сферической линзой с фокусным расстоянием f и осветить световой волной с длиной волны λ и амплитудой $F(x,y)$, интенсивность света в точках (u_{nm}, v_{nm}) фокальной плоскости

$$u_{nm} = \frac{\lambda f}{2\pi} \alpha_{nm}, \quad v_{nm} = \frac{\lambda f}{2\pi} \beta_{nm},$$

будет приближённо пропорциональна квадратам модулей коэффициентов C_{nm} разложения комплексной амплитуды (10).

Пример многоканального ДОО, согласованного с модами (n,m) : (1,1); (1,-1); (0,0); (2,2); (2,0); (2,-2); (4,0); (3,3); (3,-3) показан на рис. 3, а характеристики ДОО, включая дифракционную эффективность ε и среднеквадратичное отклонение δ , приведены в таб. 2 и 3.

Можно ввести ещё один критерий – геометрическое соответствие структуры изображений в Фурье-плоскости, например, совпадение центров изображений мод и радиусов колец на изображениях, δ_s . δ_s определяется формулой:

$$\delta_s = \frac{\sum_{i=0}^n (X_{\mathcal{E}i} - X_{\mathcal{T}i})^2}{\sum_{i=0}^n X_{\mathcal{E}i}^2} \quad (13)$$

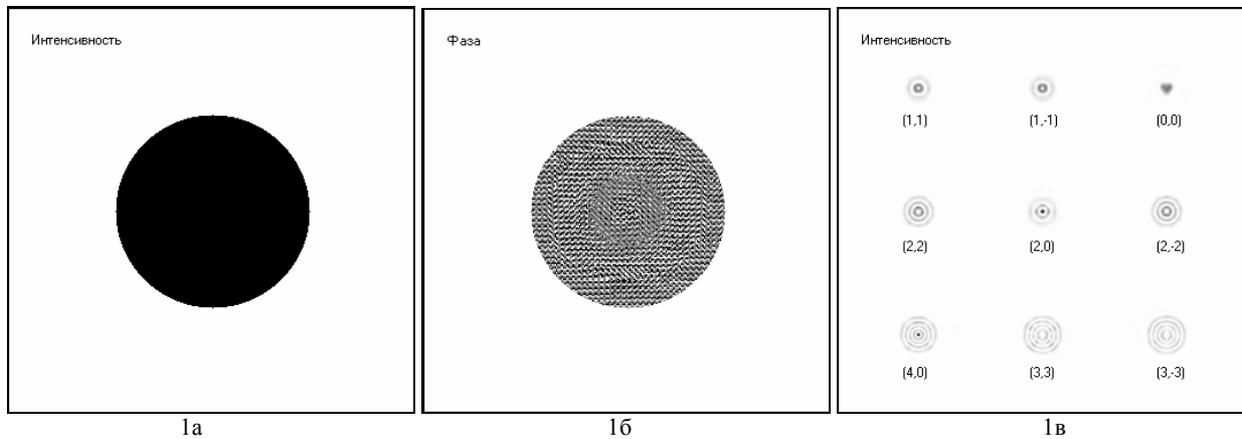


Рис. 3. 1а – функция пропускания (интенсивность); 1б – функция пропускания (фаза); 1в – изображение в фокальной плоскости при освещении плоской волной фазового ДОО с круглой апертурной функцией

Номера мод (n,m) :		
(1,1)	(1,-1)	(0,0)
(2,2)	(2,0)	(2,-2)
(4,0)	(3,3)	(3,-3)

Таблица 2. Параметры ДОО, согласованных с модами (n,m) : (1,1); (1,-1); (0,0); (2,2); (2,0); (2,-2); (4,0); (3,3); (3,-3)

Тип ДОО	Радиус (пикс.) (изображение 350×350)	ε (%)	δ (%)
Амплитудно-фазовый	–	17	0
Фазовый с круглой апертурной функцией	$R=84$	95,91	43,31
Фазовый с гауссовой апертурной функцией	$\sigma=50$	57,06	34,36

Таблица 3. Погрешности генерации для ДОО, согласованных с модами (n,m) : (1,1); (1,-1); (0,0); (2,2); (2,0); (2,-2); (4,0); (3,3); (3,-3)

Фильтр № моды	Фазовый с круглой апертурной функцией		Фазовый с гауссовой апертурной функцией	
	δ (%)	δ_s (%)	δ (%)	δ_s (%)
(1,1)	48,66	9,24	37,09	9,25
(1,-1)	50,16	9,24	37,89	9,25
(0,0)	46,06	0	33,92	0
(2,2)	38,17	0	25,84	0
(2,0)	35,19	0	36,15	7,12
(2,-2)	38,80	0	27,70	0
(4,0)	45,07	13,50	36,61	27,99
(3,3)	33,65	26,92	27,72	25,34
(3,-3)	32,54	18,42	32,54	16,75

Из таб. 2 и 3 видно, что ДОЭ, рассчитанные на гауссовый освещающий пучок по сравнению с плоским освещающим пучком, обеспечивают меньшую среднеквадратичную ошибку формирования мод ГЛ при несколько большей геометрической погрешности.

