

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ ПСЕВДОПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Досколович Л.Л., Харитонов С.И., Казанский Н.Л., Тулупова Е.А., Скуратов С.А.

Институт систем обработки изображений РАН, Самарский государственный аэрокосмический университет

## Аннотация

Данная работа посвящена решению скалярного волнового уравнения для случая, когда размер области составляет несколько сотен длин волн. Разработан асимптотический метод решения задачи дифракции произвольной скалярной волны на трехмерном слое, обладающем псевдопериодической зонной структурой.

## Введение

В общем случае решение задач дифракции представляет собой сложную математическую задачу и требует специальных численных методов и значительных вычислительных затрат [1]-[6]. Асимптотические методы относятся к категории аналитических методов и играют большую роль [1]-[5]. В ряде случаев они позволяют быстро и эффективно оценить результат, не прибегая к громоздким численным расчётам. Для развития асимптотических подходов для решения уравнений Максвелла целесообразно рассмотреть более простую задачу решения уравнения Гельмгольца. Асимптотические методы решения уравнения Гельмгольца представлены в работе [4]. Приближение геометрической оптики, в рамках которого решается уравнение Гельмгольца справедливо только в случае, когда диэлектрическая проницаемость меняется медленно. Во многих случаях, например, дифракции света на дифракционной решетке, период которой составляет несколько длин волн, это условие не выполняется. Для решения задач дифракции в случае, когда объект представляет периодическую структуру, обычно используется дифференциальный метод [8]. Однако этот метод нельзя применить для решения задачи дифракции на непериодических структурах, например, бинарной линзе Френеля. Асимптотические методы решения уравнения Гельмгольца в случае, когда объект представляет собой структуру со слабоизменяющимся пространственным периодом, были рассмотрены в работе [7]. Однако метод решения, изложенный в статье, не давал результатов по сравнению с использованием приближения геометрической оптики при расчёте поля в плоскости непосредственно прилегающей к оптическому элементу. В данной работе метод был модернизирован, и на его основе получен асимптотический метод решения трехмерной задачи расчёта поля на выходе дифракционного оптического элемента.

## 1. Метод локальной аппроксимации

В данной работе предлагается метод, основанный на представлении объекта в окрестности точки  $x_0$  псевдопериодической структуры дифракционной решеткой. Для расчета поля в окрестности произвольной точки  $x_0$  используется дифференциальный метод [8].

Рассмотрим дифракцию скалярного волнового поля на псевдопериодическом одномерном слое. В оптике этот случай описывает дифракцию волны, у которой вектор электрического поля лежит в плоскости

дифракционного оптического элемента (ДОЭ). ДОЭ предполагаем расположенным в области  $0 \leq z \leq a$ , где  $0$  и  $a$  минимальная и максимальная высота дифракционного микрорельефа. Рассмотрим вычисление волнового поля в окрестности произвольной точки  $x_0$ , расположенной на ДОЭ.

Волновое поле описывается уравнением Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon E = 0, \quad (1)$$

где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число,  $\lambda$  – длина волны.

В окрестности  $x_0$  распределение диэлектрической проницаемости описывается выражением

$$\varepsilon(x, z) = \sum_n \varepsilon^n(x_0) \exp\left[\frac{2\pi i n(x - x_0)}{d}\right], \quad (2)$$

где  $d$  – размер области, в которой производится аппроксимация.

Решение уравнения Гельмгольца в области ДОЭ, в области перед ДОЭ и в области за ДОЭ представим в виде

$$E(x, z) = \exp(ik\alpha x_0) \sum_n E^n(x_0, z) \exp[ik\alpha_n(x - x_0)] \quad (3)$$

$$E(x, z) = \exp(ik\alpha x_0) \sum_n I^n(x_0) \exp[ik\alpha_n(x - x_0) + ik\beta_n z] + \exp(ik\alpha x_0) \sum_n R^n(x_0) \exp[ik\alpha_n(x - x_0) - ik\beta_n z] \quad (4)$$

$$E(x, z) = \exp(ik\alpha x_0) \times \sum_n T^n(x_0) \exp[ik\alpha_n(x - x_0) + ik\beta_n z]. \quad (5)$$

Коэффициенты  $I_n$  определяются падающим пучком. Коэффициенты  $R_n$ ,  $T_n$  и функции  $E_n(x, z)$  подлежат определению:  $\alpha_m = \alpha + 2\pi i m/kd$ ,

