РАСЧЕТ СИЛЫ ДАВЛЕНИЯ НЕПАРАКСИАЛЬНОГО ГАУССОВА ПУЧКА НА ОДНОРОДНЫЙ ЦИЛИНДР С КРУГЛЫМ СЕЧЕНИЕМ

Котляр В.В., Налимов А.Г.
Институт систем обработки изображений РАН,
Самарский государственный аэрокосмический университет

Аннотация

Рассмотрены силы, действующие со стороны на диэлектрический бесконечно протяженный цилиндр с произвольным и круглым сечением. Получены аналитические выражения для проекций вектора силы давления света на цилиндр с произвольным и круглым сечением. В частности, получены выражения для силы давления через коэффициенты разложения непараксиального гауссова пучка по цилиндрическим функциям. На численных примерах показан оптический «захват» цилиндра с круглым сечением двумя встречными или одним непараксиальным гауссовыми пучками.

Введение

Дифракция электромагнитной волны на однородной сфере может быть проанализирована в рамках теории Ми. Обобщение теории Лоренца - Ми на случай дифракции гауссова пучка и пучка произвольной формы рассмотрено в [1-3] и [4] соответственно. Строгий электромагнитный расчет силы давления на сферическую микрочастицу со стороны гауссова пучка с непараксиальностью 5-го порядка рассмотрен в [3, 5, 6]. При этом гауссовый пучок имел радиус перетяжки много больше, чем длина волны света. Более «острую» фокусировку гауссова пучка можно осуществить с помощью сферической линзы с высокой числовой апертурой, обладающей аберрациями. Расчету сил давления света на сферическую частицу, расположенную в фокусе линзы с аберрациями, посвящены работы [7, 8]. Однако расчет в [7, 8] был осуществлен для рэлеевских частиц, то есть с использованием теории рассеяния 2-го порядка. В [9, 10] рассмотрен строгий расчет сил, действующих на сферическую частицу произвольного радиуса, расположенную в фокусе сходящегося пучка со сферической аберрацией. Однако действие силы давления света рассмотрено только вдоль оптической оси. В [11, 12] проведено моделирование и строго рассчитаны силы, действующие на сферическую частицу, расположенную в фокусе сходящейся сферической волн. В [13, 14] приведено теоретическое и численное сравнение 3-х методов расчета силы давления света: геометрооптического, в приближении Рэлея и строгого. Аналитические выражения для силы давления света на сферическую частицу с керровской нелинейностью, расположенную в фокусе гауссова пучка, получены в [15]. В [16] рассмотрена передача углового момента от плоской электромагнитной волны с круговой поляризацией сферической частице. В [17, 18] приведены аналитические формулы для расчета полей дифракции непараксиального 2D гауссова пучка на круглый диэлектрический цилиндр.

В данной работе приведены аналитические выражения, и проведено численное моделирование для расчета сил давления света на диэлектрический цилиндр с круглым сечением, расположенный вблизи фокуса двумерного непараксиального гауссова пучка.

1. Сила давления света на микрообъект

В [19] приведена формула, выражающая сохранения полного импульса системы электромагнитного поля плюс объект V, ограниченный поверхностью S:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_1} P_i dV + \frac{\partial}{\partial t}P_{0i} = -\oint\limits_{S_1}\sigma_{ik} n_k dS \ , \qquad (1)$$

где P_i – координаты вектора импульса электромагнитного поля (V_1 и S_1 – объем и ограничивающая его поверхность, который включает объект $V \in V_1$), связанного с вектором Умова-Пойнтинга соотношением:

$$\vec{P} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right], \qquad (2)$$

P_{0i} – координаты вектора импульса объекта, $\frac{\partial P_{0i}}{\partial t}$ – координаты вектора силы давления света на объект;

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_1\left|\vec{E}\right|^2 + \left|\vec{H}\right|^2}{2}\delta_{ik}\right.$$

$$\left. - \varepsilon_1 E_i E_k - H_i H_k\right); \qquad (3)$$

σ_{ik} – максвелловский тензор напряжений электромагнитного поля ($\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$); $\vec{E}$, $\vec{H}$ – векторы напряженностей электрического и магнитных полей в вакууме, ε_1 – диэлектрическая проницаемость среды.