Моделирование экспериментов по селекции мод Гаусса-Лагерра

На рис. 4 показано действие амплитудно-фазового, и фазового, оптимизированного по круглой апертурной функции фильтра, согласованного с модами ГЛ (n,m) : (1,1) (1,-1) (0,0) (2,2) (2,0) (2,-2) (4,0) (3,3) (3,-3) при освещении их тестовой композицией мод с весами $C_{0,0}=C_{2,0}=C_{1,-2}=1$. В таб. 4, 5, 6 даны численные результаты экспериментов.

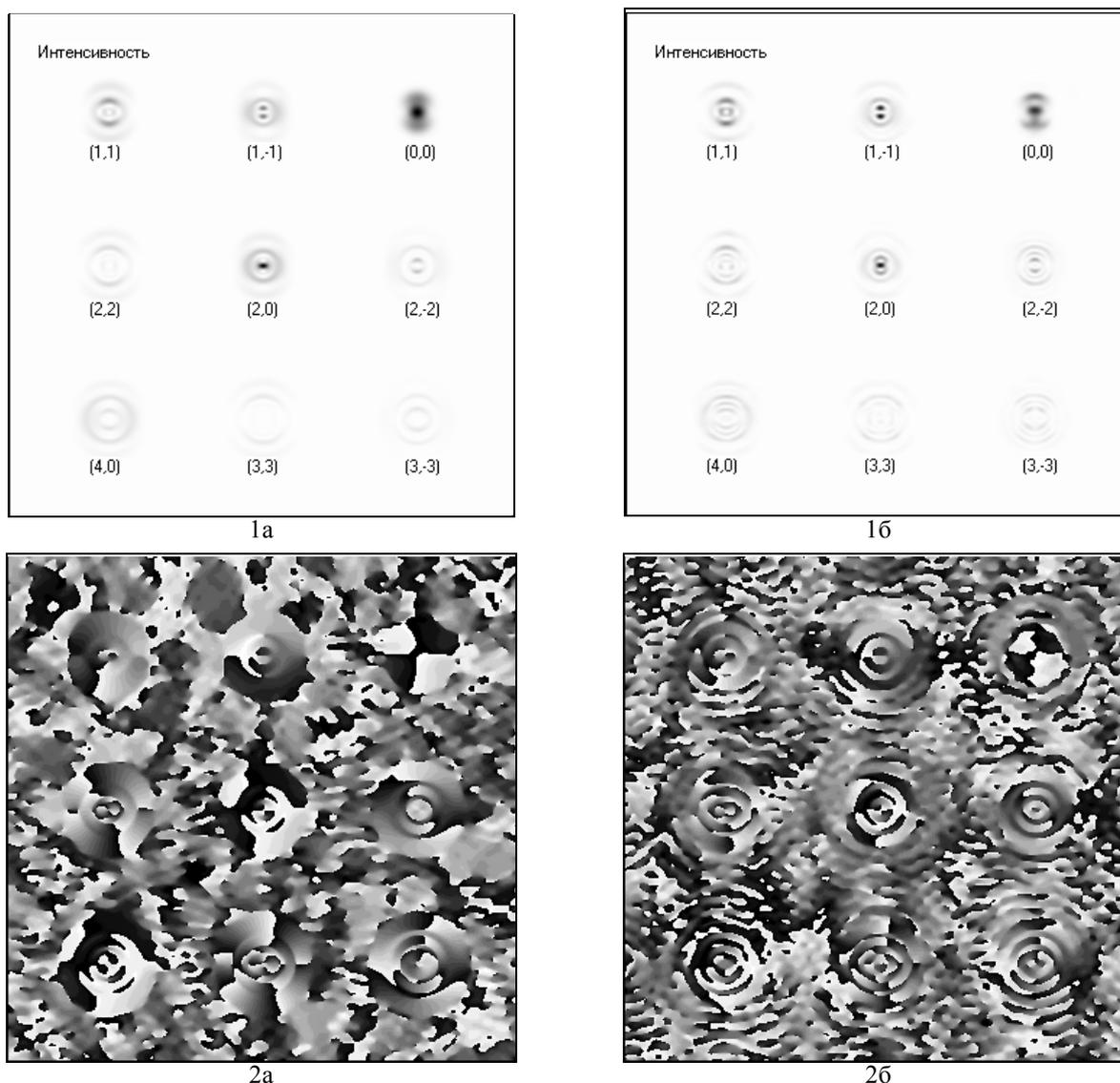


Рис. 4. 1а, б – амплитуда; 2а, б – фаза в Фурье-плоскости после посылки композиции с весами $C_{0,0}=C_{2,0}=C_{1,-2}=1$ для АФ фильтра и фазового фильтра с круглой апертурной функцией, соответственно

Таблица 4. Результаты вычислительного эксперимента для освещающей суперпозиции мод ГЛ с весами $C_{0,0}=C_{2,0}=C_{1,-2}=1$