$\beta_m = \sqrt{1 - \alpha_m^2}$ . Подставляя выражение (3) в (1) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций  $E_n(x, z)$ :

$$\frac{\partial^2 E^m(z)}{\partial z^2} + k^2 (\varepsilon_{m-1} - \alpha_l^2 \delta_l^m) E^l(z) = 0. \quad (6)$$

Решение системы дифференциальных уравнений и нахождение коэффициентов  $R_n$ ,  $T_n$  рассмотрено в приложении 1. Поле в точке  $x_0$  непосредственно за оптическим элементом имеет вид:

$$E(x, z) = \exp(ik\alpha x_0) \sum_n T^n(x_0) \exp[ik\beta_n a]. \quad (7)$$

Волновое поле на некотором расстоянии за оптическим элементом можно вычислить с помощью интеграла Кирхгофа ([1]–[2]). Предлагаемый подход позволяет вычислить поле от оптического элемента с большой апертурой.

## 2. Дифракция на оптическом элементе, обладающем зонной структурой

Рассмотрим дифракцию на ДОО, обладающем зонной структурой. В случае дифракционного оптического элемента распределение диэлектрической проницаемости описывается выражением

$$\varepsilon(x, z) = \sum_n g^n(z) \exp[ikng(x)], \quad (8)$$

где  $kg(x)$  – фазовая функция дифракционного оптического элемента. Границы зон определяются по формуле  $g(x_m) = m\lambda$ .

В этом случае

$$\varepsilon_n = \sum_m \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} g_m(x_0 + \xi) \times \exp(ikg(x_0 + \xi)m) \exp\left(-\frac{2\pi i \xi}{d}\right) d\xi. \quad (9)$$

Падающее поле имеет вид:

$$E(x) = K(x) \exp(ik\varphi(x)) \quad (10)$$

$$I_n = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} K(x_0 + \xi) \exp(ik(\varphi(x_0 + \xi) - \delta\xi)) \times \exp\left(-\frac{2\pi i n \xi}{d}\right) d\xi, \quad (11)$$

где  $\delta = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ ,  $K(x)$  – амплитуда падающей волны,

$\varphi(x)$  – эйконал падающей волны.

В случае, когда функция  $g(x)$  плавно изменяется, выражение для коэффициентов Фурье имеет вид:

$$\varepsilon_n = \sum_m \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} g_m(x_0) \exp(ikg(x_0)m) \times \exp\left(ik\left(\alpha\xi + \frac{\beta}{2}\xi^2\right)m\right) \exp(-i\omega_n \xi) d\xi, \quad (12)$$

где  $\omega_n = \frac{2\pi n}{kd}$ ,

$$I_n = \frac{K(x_0)}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \exp(ik(\varphi(x_0))) \times \exp\left(ik\frac{\mu}{2}\xi^2\right) \exp(-i\omega_n \xi) d\xi. \quad (13)$$

После элементарных преобразований выражение для коэффициентов Фурье имеет вид:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{d} \sum_m g_m(x_0) \exp(ikg(x_0)) \times \exp\left(-ik\left(\frac{\alpha m - \omega_n}{2\beta m}\right)^2\right) \times \quad (14)$$

$$\times \int_{-d/2}^{d/2} \exp\left(\frac{ik\beta m}{2}\left(\xi - \frac{\omega_n - \alpha m}{\beta m}\right)^2\right) d\xi,$$

$$I_n = \frac{K(x_0) \exp(ik\varphi(x_0))}{d} \exp\left(-ik\frac{\omega_n^2}{2\mu}\right) \times \int_{-d/2}^{d/2} \exp\left(ik\frac{\mu}{2}\left(\xi - \frac{\omega_n}{\mu}\right)^2\right) d\xi, \quad (15)$$

где  $\alpha = \frac{\partial g}{\partial x_0}$ ,  $\beta = \frac{\partial^2 g}{\partial x_0^2}$ ,  $\gamma = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ ,  $\mu = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2}$ .

При  $d = \lambda / \frac{\partial g}{\partial x_0}$  и  $\beta = 0$  приближенно можно положить

$$\varepsilon_n = g_m(x_0) \exp(ikg(x_0)m), \quad (16)$$

$$I_n = \exp(-ik\alpha x_0) K(x_0) \exp(ik\varphi(x_0)) \delta_n^0, \quad (17)$$

где  $\delta_n^0$  – символ Кронекера.