После усреднения по времени за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ монохроматического света:

$$\vec{E}(\vec{x},t) = Re\left\{\vec{E}(\vec{x})e^{i\omega t}\right\},$$

$$\vec{H}(\vec{x},t) = Re\left\{\vec{H}(\vec{x})e^{i\omega t}\right\} \qquad (4)$$

вместо уравнения (1) получим:

$$F_i = \left\langle\frac{\partial P_{0i}}{\partial t}\right\rangle = -\oint\left\langle\sigma_{ik}\right\rangle n_k dS \ , \qquad (5)$$

так как

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\int_V P_i dV \right\rangle = \int_V \left\langle \frac{\partial}{\partial t} P_i \right\rangle dV = 0 . \quad (6)$$

Для получения выражения для усредненного по времени тензора напряжений (3) учтем, что

$$\left\langle Re\left(E_i(\vec{x})e^{i\omega t}\right) Re\left(E_j(\vec{x})e^{i\omega t}\right)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2} Re\left[E_i(\vec{x})E_j^*(\vec{x})\right]. \quad (7)$$

Тогда, вместо (5), получим:

$$F_x = \frac{1}{8\pi}\oint_S \left\{ \frac{1}{2}\left[\varepsilon_1 |E_x|^2 + |H_x|^2 - \varepsilon_1 |E_y|^2 - \right.\right.$$

$$\left. - |H_y|^2 - \varepsilon_1 |E_z|^2 - |H_z|^2 \right] dS_x +$$

$$+ Re\left(\varepsilon_1 E_x E_y^* + H_x H_y^*\right) dS_y +$$

$$\left. + \mathrm{Re}\left(\varepsilon_1 E_x E_z^* + H_x H_z^*\right) dS_z \right\},$$

$$F_y = \frac{1}{8\pi}\oint_S \left\{ \frac{1}{2}\left[\varepsilon_1 |E_y|^2 + |H_y|^2 - \varepsilon_1 |E_x|^2 - \right.\right.$$

$$\left. - |H_x|^2 - \varepsilon_1 |E_z|^2 - |H_z|^2 \right] dS_y +$$

$$+ Re\left(\varepsilon_1 E_y E_z^* + H_y H_z^*\right) dS_z +$$

$$\left. + \mathrm{Re}\left(\varepsilon_1 E_y E_x^* + H_y H_x^*\right) dS_x \right\},$$

$$F_z = \frac{1}{8\pi}\oint_S \left\{ \frac{1}{2}\left[\varepsilon_1 |E_z|^2 + |H_z|^2 - \varepsilon_1 |E_x|^2 - \right.\right.$$

$$\left. - |H_x|^2 - \varepsilon_1 |E_y|^2 - |H_y|^2 \right] dS_z$$

$$+ Re\left(\varepsilon_1 E_z E_x^* + H_z H_x^*\right) dS_x +$$

$$\left. + \mathrm{Re}\left(\varepsilon_1 E_z E_y^* + H_z H_y^*\right) dS_y \right\}, \quad (8)$$

где $dS_x = -\frac{\partial z}{\partial x} dxdy$, $dS_y = \frac{\partial z}{\partial y} dxdy$, $dS_z = dxdy$, $E_1 = E_x$, $E_2 = E_y$, $E_3 = E_z$ (для H_i и F_i аналогично).