Коэффициенты	На входе	Ожидаемые	АФ ДОЭ	$ \Delta_c $	Фазовый ДОЭ	$ \Delta_c $	Соотношение сигнал/шум
$C_{0,0}$	0,5000	0,5000	0,4978	0,0022	0,3905	0,1095	
$C_{2,0}$	0,5000	0,5000	0,5022	0,0022	0,5772	0,0772	
$C_{1,-2}$	0,5000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
$C_{1,-1}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0323	0,0323	
Отклонение от ожидаемых, δ_C				0,0440		0,1949	

Таблица 5. Результаты вычислительного эксперимента для освещающей суперпозиции мод ГЛ с весами $C_{1,1}=3, C_{2,0}=1, C_{3,-3}=2, C_{4,-7}=1, C_{7,3}=2, C_{8,-4}=4, C_{9,1}=3$

Коэффициенты	На входе	Ожидаемые	АФ ДОЭ	$ \Delta_c $	Фазовый ДОЭ	$ \Delta_c $	Соотношение сигнал/шум
$C_{1,1}$	0,5000	0,5000	0,6685	0,1685	0,5681	0,0681	0,6000
$C_{2,0}$	0,1666	0,1666	0,0753	0,0936	0,0323	0,1343	
$C_{3,-3}$	0,3333	0,3333	0,2563	0,0770	0,3618	0,0285	
$C_{4,-7}$	0,1666	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
$C_{7,3}$	0,3333	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
$C_{8,-4}$	0,6666	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
$C_{9,1}$	0,5000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
Отклонение от ожидаемых, δ_c				0,3329		0,4241	

Таблица 6. Результаты вычислительного эксперимента для освещающей суперпозиции мод ГЛ с весами $C_{2,0}=2, C_{2,2}=1, C_{3,-3}=1, C_{3,4}=2, C_{7,1}=4, C_{8,-3}=3$

Коэффициенты	На входе	Ожидаемые	АФ ДОЭ	$ \Delta_c $	Фазовый ДОЭ	$ \Delta_c $	Соотношение сигнал/шум
$C_{2,0}$	0,5000	0,5000	0,6888	0,1888	0,6815	0,1815	0,4444
$C_{2,2}$	0,2500	0,2500	0,1623	0,0877	0,2542	0,0042	
$C_{3,-3}$	0,2500	0,2500	0,1489	0,1011	0,0643	0,1857	
$C_{3,4}$	0,5000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
$C_{7,1}$	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
$C_{8,-3}$	0,7500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
Отклонение от ожидаемых, δ_c				0,3779		0,4241	

Погрешности для АФ ДОЭ возникают в результате того, что функции в формула (12) являются лишь приближенно ортогональными. ДОЭ дает хорошие результаты при соотношении сигнал/шум ≥ 1 , ухудшающиеся при соотношениях сигнал/шум = 0,5 и ниже. Здесь «сигнал» равен энергетическому вкладу селективируемых мод (присутствующих в фильтре), а «шум» соответствует энергетическому вкладу паразитных (отсутствующих в фильтре) мод.

Полученные результаты позволяют говорить о пригодности фазовых фильтров для обнаружения той или иной моды в анализируемом изображении. Однако коэффициенты $|C_{nm}|^2$ находятся с недостаточной точностью. Чтобы повысить точность необходимо применять методы кодирования амплитудно-фазовой функции ДОЭ в фазовую [9].

Оценка экспериментальных результатов

Данный раздел посвящен решению проблемы анализа экспериментальных данных и оценки их погрешности. Единственный критерий, сравнительно легко доступный для наблюдения, по которому можно производить оценку погрешности получаемых изображений – картина распределения интенсивности в плоскости перпендикулярной оси пучка (как правило, в плоскости ДОЭ, либо же в фокальной плоскости). Чтобы сравнить полученные экспериментальные картины с теоретическими и оценить среднеквадратичную и геометрическую погрешности, нужно произвести ряд действий: совмещение центров изображений, масштабирование, поворот и нормировку. При отсутствии автоматизации процес-

са, это становится весьма трудоёмким делом. Для преодоления этих трудностей был разработан метод совмещения и оценки изображений.

Основной проблемой является определение критериев совмещения, поворота и масштабирования изображений. Дело в том, что картины интенсивности для композиций обобщённых мод ГЛ зачастую бывают далеко не симметричны относительно оптической оси пучка. Эта ось легко определяется визуально, но найти её местоположение по картине интенсивности аналитическим путём представляется довольно сложной задачей. Таким образом, самая простая идея – совместить «центры масс» изображений, повернуть их и затем отмасштабировать оказывается работоспособной только для простых случаев – отдельных мод и других, подобных, радиально-симметричных картин. В данном случае проблема заключается в поиске характерных точек изображения, по которым можно будет осуществлять совмещение и поворот, а в дальнейшем и масштабирование изображений. В разработанном методе выбираются две характерные точки изображения: «центр масс» и точка максимума.

Для отдельных мод и радиально-симметричных распределений

В случае радиально-симметричных изображений задача существенно упрощается. «Центр масс» совпадает с оптической осью пучка и, как правило, с точкой максимума.