В этом случае поле на выходе дифракционного оптического элемента имеет вид:

$$E(x_0) = \sum_n T^n(x_0) \exp[ikng(x_0)]. \quad (18)$$

Это выражение совпадает с выражением, полученным в работе [7]. Оно приближенно описывает поле в случае, когда размер зоны на ДОО меняется слабо. В общем случае метод давал незначительные поправки по сравнению с использованием приближения геометрической оптики [4]. Тогда при расчете надо использовать для коэффициентов Фурье выражения (14), (15)

На рис. 1–3 представлены графики интенсивности поля в фокальной плоскости бинарной линзы Френеля, имеющей следующие параметры: апертура – 130 мкм, фокусное расстояние – 134 мкм, высота штрихов – 1 мкм, диэлектрическая проницаемость штрихов – 2.25, длина волны – 1 мкм, угол падения – 30°, диэлектрическая проницаемость перед линзой и за линзой – 1. Для расчета поля на рис. 1 был использован дифференциальный метод [8]. Для расчета поля на рис. 2 и 3 был использован метод локальной аппроксимации. Поле за ДОО рассчитывалось с использованием интеграла Кирхгофа. Отличие интенсивности в центре во всех рассмотренных случаях составляет несколько процентов, но при использовании метода локальной аппроксимации потребовалось значительно меньше ресурсов оперативной памяти и процессорного времени. Отсутствие высокочастотных биений на последних двух графиках объясняется фильтрующим свойством интеграла Кирхгофа.

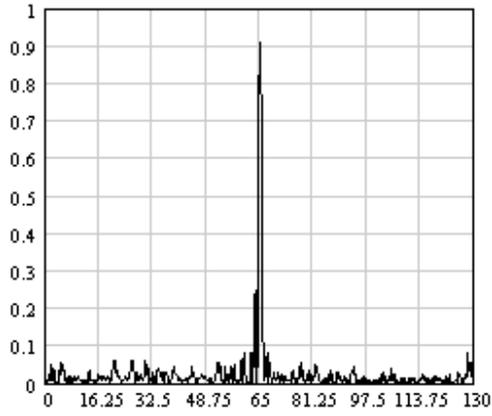


Рис. 1. Интенсивность в фокальной плоскости бинарной линзы, рассчитанная с использованием дифференциального метода, при числе учитываемых коэффициентов Фурье – 160

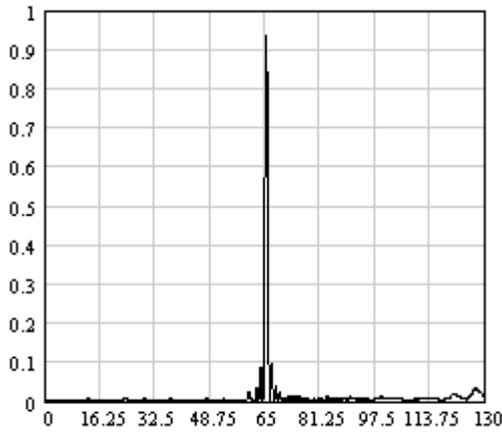


Рис. 2. Интенсивность в фокальной плоскости бинарной линзы, рассчитанная с использованием метода локальной аппроксимации при числе локальных периодов – 10 и коэффициентов Фурье 60 в каждом периоде

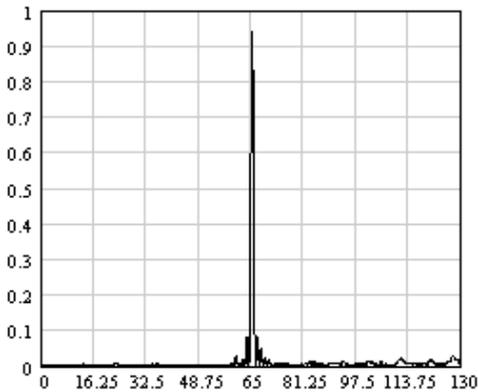


Рис. 3. Интенсивность в фокальной плоскости бинарной линзы, рассчитанная с использованием метода локальной аппроксимации при числе локальных периодов – 10 и коэффициентов Фурье 60 в каждом периоде.

### 3. Решение уравнения Гельмгольца в трёхмерном случае

Рассмотрим дифракцию скалярного на объекте, представляющем собой псевдопериодический объект. Предполагаем расположенным в области  $0 \leq x \leq a$ , где 0 и  $a$  – минимальная и максимальная высота слоя. Волновое поле описывается уравнением Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon E = 0. \quad (19)$$

В окрестности  $(x_0, y_0)$ , распределение проницаемости описывается выражением

$$\varepsilon(x, y, z) = \sum_n \varepsilon^n(x_0) \exp\left[\frac{2\pi i n_1 (x - x_0)}{d_1}\right] \times \exp\left[\frac{2\pi i n_2 (y - y_0)}{d_2}\right], \quad (20)$$

где  $d_1, d_2$  – периоды по различным осям.