Перепишем выражения (8) для силы давления света на микрообъект в 2D случае в системе СИ. Для ТЕ-поляризации ($H_x = E_y = E_z = 0$) электрическое поле направлено вдоль оси *X*: $E_x \neq 0$, *Z* – оптическая ось, 2D-объект имеет вид цилиндра с произвольной формой сечения и имеет бесконечную протяженность вдоль оси *X*. Плоскость *YOZ* – плоскость падения света. В этом случае соотношение (8) примет вид:

$$F_x = 0$$

$$F_y = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \oint_{S_1} \left\{ \frac{1}{2}\left[|H_y|^2 - \varepsilon_1 |E_x|^2 - |H_z|^2 \right] dS_y + \right.$$

$$\left. + Re\left(H_y H_z^*\right) dS_z \right\}, \quad (9)$$

$$F_z = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \oint_{S_1} \left\{ \frac{1}{2}\left[|H_z|^2 - \varepsilon_1 |E_x|^2 - |H_y|^2 \right] dS_z + \right.$$

$$\left. + Re\left(H_z H_y^*\right) dS_y \right\}, \quad (10)$$

здесь S_1 уже контур, охватывающий сечение объекта в плоскости *YOZ*. Сила F_z – направлена вдоль оптической оси и является аналогом рассеивающей силы для рэлеевских частиц [7], а F_y - направлена поперек оптической оси и является аналогом градиентной силы [7].

Связь между проекциями H_y, H_z и E_x следует из уравнений Максвелла:

$$H_y = -\frac{i}{k}\frac{\partial E_x}{\partial z}, \; H_z = \frac{i}{k}\frac{\partial E_x}{\partial y}, \quad (11)$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число света с длиной волны λ. Аналогично (9) и (10) сила давления света с ТМ-поляризацией на 2D объект будет иметь следующие проекции ($E_x = H_y = H_z = 0$):

$$F_x = 0$$

$$F_y = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \oint_{S_1} \left\{ \frac{1}{2}\left[\varepsilon_1 |E_y|^2 - \varepsilon_1 |E_z|^2 - |H_x|^2 \right] dS_y + \right.$$

$$\left. + Re\left(\varepsilon_1 E_y E_z^*\right) dS_z \right\},$$

$$F_z = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \oint_{S_1} \left\{ \frac{1}{2}\left[\varepsilon_1 |E_z|^2 - \varepsilon_1 |E_y|^2 - |H_x|^2 \right] dS_z + \right.$$

$$\left. + Re\left(\varepsilon_1 E_z E_y^*\right) dS_y \right\}, \quad (12)$$

где (как и в уравнениях (9) и (10)) $dS_y = n_y dl = sin\,\varphi dl = dz$ и $dS_z = n_z dl = cos\,\varphi dl = dy$, dl – элемент дуги контура S_1.

2. Дифракция непараксиального гауссова пучка на 2D круглом однородном цилиндре

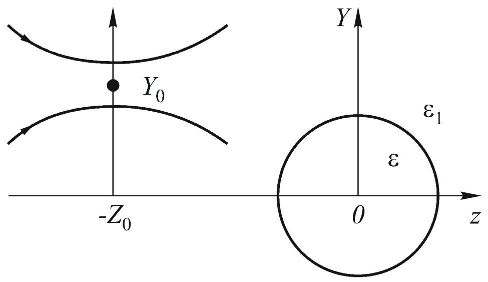


Рис. 1. Схема падения гауссова пучка с фокусом в точке (- Z_0, Y_0) на круглый цилиндр с центром в точке (0;0)

Следуя [18], рассмотрим дифракцию 2D непараксиального гауссова пучка на круглом однородном цилиндре (рис. 1). Для случая ТЕ-поляризации, когда (*Ex*, *Hy*, *Hz*) – отличны от нуля, напряженность электрического поля для непараксиального гауссова пучка можно записать в виде:

$$E_x(\rho,\varphi)=\frac{E_0\omega_0\sqrt{\pi}}{\lambda}\int\limits_{-\infty}^{\infty}exp\left[-\frac{k^2\omega_0^2q^2}{4}+ik\left(z_0p-y_0q\right)+ikr\,cos\left(\varphi-\gamma\right)\right]dq\;; \tag{13}$$

где $\gamma=arcsin\,q$, $p^2+q^2=1$, $p=cos\,\gamma$, $q=sin\,\gamma$.