Местоположение «центра масс» определяется следующим образом:

$$\begin{cases} X_C = \frac{\sum_i \left(\sum_j I_{i,j} y_{i,j} \right) x_i}{\sum_{i,j} I_{i,j}}, \\ Y_C = \frac{\sum_i \left(\sum_j I_{i,j} x_{i,j} \right) y_i}{\sum_{i,j} I_{i,j}} \end{cases} \quad (14)$$

где X_C, Y_C – координаты центра масс, $I_{i,j}$ – интенсивность в точке (пикселе) изображения (i, j) , $x_{i,j}, y_{i,j}$ – координаты пиксела (i, j) .

Для экспериментального и расчётного изображения определяется радиус, в который входит определённая доля (здесь выбрано 99%) энергии пучка. Тогда коэффициент масштабирования равен

$$K_m = \frac{R_{\text{эксп}}}{R_{\text{расч}}} \quad (15)$$

Расчетное изображение поворачивается на угол φ , масштабируется с коэффициентом K_m и совмещается с точкой центра масс (X_C, Y_C) . После этого запускается процедура точной доводки изображения, определяющая оптимальные значения параметров K_m и (X_C, Y_C) в небольшой окрестности найденных значений. Если этого окажется недостаточным, процедуру можно повторить ещё столько раз, сколько нужно для получения желаемой точности. Все действия производятся с расчётным изображением, поскольку осуществить их с ним программно проще, чем с экспериментальным, кроме того, не возникает дополнительной погрешности преобразований.

На рис. 5 показан пример использования метода для синтезированного тестового (рис. 5.1 (а)) и экспериментального (рис. 5.2 (а)) изображений.

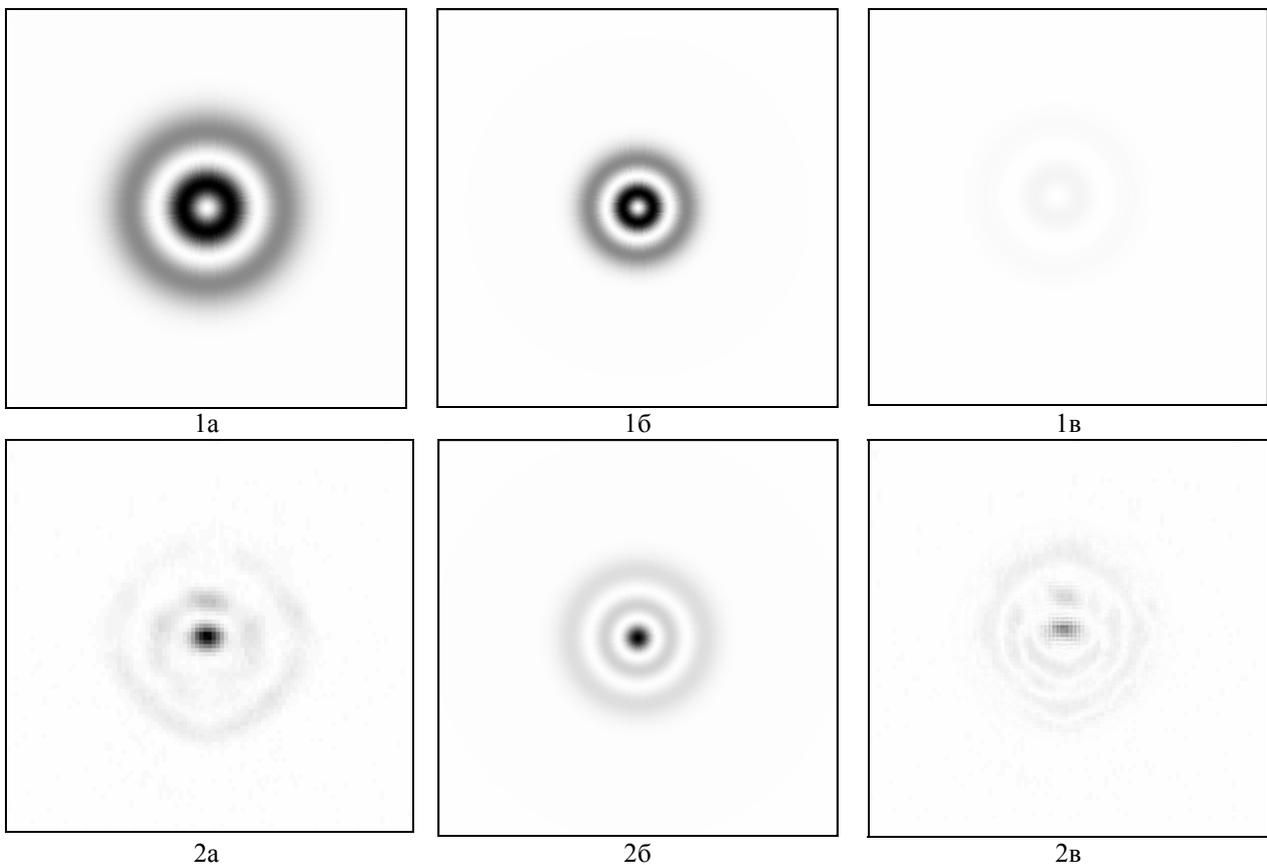


Рис. 5. 1а, 2а – анализируемые распределения интенсивности; 1б, 2б – расчётные распределения интенсивности; 1в, 2в – модуль разности анализируемого и расчётного изображений для синтезированной моды (1,1) и для экспериментально полученной с помощью 24-канального фазового ДОЭ моды (2,0), соответственно

