

АНАЛИЗ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА БЕСКОНЕЧНОМ КРУГЛОМ ЦИЛИНДРЕ С НЕСКОЛЬКИМИ ОДНОРОДНЫМИ СЛОЯМИ

В.В. Котляр, М.А. Личманов

Институт систем обработки изображений РАН
Самарский государственный аэрокосмический университет

Аннотация

Рассмотрен метод расчета распределения интенсивности при дифракции плоской волны ТЕ – и ТМ – поляризации на диэлектрическом однородном цилиндре с произвольной формой сечения. Метод основан на разложении поля внутри и вне цилиндра в ряды из цилиндрических функций, являющихся частными решениями уравнения Гельмгольца. Коэффициенты рядов ищутся из условий сопряжения внешних и внутренних полей на границе цилиндрического объекта. Предложен также метод расчета поля при дифракции плоской волны на многослойном диэлектрическом цилиндре с круглым сечением. При числе однородных слоев цилиндра больше двух задача сведена к решению линейной системы алгебраических уравнений, а при наличии только двух слоев диэлектрического цилиндра для поля получены аналитические соотношения. Приведен численный пример расчета распределения интенсивности при дифракции плоской ТЕ-волны на двухслойном диэлектрическом цилиндре: расчет проведен двумя методами – методом конечных элементов и с помощью полученных аналитических формул.

Введение

Расчету дифракции электромагнитных волн на элементах микро-оптики в последнее время уделяется большое внимание исследователей. Такие расчеты полей требуются при проектировании фотонных кристаллов [1] и волоконных тейперов с размерами в десятки нанометров [2, 3], при анализе взаимодействия (захвата и манипулирования) микрочастиц и модовых лазерных пучков [4], а также для проектирования субмикронных элементов планарной и интегральной оптики [5, 6].

Почти все методы анализа двумерной микро-оптики основаны либо на решении интегральных уравнений методом конечных элементов [7-11], либо на решении дифференциальных уравнений с помощью разностных схем [12-14]. Точность и быстродействие этих методов противоположным образом зависит от числа узлов дискретной сетки отсчетов.

В данной работе предлагается метод расчета поля дифракции, основанный не на разложении искомого поля по своим отсчетам на сетке, а на разложении поля по аналитическим базисным функциям, которые являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений, например, уравнения Гельмгольца. Метод является обобщением известного метода, примененного для расчета поля дифракции плоской электромагнитной волны на однородном диэлектрическом круглом цилиндре [15]. Предлагается два пути обобщения задачи. Первый путь – применить метод разложения поля дифракции по базисным цилиндрическим функциям для однородного диэлектрического цилиндра с произвольной формой сечения (круг, эллипс, квадрат и так далее).

Второй путь – рассмотреть не однородный цилиндр с круглым сечением, а многослойный цилиндр, имеющий много однородных кольцевых слоев. Задача дифракции для двухслойного цилиндра сводится к решению системы из четырех уравнений, которую можно решить аналитически.

1. Описание модового метода

Рассмотрим падение плоской электромагнитной волны на однородный диэлектрический цилиндр с сечением произвольной формы, который неограничен вдоль направления z

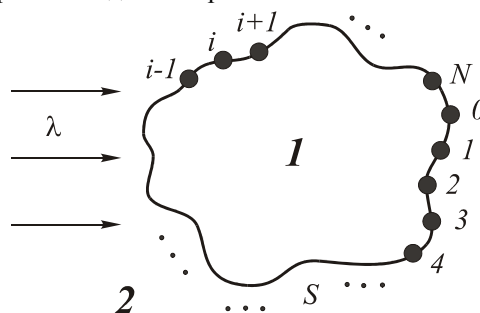


Рис. 1. Дифракция плоской электромагнитной волны на диэлектрическом бесконечном цилиндре с сечением произвольной формы

Согласно рис. 1 область 1 представляет собой однородный диэлектрический цилиндр, ось z направлена перпендикулярно рисунку, а область 2 – внешнюю среду.

Поле внутри области 1 будем искать в виде ряда:

$$\psi_1(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \psi_{1m}(r, \varphi), \quad (1)$$

где $\psi_{1m}(r, \varphi) = J_m(k_1 r) \cos n\varphi$, $J_m(k_1 r)$ – функция Бесселя m -го порядка, $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda} n$, λ – длина волны падающего излучения, $n = \sqrt{\epsilon}$ – показатель преломления области 1.

Поле внутри области 2 с учетом падающей плоской волны $\psi_0(r, \varphi)$ можно представить:

$$\psi_2(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} D_m \psi_{2m}(r, \varphi) + \psi_0(r, \varphi), \quad (2)$$

где $\psi_{2m}(r, \varphi) = H_m^{(2)}(k_2 r) \cos n\varphi$, $H_m^{(2)}(k_2 r)$ – функция Ханкеля 2-го рода m -го порядка, $k_2 = 2\pi/\lambda$ (для области 2 принимаем $n = 1$).

Рассмотрим случай ТЕ-поляризации. Случай ТМ-поляризации приводит к аналогичным формулам и дополнительных трудностей не имеет. Воспользуемся условиями непрерывности полей и их тангенциальных производных на границе S между областями 1 и 2 на рис. 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1(r, \varphi)|_S = \psi_2(r, \varphi)|_S \\ \frac{\partial \psi_1(r, \varphi)}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = \frac{\partial \psi_2(r, \varphi)}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S \end{array} \right. , \quad (3)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор внешней к области 1 нормали.