Так как:

$$exp\left[ikr\,cos\left(\varphi-\gamma\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}i^nJ_n(kr)e^{in(\varphi-\gamma)}, \tag{14}$$

то получим разложение (13) в ряд по цилиндрическим гармоникам:

$$E_x\left(\rho,\varphi\right)=E_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}i^nC_nJ_n(kr)e^{in\varphi}, \tag{15}$$

$$C_n=\frac{\omega_0\sqrt{\pi}}{\lambda}\int\limits_{-\infty}^{\infty}exp\left[-\frac{k^2\omega_0^2q^2}{4}+\right.$$

$$\left.+ik\sqrt{1-q^2}\,z_0-ikqy_0-in\,arcsin\,q\right]dq\,. \tag{16}$$

Из уравнений Максвелла можно далее рассчитать напряженности магнитного поля:

$$\begin{cases} H_y=-\dfrac{i}{\omega\mu}\dfrac{\partial E_x}{\partial z},\\ H_z=\dfrac{i}{\omega\mu}\dfrac{\partial Ex}{\partial y}. \end{cases} \tag{17}$$

Перейдем к проекциям поля в полярных координатах:

$$\begin{cases} H_r=H_z\cos\varphi+H_y\sin\varphi,\\ H_\varphi=-H_z\sin\varphi+H_y\cos\varphi. \end{cases}. \tag{18}$$

Тогда для проекций магнитного поля получим:

$$H_\varphi(r,\varphi)=iH_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}i^nC_nJ_n'(kr)e^{in\varphi}, \tag{19}$$

где

$$J_n'(kr)=\frac{d}{d(kr)}J_n(kr),$$

$$H_0=\frac{kE_0}{\mu\omega},$$

$$H_r(r,\varphi)=H_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}i^nnC_n\frac{J_n(kr)}{kr}e^{in\varphi}\,. \tag{20}$$

Аналогично запишем разложения рассеянного $\vec{E}^S$, $\vec{H}^S$ и внутреннего $\vec{E}^\omega$, $\vec{H}^\omega$ электромагнитных полей по цилиндрическим функциям:

$$\begin{cases} E_x^\omega=E_0\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}i^nC_n^\omega J_n(k_1r)e^{in\varphi},\\ H_\varphi^\omega=iH_1\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}i^nC_n^\omega J_n'(k_1r)e^{in\varphi},\\ H_r^\omega=H_1\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}ni^nC_n^\omega\dfrac{J_n(k_1r)}{k_1r}e^{in\varphi}, \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} E_x^S=E_0\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}i^nC_n^SH_n^{(1)}(kr)e^{in\varphi},\\ H_\varphi^S=iH_0\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}i^nC_n^SH_n'^{(1)}(kr)e^{in\varphi},\\ H_r^S=H_0\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}ni^nC_n^S\dfrac{H_n^{(1)}(kr)}{kr}e^{in\varphi}, \end{cases} \tag{22}$$

где $H_1=\dfrac{E_0k_1}{\mu\omega}$, $k_1=k\sqrt{\varepsilon}$, ε – диэлектрическая проницаемость цилиндра. Граничные условия непрерывности тангенциальных составляющих поля на границе цилиндра имеют вид:

$$\begin{aligned} &E_x+E_x^S-E_x^\omega=0,\\ &H_\varphi+H_\varphi^S-H_\varphi^\omega=0. \end{aligned} \tag{23}$$

Подставляя в (23) выражение для полей (21), (22), а также (15), (19) и (20), получим систему для двух неизвестных из двух уравнений, из которой следует выражения для коэффициентов разложения в рядах (21) и (22):

$$C_n^S=a_nC_n^S,\; C_n^\omega=b_nC_n, \tag{24}$$

$$a_n=\left(k_1J_n'(k_1R)J_n(kR)-kJ_n(k_1R)J_n'(kR)\right)/$$
$$/\left(k_1J_n'(k_1R)H_n^{(1)}(kR)-kJ_n(k_1R)H_n'^{(1)}(kR)\right), \tag{25}$$

$$b_n=\left(kJ_n(kR)H_n'^{(1)}(kR)-kJ_n'(kR)H_n^{(1)}(kR)\right)/$$
$$/\left(k_1J_n'(k_1R)H_n^{(1)}(kR)-kJ_n(k_1R)H_n'^{(1)}(kR)\right). \tag{26}$$