Среднеквадратичное отклонение для синтезированного изображения $\delta_{\text{синт}}=3,74\%$; это значение находится в пределах погрешности дискретизации изображения. Погрешность экспериментального изображения $\delta_{\text{эксп}}=37,03\%$. Эта величина связана с игнорированием амплитудной информации при расчете 24-х канального фазового ДОЭ, формировавшего моду, и согласуется с результатами, полученными в разделе 4.

Для не-радиально-симметричных распределений

Местоположение «центра масс» определяется по формуле (14).

Точка максимума (X_M, Y_M) – та точка изображения, в которой интенсивность достигает своего максимального значения. Для каждого из сравниваемых изображений (экспериментального и расчётного) определяется его вектор (см. рис. 6):

$$\begin{cases} \vec{a}_{расч} = \vec{a}_{расч} (X_{M\ расч} - X_{C\ расч}, Y_{M\ расч} - Y_{C\ расч}) \\ \vec{a}_{эксп} = \vec{a}_{эксп} (X_{M\ эксп} - X_{C\ эксп}, Y_{M\ эксп} - Y_{C\ эксп}) \end{cases} \quad (16)$$

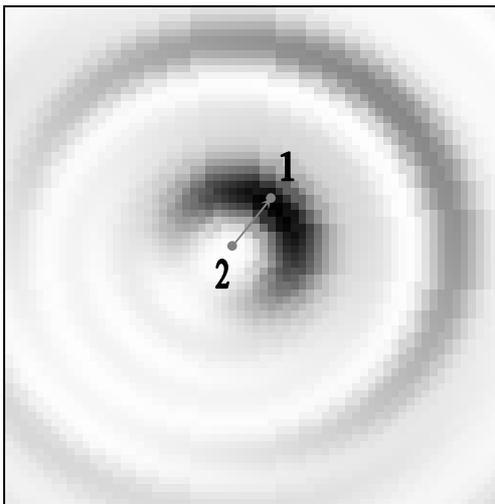


Рис. 6. Определение вектора изображения (показан центральный фрагмент), 1 - точка максимума изображения, 2 - «центр масс» изображения

Затем, определяется угол поворота изображения по углу между векторами:

$$\varphi = \arccos \left(\frac{(\vec{a}_{расч} \cdot \vec{a}_{эксп})}{|\vec{a}_{расч}| |\vec{a}_{эксп}|} \right) \quad (17)$$

Коэффициент масштабирования K_m определяется отношением модулей векторов:

$$K_m = \frac{|\vec{a}_{эксп}|}{|\vec{a}_{расч}|} \quad (18)$$

Расчетное изображение поворачивается на угол φ , масштабируется с коэффициентом K_m и совмещается с точкой центра масс (X_C, Y_C) .

После этого запускается процедура точной доводки изображения, находящая оптимальные значения параметров φ , K_m и (X_C, Y_C) в небольшой окрестности найденных значений. Процедуру можно повторить несколько раз.

На рис. 7 показан пример использования метода для синтезированного тестового (рис. 7.1 (а)) и экспериментального (рис. 7.2 (а)) изображений.

Среднеквадратичное отклонение для синтезированного изображения $\delta_{с\text{инт}}=0,95\%$. Погрешность экспериментального изображения $\delta_{э\text{ксп}}=24,19\%$. Основной вклад в эту величину вносят периферийные участки изображения