Решение уравнения Гельмгольца в области ДОО, в области перед ДОО и в области за ДОО представим в виде:

$$E(x, y, z) = \exp(ik(\alpha x_0 + \beta y_0)) \sum_{n_1, n_2} E^{n_1 n_2}(x_0, y_0, z) \times \exp\left[ik(\alpha_{n_1}(x - x_0) + \beta_{n_2}(y - y_0))\right] \quad (21)$$

$$E(x, y, z) = \exp(ik(\alpha x_0 + \beta y_0)) \times \sum_{n_1, n_2} I^{n_1 n_2}(x_0, y_0) \times \exp\left[ik(\alpha_{n_1}(x - x_0) + \beta_{n_2}(y - y_0)) + ik\gamma_{n_1 n_2} z\right] + \exp(ik(\alpha x_0 + \beta y_0)) \times \sum_{n_1, n_2} R^{n_1 n_2}(x_0, y_0) \times \exp\left[ik(\alpha_{n_1}(x - x_0) + \beta_{n_2}(y - y_0)) - ik\gamma_{n_1 n_2} z\right] \quad (22)$$

$$E(x, y, z) = \exp(ik(\alpha x_0 + \beta y_0)) \sum_{n_1, n_2} T^{n_1 n_2}(x_0, y_0) \times \exp\left[ik(\alpha_{n_1}(x - x_0) + \beta_{n_2}(y - y_0)) + ik\gamma_{n_1 n_2} z\right]. \quad (23)$$

Коэффициенты  $I^{n_1 n_2}$  определяются падающим пучком. Коэффициенты  $R^{n_1 n_2}, T^{n_1 n_2}$  и функции  $E(x, y, z)$  подлежат определению.  $\alpha_m = \alpha + 2\pi i m / kd_1$ ,  $\beta_n = \beta + 2\pi i n / kd_2$ ,  $\gamma_{mn} = \sqrt{1 - \alpha_m^2 - \beta_n^2}$ .

Подставляя выражение (21) в (19), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций  $E^{m_1 m_2}(x, y, z)$

$$\frac{\partial^2 E^{m_1 m_2}(z)}{\partial z^2} + k^2 (\varepsilon_{m_1 - l_1 m_2 - l_2} - (\alpha_{l_1}^2 + \alpha_{l_2}^2) \delta_{l_1}^{m_1} \delta_{l_2}^{m_2}) E^{l_1 l_2}(z) = 0. \quad (24)$$

Решение системы уравнений аналогично решению системы в пункте 1.

Поле непосредственно за оптическим элементом

$$E(x, y, z) = \exp(ik(\alpha x_0 + \beta y_0)) \times \sum_{n_1, n_2} T^{n_1 n_2}(x_0, y_0) \exp(ik\gamma_{n_1 n_2} a). \quad (25)$$

Существует случай, когда дифракция на ДОО сводится к дифракции на одномерной решетке:

$$\varepsilon(x, y, z) = \sum_n \varepsilon^n(z) \exp \left[ 2\pi i n \left( \frac{x-x_0}{d_1} + \frac{y-y_0}{d_2} \right) \right]. \quad (26)$$

С помощью преобразования координат:

$$\begin{cases} x = x_0 + u \cos t - v \sin t, \\ y = y_0 + u \sin t + v \cos t. \end{cases} \quad (27)$$

Если угол равен  $t = -\arctg(d_1/d_2)$ ,

$$\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} = \frac{1}{d^2}.$$

Выражение для диэлектрической проницаемости представляется в виде:

$$\varepsilon(x, z) = \sum_n \varepsilon^n(z) \exp \left[ \frac{2\pi i n u}{d} \right]. \quad (28)$$