Подставляя уравнения (1) и (2) в систему (3), получаем систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов C_m и D_m :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{-N/2} \psi_{1-N/2}(r_0, \varphi_0) + \dots + C_{N/2} \psi_{1N/2}(r_0, \varphi_0) - D_{-N/2} \psi_{2-N/2}(r_0, \varphi_0) - \dots - D_{N/2} \psi_{2N/2}(r_0, \varphi_0) = \psi_0(r_0, \varphi_0) \\ C_{-N/2} \psi_{1-N/2}(r_1, \varphi_1) + \dots + C_{N/2} \psi_{1N/2}(r_1, \varphi_1) - D_{-N/2} \psi_{2-N/2}(r_1, \varphi_1) - \dots - D_{N/2} \psi_{2N/2}(r_1, \varphi_1) = \psi_0(r_1, \varphi_1) \\ * * * \\ C_{-N/2} \psi_{1-N/2}(r_N, \varphi_N) + \dots + C_{N/2} \psi_{1N/2}(r_N, \varphi_N) - D_{-N/2} \psi_{2-N/2}(r_N, \varphi_N) - \dots - D_{N/2} \psi_{2N/2}(r_N, \varphi_N) = \psi_0(r_N, \varphi_N) \\ C_{-N/2} \frac{\partial \psi_{1-N/2}(r_0, \varphi_0)}{\partial \mathbf{n}} + \dots + C_{N/2} \frac{\partial \psi_{1N/2}(r_0, \varphi_0)}{\partial \mathbf{n}} - D_{-N/2} \frac{\partial \psi_{2-N/2}(r_0, \varphi_0)}{\partial \mathbf{n}} - \dots - D_{N/2} \frac{\partial \psi_{2N/2}(r_0, \varphi_0)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \psi_0(r_0, \varphi_0)}{\partial \mathbf{n}} \\ C_{-N/2} \frac{\partial \psi_{1-N/2}(r_1, \varphi_1)}{\partial \mathbf{n}} + \dots + C_{N/2} \frac{\partial \psi_{1N/2}(r_1, \varphi_1)}{\partial \mathbf{n}} - D_{-N/2} \frac{\partial \psi_{2-N/2}(r_1, \varphi_1)}{\partial \mathbf{n}} - \dots - D_{N/2} \frac{\partial \psi_{2N/2}(r_1, \varphi_1)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \psi_0(r_1, \varphi_1)}{\partial \mathbf{n}} \\ * * * \\ C_{-N/2} \frac{\partial \psi_{1-N/2}(r_N, \varphi_N)}{\partial \mathbf{n}} + \dots + C_{N/2} \frac{\partial \psi_{1N/2}(r_N, \varphi_N)}{\partial \mathbf{n}} - D_{-N/2} \frac{\partial \psi_{2-N/2}(r_N, \varphi_N)}{\partial \mathbf{n}} - \dots - D_{N/2} \frac{\partial \psi_{2N/2}(r_N, \varphi_N)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \psi_0(r_N, \varphi_N)}{\partial \mathbf{n}} \end{array} \right. . \quad (5)$$

Решив систему (5), получаем искомые коэффициенты C_m и D_m , которые подставляем затем в уравнения (1) и (2), соответственно, для нахождения поля дифракции в областях 1 и 2.

При расчете задачи дифракции данным методом следует учесть, что функции Бесселя и Ханкеля высоких порядков в системе координат, связанной с центром объекта, не должны выходить за предел вычислительной ошибки ЭВМ. Так как при фиксированных значениях аргумента с увеличением номера порядка функции Бесселя стремятся к нулю, а функции Неймана, которые составляют мнимую часть функций Ханкеля, стремятся по модулю к бесконечности. При таких условиях система (5) начинает расходиться, что приводит к потере точности результатов.

Положительной стороной данного метода является незначительное по сравнению с методом конечных элементов (МКЭ) время расчета задачи, так как количество неизвестных коэффициентов гораздо меньше, чем число узлов сетки отсчетов поля в методе МКЭ. К примеру, для расчета дифракции плоской электромагнитной волны на однородном квадратном цилиндре размером 20x20 отсчетов методом интегрального уравнения Фредгольма, использующим

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \psi_{1m}(r, \varphi)|_S = \psi_0(r, \varphi)|_S + \\ + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} D_m \psi_{2m}(r, \varphi)|_S \\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \frac{\partial \psi_{1m}(r, \varphi)}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S = \frac{\partial \psi_0(r, \varphi)}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S + \\ + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} D_m \frac{\partial \psi_{2m}(r, \varphi)}{\partial \mathbf{n}} \Big|_S \end{array} \right. . \quad (4)$$

Потребуем, чтобы количество узлов, описывающих границу, было равно сумме числа коэффициентов C_m и D_m . При этом количество узлов границы должно быть нечетным. Если нумерация узлов границы от 0 до N , где N – четное, то $m = -N/2, N/2$. Таким образом, мы получаем замкнутую систему линейных алгебраических уравнений:

МКЭ [11], требуется решить систему из 400-т линейных алгебраических уравнений, тогда как выше описанным методом при аппроксимации объекта 31 узлом требуется решить 31 уравнение. Кроме того, не возникает ситуация, когда приходится избавляться от расчета функции Ханкеля в окрестности нуля увеличением количества узлов дискретизации [11].