Так как в уравнениях (25) и (26) цилиндрические функции входят в выражения в виде произведения, то $a_{-n}=a_n$ и $b_{-n}=b_n$. В выражения для силы (9) и (10) входят проекции поля в декартовых координатах. Мы же получили решения для полей в полярных координатах (15), (19), (20) - (22).

Поэтому перейдем от поля в полярных координатах к полю в декартовых координатах:

$$\begin{cases} E_x=E_x,\\ H_z=H_r\cos\varphi-H_\varphi\sin\varphi,\\ H_y=-H_r\sin\varphi+H_\varphi\cos\varphi. \end{cases}. \tag{27}$$

Тогда:

$$H_z(r,\varphi)=$$

$$=H_0\sum_n i^nC_ne^{in\varphi}\left\{\frac{n\,cos\,\varphi}{kr}\left[J_n(kr)+a_nH_n^{(1)}(kr)\right]-\right.$$
$$\left.-i\,sin\,\varphi\left[J_n(kr)+a_nH_n^{(1)}(kr)\right]\right\}, \tag{28}$$

$$H_y=H_0\sum_n i^nC_ne^{in\varphi}\left\{\frac{n\,sin\,\varphi}{kr}\left[J_n(kr)+a_nH_n^{(1)}(kr)\right]+\right.$$
$$\left.+i\,cos\,\varphi\left[J_n'(kr)+a_nH_n'^{(1)}(kr)\right]\right\}, \tag{29}$$

$$E_x(r,\varphi) = E_0 \sum_n i^n C_n e^{in\varphi} \cdot$$

$$\cdot \left[J_n(kr) + a_n H_n^{(1)}(kr) \right]. \tag{30}$$

Для компактности введем функции:

$$\phi_n^S = J_n(kr) + a_n H_n^{(1)}(kr), \tag{31}$$

$$\tilde{\phi}_n^S = J'_n(kr) + a_n H_n'^{(1)}(kr) = \phi_n'^S. \tag{32}$$

Тогда перепишем (28-30):

$$\begin{cases} H_z(r,\varphi) = H_0 \cdot \\ \cdot \sum_n i^n C_n e^{in\varphi} \left\{ \dfrac{n\cos\varphi}{kr} \phi_n(r) - i\sin\varphi \cdot \phi'_n(r) \right\} \\ H_y(r,\varphi) = H_0 \cdot \\ \cdot \sum_n i^n C_n e^{in\varphi} \left\{ \dfrac{n\sin\varphi}{kr} \phi_n(r) + i\sin\varphi \cdot \phi'_n(r) \right\} \\ E_x(r,\varphi) = E_0 \sum_n i^n C_n e^{in\varphi} \phi_n(r) \end{cases} \tag{33}$$

Подставив (33) в (27), можно получить аналитическое выражение для проекций силы, действующей на круглый однородный цилиндр, расположенный вблизи перетяжки непараксиального гауссова пучка. Для круглой частицы аналитическое выражение получено в [15].

Чтобы получить аналитическое выражение для силы давления света на диэлектрический цилиндр с круглым сечением, удобно использовать выражения в полярной (цилиндрической) системе координат.