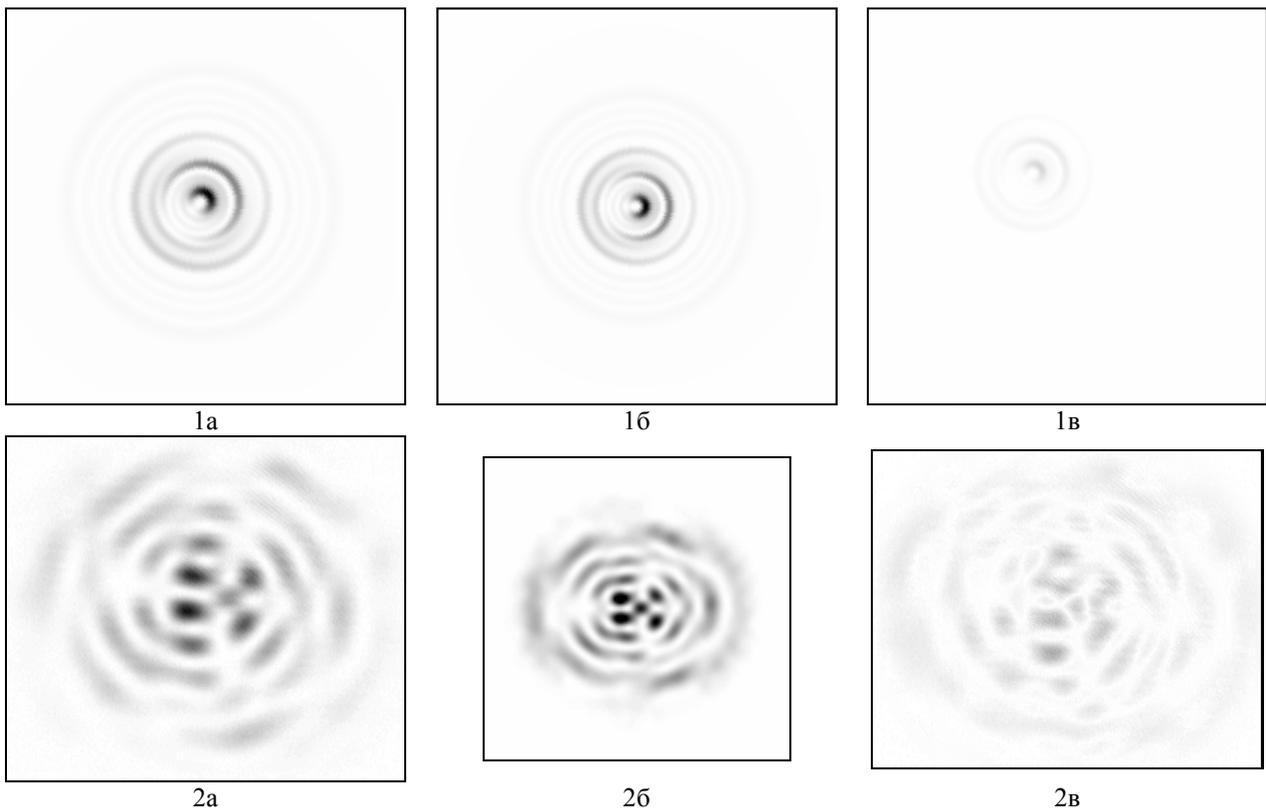


Рис. 7. 1а, 2а – анализируемые распределения интенсивности; 1б, 2б – расчетные распределения интенсивности; 1в, 2в – модуль разности анализируемого и расчетного изображений для синтезированной композиции мод с весами $C_{1,1}=C_{2,2}=C_{11,2}=1$ и для экспериментально полученной с помощью кодированного ДОО композиции мод свесами $C_{2,-2}=-1, C_{3,-1}=-1.5, C_{4,0}=1, C_{4,2}=1, C_{4,4}=1,5$, соответственно

Оценка геометрической погрешности для экспериментального изображения

Из полученных выше результатов видно, что изображения, получаемые при помощи фазовых фильтров, хотя и имеют достаточно высокую среднеквадратичную погрешность (порядка 30%), визуально мало отличаются от теоретических. Следовательно, для нас представляет интерес не только традиционная среднеквадратичная погрешность, но также и «геометрическая» погрешность, т.е. среднеквадратичное отклонение координат характерных точек (локальных максимумов) экспериментального изображения от координат соответствующих точек теоретического изображения. Поскольку нахождение местоположения всех локальных максимумов экспериментального и теоретического изображений – достаточно сложная и ресурсоёмкая операция, в

данной работе предложено оценивать геометрическую погрешность, проводя несколько сечений заданного изображения и оценивая среднеквадратичное отклонение координат локальных максимумов соответствующих сечений. Погрешность при этом определяется по формуле (13).

На рис. 8 и в таб. 7 показаны результаты вычисления геометрической погрешности для экспериментального изображения (рис. 8.1 (б)). Разработанный полуавтоматический алгоритм нахождения максимумов изображения позволяет осуществлять обработку экспериментального изображения с помощью медианной фильтрации, а также находить максимумы на обработанном изображении в соответствии с заданными пользователем настроечными параметрами (полуширина окна сглаживания, минимальная крутизна пика, ширина верхней площадки пика).