Модовый метод расчета поля дифракции в двумерных задачах, можно также применить не только для однородных цилиндрических объектов, но и для неоднородных. В следующем пункте рассматривается метод решения задачи дифракции плоской волны на многослойном цилиндре с круглым сечением.

2. Дифракция на многослойном цилиндре

В работе [15] приводится аналитическое решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на однородном диэлектрическом цилиндре. Ниже приводится обобщение на случай многослойного цилиндра, где каждый слой имеет свою диэлектрическую проницаемость (рис. 2).

Поле во внутреннем круге ($0 \leq r \leq r_1$) будем искать в виде:

$$\Psi_{11} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{1m} J_m(k\sqrt{\varepsilon_1} r) \cos m\varphi. \quad (6)$$

Поле внутри j -о однородного кольца диэлектрика будем искать в виде разложения в ряд:

$$\Psi_{1j} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[C_{(2j-2)m} J_m(k\sqrt{\varepsilon_j} r) + C_{(2j-1)m} Y_m(k\sqrt{\varepsilon_j} r) \right] \cos m\varphi, \quad (7)$$

$$r_{j-1} < r \leq r_j, \quad j = \overline{2, N}$$

где $r_N = R$.

Поле вне диэлектрика также представим в виде ряда с неизвестными коэффициентами:

$$\Psi_2 = \Psi_0 + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{2Nm} H_m^{(2)}(kr) \cos m\varphi, \quad r > R. \quad (8)$$

Для случая ТЕ-поляризации (для ТМ-поляризации получаются аналогичные соотношения, и дополнительных трудностей не возникает) приравнивая поля и производные на границе r_j , получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \Psi_{1j}|_{r_j} = \Psi_{1(j+1)}|_{r_j} \\ \frac{\partial \Psi_{1j}}{\partial r}|_{r_j} = \frac{\partial \Psi_{1(j+1)}}{\partial r}|_{r_j} \end{cases}, \quad j = \overline{1, N-1}. \quad (9)$$

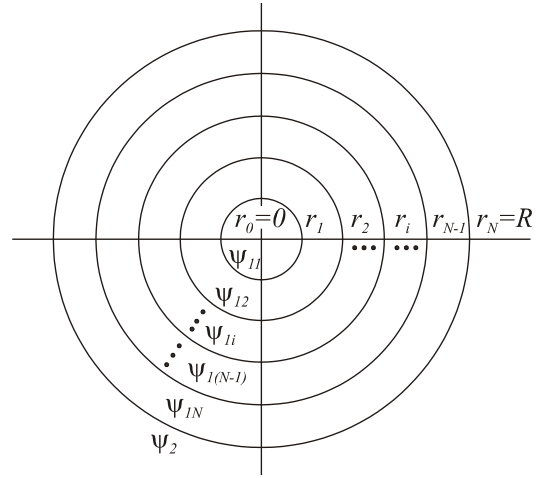


Рис. 2. Многослойный цилиндр круглого сечения с кольцевыми однородными слоями

При $j = 1$ с учетом (6) и (7) из системы (9) имеем:

$$\begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{1m} J_m(k\sqrt{\varepsilon_1} r_1) \cos m\varphi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[C_{2m} J_m(k\sqrt{\varepsilon_2} r_1) + C_{3m} Y_m(k\sqrt{\varepsilon_2} r_1) \right] \cos m\varphi \\ \sqrt{\varepsilon_1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{1m} J'_m(k\sqrt{\varepsilon_1} r_1) \cos m\varphi = \sqrt{\varepsilon_2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[C_{2m} J'_m(k\sqrt{\varepsilon_2} r_1) + C_{3m} Y'_m(k\sqrt{\varepsilon_2} r_1) \right] \cos m\varphi \end{cases}. \quad (10)$$

При $j = \overline{2, N-1}$ с учетом (7) из системы (9) имеем:

$$\begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[C_{(2j-2)m} J_m(k\sqrt{\varepsilon_j} r_j) + C_{(2j-1)m} Y_m(k\sqrt{\varepsilon_j} r_j) \right] \cos m\varphi = \\ = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[C_{2jm} J_m(k\sqrt{\varepsilon_{j+1}} r_j) + C_{(2j+1)m} Y_m(k\sqrt{\varepsilon_{j+1}} r_j) \right] \cos m\varphi \\ \sqrt{\varepsilon_j} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[C_{(2j-2)m} J'_m(k\sqrt{\varepsilon_j} r_j) + C_{(2j-1)m} Y'_m(k\sqrt{\varepsilon_j} r_j) \right] \cos m\varphi = \\ = \sqrt{\varepsilon_{j+1}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[C_{2jm} J'_m(k\sqrt{\varepsilon_{j+1}} r_j) + C_{(2j+1)m} Y'_m(k\sqrt{\varepsilon_{j+1}} r_j) \right] \cos m\varphi. \end{cases} \quad (11)$$

При $j = N$ с учетом (7) и (8) из системы (9) имеем:

$$\begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[C_{(2N-2)m} J_m(k\sqrt{\varepsilon_N} r_N) + C_{(2N-1)m} Y_m(k\sqrt{\varepsilon_N} r_N) \right] \cos m\varphi = \\ = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m J_m(kr_N) \cos m\varphi + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{2Nm} H_m^{(2)}(kr_N) \cos m\varphi \\ \sqrt{\varepsilon_N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[C_{(2N-2)m} J'_m(k\sqrt{\varepsilon_N} r_N) + C_{(2N-1)m} Y'_m(k\sqrt{\varepsilon_N} r_N) \right] \cos m\varphi = \\ = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-i)^m J'_m(kr_N) \cos m\varphi + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{2Nm} H_m^{(2)}(kr_N) \cos m\varphi \end{cases}. \quad (12)$$