Тогда, вместо (9) и (10), будем иметь:

$$F_r = \frac{R\varepsilon_0}{4} \int_0^{2\pi} \left[|H_r|^2 - |H_\varphi|^2 - \varepsilon_1 |E_x|^2 \right] d\varphi,$$

$$F_\varphi = \frac{R\varepsilon_0}{4} \int_0^{2\pi} Re\left(H_r H_\varphi^*\right) d\varphi, \tag{34}$$

где проекции векторов напряженности электрического и магнитного полей для ТЕ-поляризации H_r, H_φ и E_x вычисляются по формулам (15), (19), (20) и (22) для $R > R_0$, если R_0 – радиус круглого цилиндра:

$$E_x = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left[a_n H_n^{(1)}(k\sqrt{\varepsilon_1} r) + J_n(k\sqrt{\varepsilon_1} r) \right] e^{in\varphi},$$

$$H_r = H_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_n n}{k\sqrt{\varepsilon} r} \left[a_n H_n^{(1)}(k\sqrt{\varepsilon_1} r) + \right.$$

$$\left. + J_n(k\sqrt{\varepsilon_1} r) \right] e^{in\varphi},$$

$$H_\varphi = iH_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left[a_n H_n'^{(1)}(k\sqrt{\varepsilon_1} r) + \right.$$

$$\left. + J'_n(k\sqrt{\varepsilon_1} r) \right] e^{in\varphi}, \tag{35}$$

где a_n – находится из (25), но с учетом замены k на $k\sqrt{\varepsilon}$, а C_n – из (16), но с учетом замены $C_n = i^{-n} C_n$, ε_1 – диэлектрическая проницаемость среды.

Подставив (35) в (34), получим:

$$F_r = \frac{R\varepsilon_0}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \left\{ \left[\frac{H_0^2 n^2}{\left(k\sqrt{\varepsilon_1} R\right)^2} - \varepsilon_1 E_0^2 \right] |\phi_n(R)|^2 - \right.$$

$$\left. - H_0^2 |\phi'_n(R)|^2 \right\}, \tag{36}$$

$$F_\varphi = \frac{R\varepsilon_0 H_0^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n |C_n|^2 \, Im\left[\phi_n(R) \phi_n'^*(R) \right],$$

где $Im[...]$ – мнимая часть числа, а вместо (31) и (32) используем обозначения:

$$\phi_n(r) = a_n H_n^{(1)}\left(k\sqrt{\varepsilon_1} r\right) + J_n\left(k\sqrt{\varepsilon_1} r\right),$$

$$\phi'_n(r) = a_n H_n'^{(1)}\left(k\sqrt{\varepsilon_1} r\right) + J'_n\left(k\sqrt{\varepsilon_1} r\right), \tag{37}$$

$$J'_n(x) = \frac{dJ_n(x)}{dx}.$$

В системе СИ $H_0 = E_0 \sqrt{\varepsilon_1}$ ($\mu = 1$).

Так как выражение (36) должно выполняться при любом радиусе окружности $R > R_0$, по которой происходит суммирование в (34), R_0 – радиус круглого сечения диэлектрического цилиндра, то (36) должно выполняться и при $R \to \infty$.

Тогда первое уравнение в (36) можно переписать ($\mu = 1$):

$$F_r = -\frac{\sqrt{\varepsilon_1} \varepsilon_0 R E_0^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \cdot$$

$$\cdot \left(|\phi_n(R)|^2 + |\phi'_n(R)|^2 \right). \tag{38}$$

Далее перепишем (38), с помощью использования асимптотик для цилиндрических функций, при $x \to \infty$:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} \right),$$

$$H_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[-i\left(x - \frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \right], \tag{39}$$

а также используя рекуррентные соотношения для Z цилиндрических функций

$$Z'_n(x) = \frac{n}{x} Z_n(x) - Z_{n+1}(x). \tag{40}$$

Тогда, вместо (38), получим, что:

$$F_r = -\frac{\sqrt{\varepsilon_1} \varepsilon_0 E_0^2}{2\pi k} \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \left(2|a_n|^2 + 2|a_n| \cos(\arg a_n) + 1 \right), \tag{41}$$

где $arg\, a_n$ – аргумент комплексного числа a_n.