Выражение для поля имеет вид:

$$E(u, v, z) = \sum_{n,l} E^{nl}(z) \exp [ik(\alpha_n u + \beta_l v)], \quad (29)$$

$$\begin{aligned} E(u, v, z) = & \sum_{n,l} I^{nl}(z) \exp [ik(\alpha_n u + \beta_l v) + ik\gamma_{nl} z] + \\ & + \sum_{n,l} R^{nl}(z) \exp [ik(\alpha_n u + \beta_l v) - ik\gamma_{nl} z], \end{aligned} \quad (30)$$

$$E(u, v, z) = \sum_{n,l} T^{nl}(z) \exp [ik(\alpha_n u + \beta_l v) + ik\gamma_{nl} z], \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 E^{m,l}(z)}{\partial z^2} + k^2 (\varepsilon_{m-l} - (\alpha_l^2 + \alpha_l^2) \delta_l^{m,l}) E^{l,l}(z) = 0. \quad (32)$$

В этом случае все направления плоских волн, образующихся при дифракции плоской волны, лежат на конусе ось, которого совпадает с направлением линий дифракционной решетки. Коэффициенты отражения и пропускания находятся из системы линейных уравнений в Приложении 2.

#### 4. Дифракция на двумерных зонных структурах

Пусть волна с комплексной амплитудой  $E(x) = K(x, y) \exp(ik\varphi(x, y))$  падает на область с проницаемостью в виде:

$$\varepsilon(x, y, z) = \sum_n g^n(z) \exp[ikng(x, y)]. \quad (33)$$

Выберем систему координат таким образом, чтобы ось совпадала по направлению с градиентом функции  $g(x, y)$

$$\begin{cases} \vec{e}_u = \frac{\nabla g(x, y)}{\sqrt{(\nabla g(x, y))^2}}, \\ \vec{e}_v = \left( \vec{e}_z \times \vec{e}_u \right). \end{cases} \quad (34)$$

где  $\vec{e}_u, \vec{e}_v$  - базисные вектора новой системы координат. Преобразование координат имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Для дальнейших рассуждений разложим функцию  $g(x, y)$  в ряд Тейлора.

$$\begin{aligned} g(x, y) = & g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x_0}(x-x_0) + \frac{\partial g}{\partial y_0}(y-y_0) + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_0^2}(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial y_0^2}(y-y_0)^2 \right) + \\ & + \frac{\partial^2 g}{\partial x_0 \partial y_0}(x-x_0)(y-y_0). \end{aligned} \quad (37)$$

Пусть  $t = \arctg \left( \frac{\partial g}{\partial y_0} / \frac{\partial g}{\partial x_0} \right)$ . В этом случае функция  $g(x, y)$  в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} g(x, y) = & g(x_0, y_0) + \sqrt{(\nabla g(x_0, y_0))^2} u + \\ & + \frac{a(x_0, y_0) u^2}{2} + \frac{1}{2} (b(x_0, y_0) v^2 + 2c(x_0, y_0) uv). \end{aligned} \quad (38)$$

Выражения для коэффициентов приведены в Приложении 3.

Рассмотрим случай когда  $c=0$ , что соответствует переходу к случаю радиальной симметрии. В этом случае функция  $g(x, y)$  в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} g(x, y) = & g(x_0, y_0) + \sqrt{(\nabla g(x_0, y_0))^2} u + \\ & + \frac{1}{2} (a(x_0, y_0) u^2 + b(x_0, y_0) v^2). \end{aligned} \quad (39)$$

Выражение для Фурье коэффициентов проницаемости принимают вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n = & \sum_m g_m(x_0, y_0) \exp(ikg(x_0, y_0)) \times \\ & \times \exp \left( -ik \left( \frac{(hm - \omega_n)^2}{2am} \right) \right) \exp \left( -ik \frac{\omega_l^2}{2bm} \right) S_n F_l. \end{aligned} \quad (40)$$

$$S_n = \frac{1}{D_1} \int_{-D_1/2}^{D_1/2} \exp \left( \frac{ikam}{2} \left( \xi - \frac{\omega_n - hm}{am} \right)^2 \right) d\xi, \quad (41)$$

$$F_l = \frac{1}{D_2} \int_{-D_2/2}^{D_2/2} \exp \left( \frac{ikbm}{2} \left( \xi - \frac{\omega_n}{bm} \right)^2 \right) d\xi. \quad (42)$$

Рассмотрим случай, когда волновое число стремится к бесконечности ( $k \rightarrow \infty$ ), но  $kD_1 \rightarrow const$ ,  $kD_2 \rightarrow const$ . В этом случае  $F_l = 0$  для  $l \neq 0$  и отличны от нуля только  $\varepsilon_{n0}$ . В этом случае задача сводится к задаче конической дифракции, рассмотренной в пункте 3.