Таким образом, системы (10), (11), (12) образуют одну общую систему из $2N$ уравнений относительно неизвестных коэффициентов C_k , $k = \overline{1, 2N}$. Матрица этой системы принимает вид:

$$\begin{pmatrix}
J_m(k\sqrt{\varepsilon_1}r_1) & -J_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_1) & -Y_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_1) & 0 & \\
J'_m(k\sqrt{\varepsilon_1}r_1)\sqrt{\varepsilon_1} & -J'_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_1)\sqrt{\varepsilon_2} & -Y'_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_1)\sqrt{\varepsilon_2} & 0 & \\
0 & J_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_2) & Y_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_2) & -J_m(k\sqrt{\varepsilon_3}r_2) & -Y_m(k\sqrt{\varepsilon_3}r_2) \\
0 & J'_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_2)\sqrt{\varepsilon_2} & Y'_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_2)\sqrt{\varepsilon_2} & -J'_m(k\sqrt{\varepsilon_3}r_2)\sqrt{\varepsilon_3} & -Y'_m(k\sqrt{\varepsilon_3}r_2)\sqrt{\varepsilon_3} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
J_m(k\sqrt{\varepsilon_j}r_j) & Y_m(k\sqrt{\varepsilon_j}r_j) & -J_m(k\sqrt{\varepsilon_{j+1}}r_j) & -Y_m(k\sqrt{\varepsilon_{j+1}}r_j) & \\
J'_m(k\sqrt{\varepsilon_j}r_j)\sqrt{\varepsilon_j} & Y'_m(k\sqrt{\varepsilon_j}r_j)\sqrt{\varepsilon_j} & -J'_m(k\sqrt{\varepsilon_{j+1}}r_j)\sqrt{\varepsilon_{j+1}} & -Y'_m(k\sqrt{\varepsilon_{j+1}}r_j)\sqrt{\varepsilon_{j+1}} & \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\
J_m(k\sqrt{\varepsilon_{N-1}}r_{N-1}) & Y_m(k\sqrt{\varepsilon_{N-1}}r_{N-1}) & -J_m(k\sqrt{\varepsilon_N}r_{N-1}) & -Y_m(k\sqrt{\varepsilon_N}r_{N-1}) & \\
J'_m(k\sqrt{\varepsilon_{N-1}}r_{N-1})\sqrt{\varepsilon_{N-1}} & Y'_m(k\sqrt{\varepsilon_{N-1}}r_{N-1})\sqrt{\varepsilon_{N-1}} & -J'_m(k\sqrt{\varepsilon_N}r_{N-1})\sqrt{\varepsilon_N} & -Y'_m(k\sqrt{\varepsilon_N}r_{N-1})\sqrt{\varepsilon_N} & \\
0 & J_m(k\sqrt{\varepsilon_N}r_N) & Y_m(k\sqrt{\varepsilon_N}r_N) & -H_m^{(2)}(kr_N) & \\
0 & J'_m(k\sqrt{\varepsilon_N}r_N)\sqrt{\varepsilon_N} & Y'_m(k\sqrt{\varepsilon_N}r_N)\sqrt{\varepsilon_N} & -H_m^{(2)}(kr_N) &
\end{pmatrix} \quad (13)$$

Система уравнений решается для m -го коэффициента разложения в ряд по цилиндрическим функциям. Полученные коэффициенты подставляются затем в уравнения (6), (7), (8).

Для случая двухслойного цилиндра (рис. 3) уравнения (6), (7), (8) преобразуются к виду:

$$\Psi_{11} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{1m} J_m(k\sqrt{\varepsilon_1}r) \cos m\varphi, \quad 0 \leq r \leq r_1, \quad (14)$$

$$\Psi_{12} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[C_{2m} J_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r) + C_{3m} Y_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r) \right] \cos m\varphi, \quad r_1 < r \leq r_2, \quad (15)$$

$$\Psi_2 = \Psi_0 + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{4m} H_m^{(2)}(kr) \cos m\varphi, \quad r > r_2. \quad (16)$$

Рассуждая аналогичным образом, как и в предыдущем параграфе, приходим к системе из четырех линейных алгебраических уравнений, решение которой можно получить аналитически:

$$\begin{aligned}
C_{1m} &= \frac{(-i)^m \sqrt{\varepsilon_2} \left(J_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_1) Y'_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_1) - J'_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_1) Y_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_1) \right) \left(H_m^{(2)}(kr_2) J_m(kr_2) - H_m^{(2)}(kr_2) J'_m(kr_2) \right)}{\Delta}, \\
C_{2m} &= \frac{(-i)^m \left(Y_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_1) J'_m(k\sqrt{\varepsilon_1}r_1)\sqrt{\varepsilon_1} - Y'_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_1)\sqrt{\varepsilon_2} J_m(k\sqrt{\varepsilon_1}r_1) \right) \left(H_m^{(2)}(kr_2) J'_m(kr_2) - H_m^{(2)}(kr_2) J_m(kr_2) \right)}{\Delta}, \\
C_{3m} &= \frac{(-i)^m \left(J'_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_1)\sqrt{\varepsilon_2} J_m(k\sqrt{\varepsilon_1}r_1) - J_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_1) J'_m(k\sqrt{\varepsilon_1}r_1)\sqrt{\varepsilon_1} \right) \left(H_m^{(2)}(kr_2) J'_m(kr_2) - H_m^{(2)}(kr_2) J_m(kr_2) \right)}{\Delta}, \\
C_{4m} &=
\end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
&= (-i)^m \left[\left(Y_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_1) J'_m(k\sqrt{\varepsilon_1}r_1)\sqrt{\varepsilon_1} - Y'_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_1)\sqrt{\varepsilon_2} J_m(k\sqrt{\varepsilon_1}r_1) \right) \left(J_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_2) J'_m(kr_2) - J'_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_2)\sqrt{\varepsilon_2} J_m(kr_2) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(J'_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_1)\sqrt{\varepsilon_2} J_m(k\sqrt{\varepsilon_1}r_1) - J_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_1) J'_m(k\sqrt{\varepsilon_1}r_1)\sqrt{\varepsilon_1} \right) \left(Y_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_2) J'_m(kr_2) - Y'_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_2)\sqrt{\varepsilon_2} J_m(kr_2) \right) \right] / \Delta
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left(Y_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_1) J'_m(k\sqrt{\varepsilon_1}r_1)\sqrt{\varepsilon_1} - Y'_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_1)\sqrt{\varepsilon_2} J_m(k\sqrt{\varepsilon_1}r_1) \right) \left(J'_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_2)\sqrt{\varepsilon_2} H_m^{(2)}(kr_2) - J_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_2) H_m^{(2)}(kr_2) \right) + \\
&\quad + \left(J'_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_1)\sqrt{\varepsilon_2} J_m(k\sqrt{\varepsilon_1}r_1) - J_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_1) J'_m(k\sqrt{\varepsilon_1}r_1)\sqrt{\varepsilon_1} \right) \left(Y'_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_2)\sqrt{\varepsilon_2} H_m^{(2)}(kr_2) - Y_m(k\sqrt{\varepsilon_2}r_2) H_m^{(2)}(kr_2) \right)
\end{aligned} \quad (18)$$

Полученные коэффициенты (17) подставляются в уравнения (14), (15), (16).

3. Численные примеры

Проведен ряд численных экспериментов по сравнению аналитического метода для многослойного цилиндра и метода решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода [11], которые показали, что последний метод позволяет рассчитывать дифракцию на кусочно-однородных объектах. Далее представлен следующий численный пример для расчета поля дифракции плоской ТЕ-поляризованной волны на двухслойном диэлектрическом цилиндре с параметрами: $r_1 = 0,25$ мкм, $r_2 = 0,5$ мкм, $\epsilon_1 = 0,25$, $\epsilon_2 = 4$, $\lambda = 1$ мкм. На рис. 4 (а) показано двумерное распределение интенсивности (квадрат модуля проекции на ось z вектора напряженности электрического поля) в плоскости сечения двухслойного круглого цилиндра (негатив), рассчитанное по аналитическим формулам (14)-(18), а на на рис.4 (б) показано сравнение распределений интенсивности вдоль линии, отмеченной черной чертой на рис. 4а (вдоль оси x), рассчитанных с помощью аналитических формул (14)-(18) (черная кривая) и метода конечных элементов [11] (серая кривая).

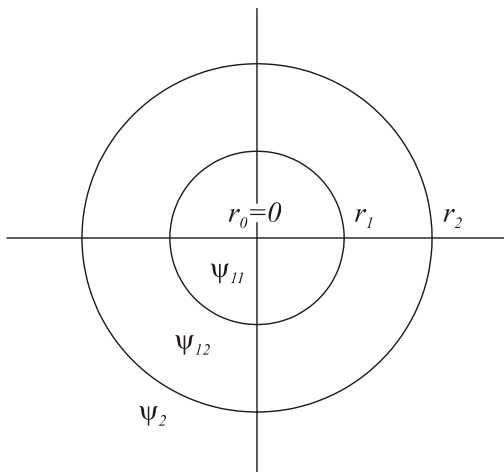


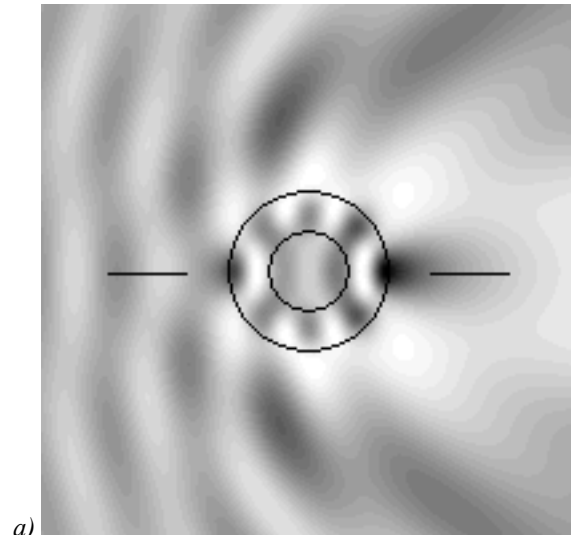
Рис. 3. Двухслойный цилиндр

Результаты, полученные с помощью метода конечных элементов, отличаются при заданных параметрах от результатов аналитического метода приблизительно на 5%.