Проекция силы на радиальную координату F_r по сути является модулем вектора силы, то есть:

$$F_r = \sqrt{F_y^2 + F_z^2}.$$

Поэтому уравнение (41) дает только величину силы, а ее направление остается неизвестным. Найдем по отдельности проекции силы на оси *Y* и *Z* из уравнений (9) и (10) с учетом выражения (27). Тогда получим:

$$F_y = -\frac{\varepsilon_0 R}{4}\int\limits_0^{2\pi}\left[\left|H_\varphi\right|^2 sin\, 3\varphi + \varepsilon_1\left|E_z\right|^2 sin\, \varphi\right]d\varphi,$$

$$F_z = -\frac{\varepsilon_0 R}{4}\int\limits_0^{2\pi}\left|H_\varphi\right|^2 cos\, 3\varphi +$$

$$+\varepsilon_1\left|E_z\right|^2 cos\, \varphi\Big]d\varphi. \quad (42)$$

Подставив в (42) составляющие поля из (35) в виде рядов по цилиндрическим функциям и устремив R в бесконечность, получим:

$$F_y = \frac{\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon_1}E_0^2}{4\pi k}\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n a_n \cdot$$

$$\cdot\left(C_{n+1}^* a_{n+1}^* + C_{n-1}^* a_{n-1}^* - C_{n+3}^* a_{n+3}^* - C_{n-3}^* a_{n-3}^*\right),$$

$$F_z = \frac{i\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon_1}E_0^2}{4\pi k}\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n a_n\left(C_{n+1}^* a_{n+1}^* -\right.$$

$$\left.- C_{n-1}^* a_{n-1}^* - C_{n+3}^* a_{n+3}^* + C_{n-3}^* a_{n-3}^*\right). \quad (43)$$

Удобно объединить обе проекции (43) в одну – вида:

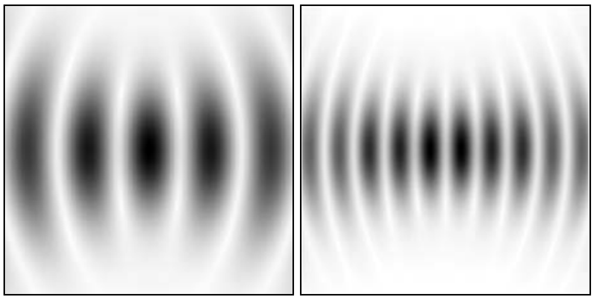
$$F_z + iF_y = \frac{i\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon_1}E_0^2}{2\pi k}\cdot$$

$$\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n a_n\left(C_{n+1}^* a_{n+1}^* - C_{n+3}^* a_{n+3}^*\right). \quad (44)$$

3. Численное моделирование

На рис. 2 представлена картина интерференции двух гауссовых пучков, направленных друг против друга с перетяжкой в начале координат, создающих стоячую волну. Рис. 2а отображает амплитуду суммарного поля *Ex* (ТЕ-поляризация), рис. 2б – модуль проекции вектора Умова-Пойнтинга на ось распространения света *Z*. Первый гауссовый пучок направлен вдоль оси *Z*, второй пучок в обратном направлении оси *Z*. Для первого гауссова пучка длина волны излучения – 1 мкм, мощность излучения – 50 мВт/м, перетяжка гауссова пучка находится в начале координат, ее диаметр – 1 мкм. Мощность излучения второго пучка – 50 мВт/м, длина волны так же равна 1 мкм, а диаметр перетяжки –1,5 мкм. Если поместить в такое поле диэлектрический объект, имеющий размер порядка длины волны, то данное поле окажется для него ловушкой: он будет втягиваться в максимумы интенсивности поля.

На рис. 3 представлен график зависимости силы *Fz* направленной вдоль оси *Z* от смещения по оси *Z*. Объектом является круглый цилиндр с диаметром равным 1 мкм, диалектрическая проницаемость – $\varepsilon = 2$. Вся картина дифракции имеет размер 2,5x2,5 мкм.