Рассмотрим теперь падающее поле. Падающее поле в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} E(u, v) = & K(x, y) \exp(ik\varphi(x, y)) = K \times \\ & \times \exp(ik\varphi(x_0 + u \cos t - v \sin t, y_0 + u \sin t + v \cos t)). \end{aligned} \quad (43)$$

Разложим функцию  $\varphi(x, y)$  в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  в ряд Тейлора:

$$\varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(b_1(x_0, y_0)v^2 + a_1(x_0, y_0)u^2 + 2c_1(x_0, y_0)uv), \quad (44)$$

где  $\varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) + eu + fv$ .

Выражения для коэффициентов приведены в Приложении 3.

Разложим функцию  $K \exp(ik\varphi(x, y))$  в квазипериодический ряд Фурье:

$$K \exp(ik\varphi(x, y)) = \sum_{n_1, n_2} I^{n_1, n_2} \exp\left[ik\left(\alpha_{n_1}u + \beta_{n_2}v\right) + ik\gamma_{n_1, n_2}z\right], \quad (45)$$

где

$$I^{n_1, n_2} = \frac{1}{D_1 D_2} \iint K(x_0, y_0) \times \exp\left[\frac{ik}{2}(b_1(x_0, y_0)v^2 + a_1(x_0, y_0)u^2 + 2c_1(x_0, y_0)uv)\right] \times \exp\left[-ik\left(\frac{2\pi n_1 u}{kD_1} + \frac{2\pi n_2 v}{kD_2}\right)\right] dudv, \\ \alpha_{n_1} = e + \frac{2\pi n_1}{kD_1}, \quad \beta_{n_2} = f + \frac{2\pi n_2}{kD_2}.$$

В качестве примера рассмотрим дифракцию радиально-симметричной скалярной волны на радиально-симметричном объекте. В этом случае разложения имеют вид:

$$g(x, y) = g(r_0) + \frac{\partial g(r_0)}{\partial r_0}u + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(r_0)}{\partial r_0^2}u^2 + \frac{1}{2r_0}\frac{\partial^2 g(r_0)}{\partial r_0^2}v^2 \quad (46)$$

$$\varphi(x, y) = \varphi_0(r_0) + \frac{\partial \varphi_0(r_0)}{\partial r_0}u + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi_0(r_0)}{\partial r_0^2}u^2 + \frac{1}{2r_0}\frac{\partial^2 \varphi_0(r_0)}{\partial r_0^2}v^2, \quad (47)$$

где  $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ .

Рассмотрим теперь асимптотический случай  $k \rightarrow \infty$ ,  $kD_1 \rightarrow const$ ,  $kD_2 \rightarrow const$ . В этом случае задача сводится к дифракции нескольких плоских волн на одномерной дифракционной решетке. Выражения для Фурье коэффициентов проницаемости и падающего поля имеют вид:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{D_1} \sum_m g_m(r_0) \exp(ikg(r_0)) \times \exp\left[-ik\left(\frac{(\alpha m - \omega_n)^2}{2\beta m}\right)\right] \times \int_{-D_1/2}^{D_1/2} \exp\left[\frac{ik\beta m}{2}\left(\xi - \frac{\omega_n - \alpha m}{\beta m}\right)^2\right] d\xi, \quad (48)$$

$$I_n = \frac{K(r_0) \exp(ik\varphi(r_0))}{D_1} \exp\left[-ik\frac{\omega_n^2}{2\mu}\right] \times \int_{-d/2}^{d/2} \exp\left[ik\frac{\mu}{2}\left(\xi - \frac{\omega_n}{\mu}\right)^2\right] d\xi, \quad (49)$$

где  $\alpha = \frac{\partial g}{\partial r_0}$ ,  $\beta = \frac{\partial^2 g}{\partial r_0^2}$ ,  $\gamma = \frac{\partial \varphi}{\partial r_0}$ ,  $\mu = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r_0^2}$ .

Используем формулы для расчета поля на одномерной дифракционной решетке, полученные в пункте 1, и, переходя от координат  $(u, v)$  к  $(x, y)$ , получаем поле непосредственно за слоем в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ . Поле на расстоянии от слоя можно получить, применяя метод Кирхгофа([1]-[3]). Полученные формулы имеют асимптотический характер. Достоинство данного подхода к расчету поля состоит в том, что удалось свести двумерную задачу дифракции свести к нескольким задачам дифракции на одномерной дифракционной решетке значительно меньшей размерности и вычислительной сложности. В результате появилась возможность рассчитывать поле от дифракционных оптических элементов, апертура которых составляет несколько тысяч длин волн. Это позволит рассчитывать характеристики оптических систем, содержащих дифракционные оптические элементы.