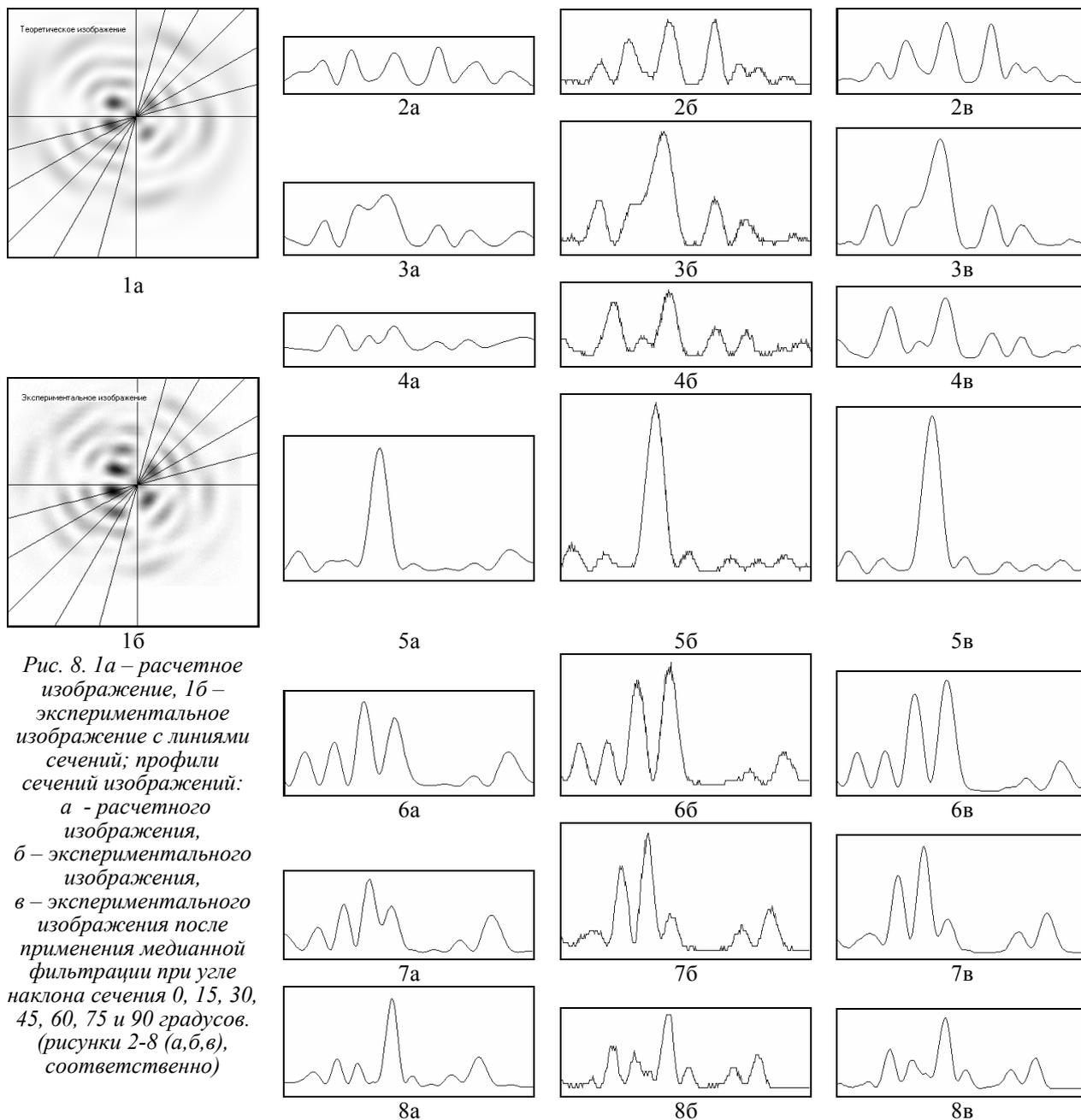


Рис. 8. 1а – расчетное изображение, 1б – экспериментальное изображение с линиями сечений; профили сечений изображений: а - расчетного изображения, б – экспериментального изображения, в – экспериментального изображения после применения медианной фильтрации при угле наклона сечения 0, 15, 30, 45, 60, 75 и 90 градусов. (рисунки 2-8 (а,б,в), соответственно)

Таблица 7. Геометрические погрешности экспериментального изображения (рис. 8.1 (б))
при различных углах сечения

Угол сечения (гр)	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
δ_s (%)	3,761	15,368	3,3823	17,702	1,261	4,293	5,035

Кроме того, алгоритм позволяет осуществлять сопоставление экспериментальных максимумов теоретическим как обычным наложением (совмещая элементы экспериментального и теоретического изображения), так и находя наиболее близкие максимумы теоретического и экспериментального изображений.

Большие значения погрешности при углах наклона сечений 15° и 45° связаны с несовпадением числа пиков экспериментального и теоретического изображений в результате искажений последнего, что легко видеть из рисунков 8,3, 8,5. Эти результаты можно скорректировать, усовершенствовав алгоритм распознавания и учёта пиков при вычислении геометрической погрешности изображений.

Заключение

В данной работе осуществляется синтез многоканального фазового ДОЭ для разложения световых полей по базису обобщённых мод Гаусса-Лагерра $\Psi_{nm}(r, \varphi)$, $0 \leq n, |m| \leq N$. ДОЭ можно использовать как для генерации сразу нескольких мод Гаусса-Лагерра в различных дифракционных порядках, так и для селекции любой из 9-ти наперёд заданных мод в анализируемом пучке. Для генерации мод ГЛ несколько более точными оказываются фазовые ДОЭ, рассчитанные на освещение гауссовым пучком, чем плоским круглым. Полученные результаты позволяют говорить о пригодности фазовых фильтров для обнаружения той или иной моды в анализируемом изображении. Однако для точного определения весового состава мод необходимо применять методы кодирования. При этом отношение сигнал/шум не должно быть меньше единицы.