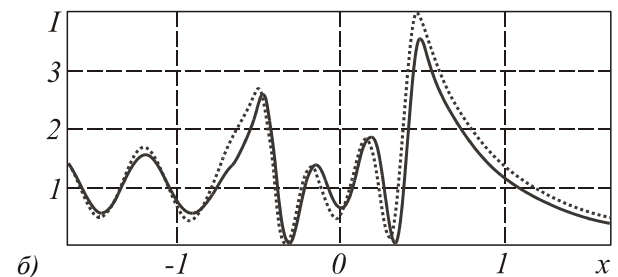
На рис. 5 приведены распределения интенсивности электрического поля при дифракции плоской ТЕ-поляризованной волны (падающей слева) на круглом двухслойном бесконечном цилиндре при разных радиусах r_1 и диэлектрических проницаемостях ϵ_1 внутреннего цилиндра, но при постоянном радиусе ($r_2 = 0,5$; $\lambda = 0,5$ мкм) и диэлектрической проницаемости ($\epsilon_2 = 4$) внешнего цилиндра.

На рис. 5а-рис. 5к меняется радиус внутреннего цилиндра (он растет от 0,05 мкм на рис. 5 (а) до 0,5 мкм на рис. 5к), а диэлектрическая проницаемость внутреннего и внешнего цилиндров остается неизменной (2,25 и 4). Из рис. 5 (а – к) видно, что:

- 1) максимальное значение интенсивности находится либо на поверхности внешнего цилиндра в максимально удаленной точке от падающего пучка (рис. 5 (а – д) и рис. 5 (з - к), либо в двух точках внутри внешнего цилиндра, симметрично расположенных относительно максимально удаленной точки от падающего пучка (рис. 5 е - ж);
- 2) цилиндр с большей проницаемостью (рис. 5а) рассеивает свет под большим углом, чем цилиндр с меньшей проницаемостью (рис. 5к).



а)



б)

Рис. 4. Дифракция плоской ТЕ-поляризованной электромагнитной волны на двухслойном диэлектрическом цилиндре: а) 2D распределение интенсивности; б) сечение интенсивности по оси X , точечная кривая – МКЭ, черная кривая – аналитический метод.

На рис.5 (л - п) меняется диэлектрическая проницаемость внутреннего цилиндра (она растет от 1 на рис. 5 (л) до 6 на рис.5 (п), радиус внутреннего кольца не меняется $r_1 = 0,25$ мкм..

Из рис. 5 (л - п) видно, что максимальное значение интенсивности с ростом диэлектрической проницаемости «втягивается» внутрь внешнего цилиндра. Если продолжить увеличение диэлектрической проницаемости внутреннего цилиндра, то, начиная с $\epsilon_1 = 8$, максимальное значение интенсивности электрического поля будет уже находиться на поверхности не внешнего цилиндра, а внутреннего.