### Заключение

В работе предложен метод решения задачи дифракции в случае, когда объект представляет собой дифракционный оптический элемент, обладающий зонной структурой. Получено, что в случае, когда  $k \rightarrow \infty$  задача дифракции произвольной волны сводится к решению задачи конической дифракции на решетке. Это позволяет значительно уменьшить вычислительную сложность при численной реализации методов решения задач дифракции. Предложенный метод позволяет оценить параметры волнового поля без использования суперкомпьютеров.

В дальнейшем предполагается использовать аналогичный подход для решения задач в рамках векторной электромагнитной теории.

### Приложение 1

Решение уравнения имеет вид:

$$E^m = \sum_k (a^k \exp(ik\lambda_k z) + b^k \exp(-ik\lambda_k(z-a))) e_k^m,$$

где  $e_k$  и  $\lambda_k$  - собственные вектора и собственные числа матрицы  $(\varepsilon_{m-1} - \alpha_l^2 \delta_l^m) e_k = \lambda_k^2 e_k$ .

Поле внутри дифракционной решетки имеет вид:

$$E(x, z) = \exp(ika x_0) \sum_n (a_n \exp(ik\lambda_n z) + b_n \exp(-ik\lambda_n(z-a))) e_n^z \exp(ika_n(x-x_0)).$$

Коэффициенты отражения и пропускания находятся из системы линейных уравнений

$$\begin{aligned}
& \sum_k (\delta_k^n R^k(x_0) - e_k^n a^k - \\
& - e_k^n \exp(ik\lambda_k d) b^k + \delta_k^n T^k(x_0)) = -I^n(x_0), \\
& \sum_k (-\beta_n \delta_k^n R^k(x_0) - \lambda_k e_k^n a^k - \\
& - \lambda_k e_k^n \exp(ik\lambda_k d) b^k + \delta_k^n T^k(x_0)) = -\beta_n I^n(x_0), \\
& \sum_k (\delta_k^n R^k(x_0) + e_k^n \exp(ik\lambda_k d) a^k + e_k^n b^k - \\
& - \delta_k^n \exp(ik\beta_k d) T^k(x_0)) = 0, \\
& \sum_k (\delta_k^n R^k(x_0) + \lambda_k e_k^n \exp(ik\lambda_k d) a^k - \\
& - \lambda_k e_k^n b^k - \beta_k \exp(ik\beta_k d) \delta_k^n T^k(x_0)) = 0.
\end{aligned}$$

### Приложение 2

$$\begin{aligned}
& \sum_k (\delta_k^n R^{kl} - e_k^{nl} a^k - \\
& - e_{kl}^n \exp(ik\lambda_{kl} a) b^{kl} + \delta_k^n T^{kl}) = -I^{nl}, \\
& \sum_k (-\beta_{nl} \delta_{kl}^n R^{kl} - \lambda_{kl} e_{kl}^n a^{kl} - \\
& - \lambda_{kl} e_{kl}^n \exp(ik\lambda_{kl} a) b^{kl} + \delta_k^n T^{kl}) = -\beta_{nl} I^{nl}, \\
& \sum_k (\delta_k^n R^{kl} + e_{kl}^l \exp(ik\lambda_{kl} a) a^{kl} + \\
& + e_k^{nl} b^{kl} - \delta_k^n \exp(ik\beta_{kl} a) T^{kl}) = 0, \\
& \sum_k (0 \cdot \delta_k^n R^{kl} + \lambda_{kl} e_{kl}^n \exp(ik\lambda_{kl} a) a^k - \\
& - \lambda_{kl} e_{kl}^n b^{kl} - \beta_{kl} \exp(ik\beta_{kl} a) \delta_k^n T^{kl}) = 0.
\end{aligned}$$

Здесь суммирование по индексу  $l$  не производится, и система уравнений распадается на несколько систем уравнений меньшей размерности.