Для решения проблемы анализа экспериментальных данных и оценки их погрешности разработан метод, основанный на совмещении и подгонке расчетной картины по экспериментальным данным. При этом используется информация о величине и направлении вектора, соединяющего «центр масс» и точку с максимальным значением, на экспери-

ментальной картине. Кроме среднеквадратичной погрешности, проведена оценка также и «геометрической» погрешности, т.е. отклонения координат характерных точек (локальных максимумов) экспериментального изображения от координат соответствующих точек теоретического изображения.

Литература

1. M.J. Adams An introduction to optical waveguides // J.Wiley & Sons, Chichester, 1981.
2. Методы компьютерной оптики // Под ред. В.А. Соифера. Физматлит, М., 2000. – 688с.
3. L.B. Lesem, P.M. Hirsh, J.A. Jordan The kinoform: a new wavefront reconstruction device // IBM J. Res. Develop, 1969. **13**(3). P.150-155,
4. S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer Diffraction optical elements matched to the Gauss-Laguerre modes // Optics and Spectroscopy, 1998. **85**(4). P. 636-644,
5. V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer Light field decomposition in angular harmonics by means of diffractive optics // Journal of Modern Optics, 1998. **45**(7). P.1495–1506,
6. S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, V.A. Soifer, P. Laakkonen, J. Turunen Gauss-Laguerre modes with different indices in prescribed diffraction orders of a diffractive phase element // Optics Comm. **175**, pp.301-308, 2000.
7. S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, V.A. Soifer, P. Laakkonen, J. Turunen, Y. Wang Experimental selection of spatial Gauss-Laguerre modes // Optical Memory and Neural Networks, 2000. **9**(1). P. 69-74,
8. V.A. Soifer, M.A. Golub Laser beam mode selection by computer-generated holograms // Boca Raton: CRC Press, U.S., 1994.
9. V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, A.S. Melekhin, V.A. Soifer Fractional encoding method for spatial filters computation // Asian Journal of Physics, 1999. **8**(3). P. 273-286.

Investigation of characteristics of a multichannel phase DOE matched with Gauss-Laguerre modes and evaluation of the experimental data

A.A. Almazov^{1,2}, S.N. Khonina^{1,2}

¹Image Processing Systems Institute of RAS

²Samara State Aerospace University

Abstract

In this work, a multichannel phase filter is generated for the expansion of light fields using the basis of generalized Gauss-Laguerre modes, $\Psi_{nm}(r, \phi)$, $0 \leq n, |m| \leq N$.

The filter enables the selection of any of the 9 preset modes. The contribution of a particular mode to the analyzed image can be determined on the basis of the value of the correlation peak in the focal plane in the corresponding diffraction order. A study has been performed to select the optimal radius of the flat and Gaussian illuminating beams. The paper provides the results of the numerical simulation of the experiment on the selection of preset modes in a laser beam being a linear combination of Gauss-Laguerre modes. The work proposes an algorithm for assessing the deviations of the images generated experimentally from the theoretical ones; it presents the results of software implementation of this algorithm in a semi-automatic mode. The geometrical error of the experimental images is estimated.

Keywords: multichannel phase DOE, Gauss-Laguerre mode, experimental data, light field, filter, image, diffraction order, Gaussian illuminating beam, laser beam, semi-automatic mode, geometrical error.

Citation: Almazov AA, Khonina SN. Investigation of characteristics of a multichannel phase DOE matched with Gauss-Laguerre modes and evaluation of the experimental data. *Computer Optics* 2002; 23: 23-32.

References

- [1] Adams MJ. An introduction to optical waveguides. Chichester: John Wiley and Sons Inc; 1981.
- [2] Soifer VA, ed. Methods of computer optics [In Russian]. Moscow: "Fizmatlit" Publisher; 2000.
- [3] Lesem LB, Hirsh PM, Jordan JA. The kinoform: a new wavefront reconstruction device. *IBM J Res Develop* 1969; 13(3): 150-155.
- [4] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA. Diffraction optical elements matched to the Gauss-Laguerre modes. *Optics and Spectroscopy* 1998; 85(4): 636-644.
- [5] Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA. Light field decomposition in angular harmonics by means of diffractive optics. *J Mod Opt* 1998; 45(7): 1495-1506.
- [6] Khonina SN, Kotlyar VV, Skidanov RV, Soifer VA, Laakkonen P, Turunen J. Gauss-Laguerre modes with different indices in prescribed diffraction orders of a diffractive phase element. *Opt Commun* 2000; 175: 301-308.
- [7] Khonina SN, Kotlyar VV, Skidanov RV, Soifer VA, Laakkonen P, Turunen J, Wang Y. Experimental selection of spatial Gauss-Laguerre modes. *Optical Memory and Neural Networks* 2000; 9(1): 69-74.
- [8] Soifer VA, Golub MA. Laser beam mode selection by computer-generated holograms. Boca Raton, FL: CRC Press; 1994.
- [9] Kotlyar VV, Khonina SN, Melekhin AS, Soifer VA. Fractional encoding method for spatial filters computation. *Asian J Phys* 1999; 8(3): 273-286.