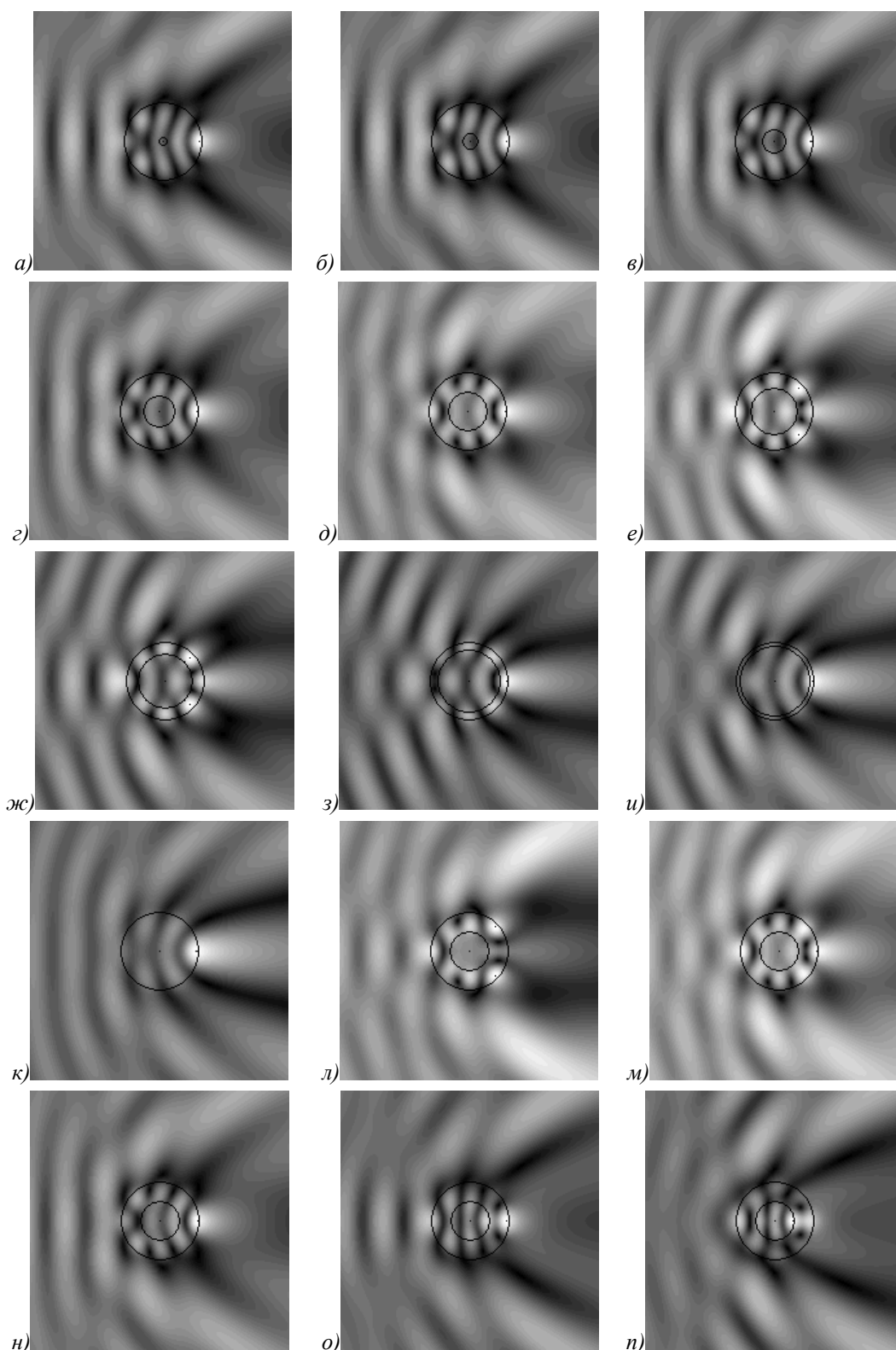


Рис.5 Распределения интенсивности поля дифракции плоской ТЕ-волны на двухслойном круглом цилиндре (r_1 – радиус внутреннего цилиндра, $r_2 = 0,5$; $\lambda = 0,5$ мкм – радиус внешнего цилиндра, ϵ_1 и $\epsilon_2 = 4$ – диэлектрические проницаемости внутреннего и внешнего цилиндров):

а) $r_1 = 0,05 \lambda$, $\epsilon_1 = 2,25$; б) $r_1 = 0,1 \lambda$, $\epsilon_1 = 2,25$; в) $r_1 = 0,15 \lambda$, $\epsilon_1 = 2,25$;
 г) $r_1 = 0,2 \lambda$, $\epsilon_1 = 2,25$; д) $r_1 = 0,25 \lambda$, $\epsilon_1 = 2,25$; е) $r_1 = 0,3 \lambda$, $\epsilon_1 = 2,25$;
 ж) $r_1 = 0,35 \lambda$, $\epsilon_1 = 2,25$; з) $r_1 = 0,4 \lambda$, $\epsilon_1 = 2,25$; и) $r_1 = 0,45 \lambda$, $\epsilon_1 = 2,25$;
 к) $r_1 = 0,5 \lambda$, $\epsilon_1 = 2,25$; л) $r_1 = 0,25 \lambda$, $\epsilon_1 = 1$; м) $r_1 = 0,25 \lambda$, $\epsilon_1 = 2$;
 н) $r_1 = 0,25 \lambda$, $\epsilon_1 = 3$; о) $r_1 = 0,25 \lambda$, $\epsilon_1 = 5$; п) $r_1 = 0,25 \lambda$, $\epsilon_1 = 6$.

5. Заключение

В работе предложены две новые разновидности модового подхода для решения задач дифракции электромагнитной волны на диэлектрических цилиндрических объектах. Первый метод применим для расчета поля дифракции на однородных диэлектрических цилиндрах с сечением произвольной формы. Второй метод применим к расчету дифракции на многослойных диэлектрических цилиндрах с круглой формой сечения, причем в каждом кольцевом слое цилиндра имеется однородный диэлектрик. Оба метода сводят задачу дифракции к решению линейной системы алгебраических уравнений, размерность которой определяется числом неизвестных коэффициентов в конечных суммах, состоящих из цилиндрических функций, которыми на практике заменяются бесконечные ряды. Для двухслойного цилиндра получены аналитические формулы, которые проверены с помощью сравнения с результатами расчета по методу конечных элементов.

Литература

1. Krauss T.F., De La Rue R.M. Photonic crystal in the optical regime – past, present and future. // *Progress in Quantum Electronics*, v. 23, p.51-96 (1999).
2. Tanaka M., Tanaka K. Computer simulation for two-dimensional near-field optics with use of a metal-coated dielectric probe. // *J. Opt. Soc. Am. A*, v.18, no.4, p.919-925 (2001).
3. Chien D.N., Tanaka M., Tanaka K. Numerical simulation of an arbitrarily ended asymmetrical slab waveguide by guided-mode extracted integral equations. // *J. Opt. Soc. Am. A*, v.19, no.8, p.1649-1657 (2002).
4. Garces-Chavez V., McGloin D., Melville H., Sibbett W., Dholakia K. Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam. // *Nature*, v.419 (September), p.145-147 (2002).
5. Daleiden J., Chitica N., Strassner M. et al. Tunable InP/air gap Fabry-Perot filter for wavelength division multiplex fiber optical transmission. // *Proceedings of the 11-th Int. Conf. on InP and related Materials*, ISBN 0-7803-5562-8, p.285-287 (1999).
6. Soller B.J., Hall D.G. Energy transfer at optical frequencies to silicon-based waveguiding structures. // *J. Opt. Soc. Am. A*, v.18, no.10, p.2577-2584 (2001).
7. Mirotznik M., Prather D., Mait J. A hybrid finite element-boundary element method for the analysis of diffractive elements. // *J. of Modern Optics*, v.43, no.7, p.1309-1321 (1996).
8. Kotlyar V.V., Nesterenko D.V. A finite element method in the problem of light diffraction by micro-optics. // *Optical Memory and Neural Networks*, v.9, no.3, p.209-219 (2000).
9. Prather D.W., Mirotznik M.S., Mait J. Boundary integral methods applied to the analysis of diffractive optical elements. // *J. Opt. Soc. Am. A*, v.14, p.34-43 (1997).
10. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. М.: Высшая школа, 1991.
11. Котляр В.В., Личманов М.А. Анализ дифракции света на микрообъектах с помощью решения интегрального уравнения методом конечных элементов // *Компьютерная оптика*, вып.21, с.19-22 (2001).
12. Prather D.W., Shi S. Formulation and application of the finite-difference time-domain method for the analysis of axially symmetric diffractive optical elements. // *J. Opt. Soc. Am. A*, v.16, no.5, p.1131-1142 (1999).
13. Головашкин Д.Л., Соيفер В.А. Анализ электромагнитного излучения, прошедшего через дифракционную линзу // *Автометрия*. Вып.6. С. 119-121 (1999).
14. Gruzdev V., Gruzdeva A. Finite-difference time-domain modeling of laser beam propagation and scattering in dielectric material. // *Proceedings of SPIE*, v.4436, p.27-38. (2001).
15. Ваганов Р.Б., Кацанеденбаум Б.З. Принципы теории дифракции. М.: Наука, 1982.