### Приложение 3

$$\begin{aligned}
a(x_0, y_0) &= \frac{\partial^2 g}{\partial x_0^2} \cos^2 t + \frac{\partial^2 g}{\partial y_0^2} \sin^2 t + \frac{\partial^2 g}{\partial x_0 \partial y_0} \sin 2t, \\
b(x_0, y_0) &= \frac{\partial^2 g}{\partial x_0^2} \sin^2 t + \frac{\partial^2 g}{\partial y_0^2} \cos^2 t - \frac{\partial^2 g}{\partial x_0 \partial y_0} \sin 2t,
\end{aligned}$$

$$c(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_0^2} \sin 2t + \frac{\partial^2 g}{\partial y_0^2} \sin 2t + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x_0 \partial y_0} \cos 2t,$$

$$e = \left( \frac{\partial g}{\partial x_0} \cos t + \frac{\partial g}{\partial y_0} \sin t \right),$$

$$f = \left( \frac{\partial g}{\partial y_0} \cos t - \frac{\partial g}{\partial x_0} \sin t \right),$$

$$a_1(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} \cos^2 2t + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_0^2} \sin^2 2t + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0 \partial y_0} \sin 2t,$$

$$b_1(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} \sin^2 t + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_0^2} \cos^2 t - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0 \partial y_0} \sin 2t,$$

$$c_1(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} \sin 2t + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_0^2} \sin 2t - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0 \partial y_0} \cos 2t.$$

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» («BRHE»), а также грантов РФФИ №№ 03-01-00109, 04-07-90149 и 04-01-96517.

### Литература

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики // Pergamon Press, 1986.
2. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. // Теория волн. М.: Наука, 1976.
3. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. // Математические модели электродинамики. М.: Высшая школа, 1991.
4. Кравцов В.В., Орлов А.А. // Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1979.
5. Федорюк М.В. Асимптотики, интегралы и ряды. // М.: Наука, 1987.
6. Golub M.A., Doskolovich L.L., Kazansky N.L., Kharitonov S.I., Soifer V.A. // Journal of Modern Optics. 1992. 39(6) 1245.
7. Досколович Л.Л., Харитонов С.И., Казанский Н.Л. // Асимптотические решения скалярного волнового уравнения.
8. Moharm M.G. Gaylord T.K. J.Opt. Sos. Am. A 3(11) 1986. 1780.

# Asymptotic solutions of the Helmholtz equation for pseudoperiodic structures

L.L. Doskolovich<sup>1,2</sup>, S.I. Kharitonov<sup>1,2</sup>, N.L. Kazanskiy<sup>1,2</sup>, E.A. Tulupova<sup>2</sup>, S.A. Skuratov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Image Processing Systems Institute of RAS

<sup>2</sup>Samara State Aerospace University (SSAU)

## Abstract:

This work is devoted to solving the scalar wave equation for the case when the size of the region is several hundred wavelengths. An asymptotic method is developed for solving the problem of diffraction of an arbitrary scalar wave on a three-dimensional layer with a pseudo-periodic band structure.

**Keywords:** Helmholtz equation, pseudoperiodic structure, scalar wave equation, pseudo-periodic band structure

**Acknowledgments:** This work was supported by the Russian – American program “Basic Research and Higher Education” (“BRHE”), as well as grants of the Russian Federal Property Fund No. 03-01-00109, 04-07-90149, and 04-01-96517.

**Citation:** Doskolovich LL, Kharitonov SI, Kazanskiy NL, Tulupova EA, Skuratov SA. Asymptotic solutions of the Helmholtz equation for pseudoperiodic structures. *Computer Optics* 2005; 27: 50-55.

## References:

- [1] Born M, Wolf E. Principles of optics: Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. 7th ed. Cambridge: Cambridge University Press; 1999. ISBN: 978-0-521-64222-4.
- [2] Vinogradova MB, Rudenko OV, Sukhorukov AP. Theory of waves [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher; 1976.
- [3] Ilyinsky AS, Kravtsov VV, Sveshnikov AG. Mathematical models of electrodynamics [In Russian]. Moscow: "Vysshaya Shkola" Publisher; 1991.
- [4] Kravtsov VV, Orlov AA. Geometric optics of inhomogeneous media [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher; 1979.
- [5] Fedoryuk MV. Asymptotics: Integrals and series [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher; 1987.
- [6] Golub MA, Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Soifer VA. Computer generated diffractive multi-focal lens. *J Mod Opt* 1992; 39(6): 1245-1251. DOI: 10.1080/713823549.
- [7] Doskolovich LL, Kharitonov SI, Kazanskiy NL. The asymptotic solution of the scalar wave equation [In Russian]. *Computer Optics* 2003; 25: 49-53.
- [8] Moharam MG, Gaylord TK. Rigorous coupled-wave analysis of metallic surface-relief gratings. *J Opt Soc Am A* 1986; 3(11): 1780-1787. DOI: 10.1364/JOSAA.3.001780.