Electromagnetic wave diffraction on infinite circular cylinder with homogeneous layers

V.V. Kotlyar^{1,2}, M.A. Lichmanov²

¹ Image Processing Systems Institute of RAS

² Samara State Aerospace University

Abstract

The article considers a method for calculating the intensity distribution for the diffraction of a TE and TM polarized plane wave by a dielectric homogeneous cylinder with an arbitrary sectional shape. The method is based on expanding the field inside and outside the cylinder into the series of cylindrical functions being the specific solutions of the Helmholtz equation. The coefficients of the series are calculated based on the coupling conditions of the external and internal fields at the boundary of the cylindrical object. The work also proposes a field calculation method for the case of a plane wave diffraction by a multilayer dielectric cylinder with a circular cross section. When the cylinder has more than two homogeneous layers, the problem is reduced to solving a linear system of algebraic equations; when the cylinder has only two layers, analytical relations are obtained for the field. A numerical example of calculating the intensity distribution for the diffraction of a plane TE wave by a two-layer dielectric cylinder is given: the calculation was performed by two methods: by the finite element method and by the analytical formulas derived.

Keywords: wave diffraction, circular cylinder, homogeneous layer, Helmholtz equation, TE wave, polarized plane.

Citation: Kotlyar VV, Lichmanov MA. Electromagnetic wave diffraction on infinite circular cylinder with homogeneous layers. *Computer Optics* 2002; 24: 26-32.

References

- [1] Krauss TF, De La Rue RM. Photonic crystal in the optical regime – past, present and future. *Prog Quantum Electron* 1999; 23: 51-96.
- [2] Tanaka M, Tanaka K. Computer simulation for two-dimensional near-field optics with use of a metal-coated dielectric probe. *J Opt Soc Am A* 2001; 18(4): 919-925.
- [3] Chien DN, Tanaka M, Tanaka K. Numerical simulation of an arbitrarily ended asymmetrical slab waveguide by guided-mode extracted integral equations. *J Opt Soc Am A* 2002; 19(8): 1649-1657.
- [4] Garces-Chavez V, McGloin D, Melville H, Sibbett W, Dholakia K. Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam. *Nature* 2002; 419(September): 145-147.
- [5] Daleiden J, Chitica N, Strassner M, et al. Tunable InP/air gap Fabry-Perot filter for wavelength division multiplex fiber optical transmission. *Proc 11th Int Conf on InP and related Materials* 1999: 285-287.
- [6] Soller BJ, Hall DG. Energy transfer at optical frequencies to silicon-based waveguiding structures. *J Opt Soc Am A* 2001; 18(10): 2577-2584.
- [7] Mirotznik M, Prather D, Mait J. A hybrid finite element-boundary element method for the analysis of diffractive elements. *J Mod Opt* 1996; 43(7): 1309-1321.
- [8] Kotlyar VV, Nesterenko DV. A finite element method in the problem of light diffraction by micro-optics. *Optical Memory and Neural Networks* 2000; 9(3): 209-219.
- [9] Prather DW, Mirotznik MS, Mait J. Boundary integral methods applied to the analysis of diffractive optical elements. *J Opt Soc Am A* 1997; 14: 34-43.
- [10] Ilyinsky AS, Kravtsov VV, Sveshnikov AG. Mathematical models of electrodynamics [In Russian]. Moscow: "Vysshaya Shkola" Publisher; 1991.
- [11] Kotlyar VV, Lichmanov MA. Analysis of light diffraction by microoptics elements using the integral equation solution by the finite element method [In Russian]. *Computer Optics* 2001; 21: 19-22.
- [12] Prather DW, Shi S. Formulation and application of the finite-difference time-domain method for the analysis of axially symmetric diffractive optical elements. *J Opt Soc Am A* 1999; 16(5): 1131-1142.
- [13] Golovashkin DL, Soifer VA. Analysis of electromagnetic radiation transmission through a diffractive lens [In Russian]. *Avtometriya* 1999; 6: 119-121.
- [14] Gruzdev V, Gruzdeva A. Finite-difference time-domain modeling of laser beam propagation and scattering in dielectric material. *Proc SPIE* 2001; 4436: 27-38.
- [15] Vaganov RB, Katsenelenbaum BZ. Principles of diffraction theory [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher; 1982.