а) б)

Рис. 2. Интерференционная картина двух непараксиальных гауссовых пучков, распространяющихся навстречу друг другу вдоль оси Z: а) суммарная амплитуда векторов электрической напряженности; б) распределение вектора Умова-Пойнтинга

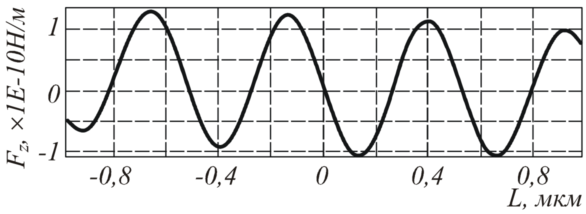
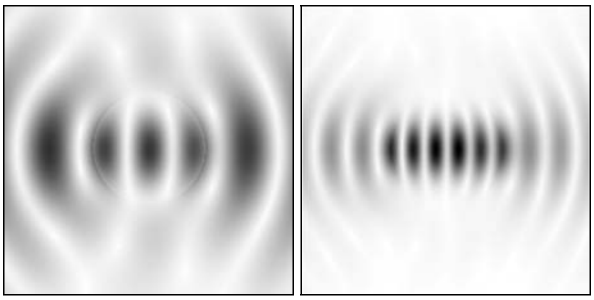


Рис. 3. Проекция на ось Z силы, действующей на круглый цилиндр с $\varepsilon = 2$ в зависимости от смещения центра круга цилиндра вдоль оси Z

На рис. 4 представлена дифракция направленных друг против друга гауссовых пучков, изображенных на рис. 2, на круглом цилиндре, описанном выше. Рис. 4а представляет напряженность электрического поля *Ex* (ТЕ-поляризация), рис. 4б – проекцию вектора Умова-Пойнтинга на ось *Z*. Объект расположен по центру перетяжки (*z*=0). Для визуализации на рис. 4а сам объект слегка затемнен.



а) б)

Рис. 4. То же, что и на рис. 1, но в присутствии круглого цилиндра в центре перетяжки

На рис. 5 приведена центральная часть картины дифракции рис. 3а размером 0,31x0,31 мкм. Стрелками отображены направления силы, действующей на данный цилиндр со стороны излучения, при помещении объекта в каждую конкретную точку пространства. Можно видеть, что объект хорошо «втягивается» в максимумы интерференционной картины. Длина стрелки пропорциональна модулю силы.

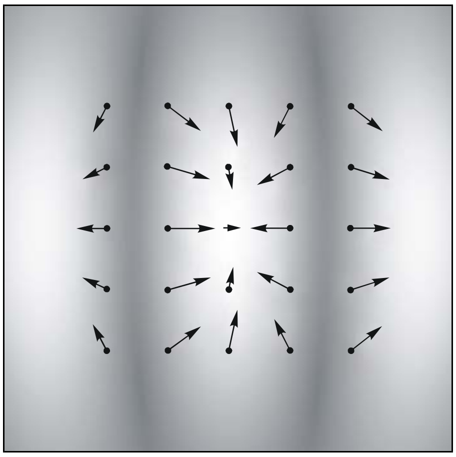
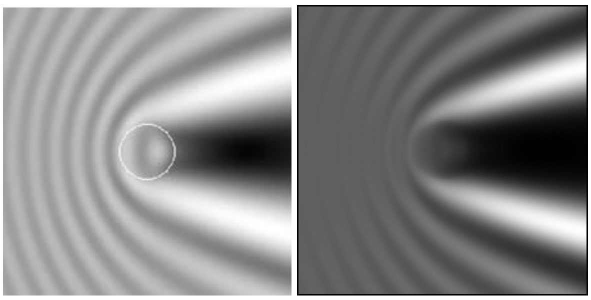


Рис. 5. Поле векторов сил, действующих со стороны двух встречных гауссовых пучков на круглый цилиндр, центр которого расположен в разных точках интерференционной картины

Интересно рассчитать поле и силу света, действующую на диэлектрический 2D объект, показатель преломления которого меньше, чем среды.

На рис. 6 представлена картина дифракции плоской волны в среде с показателем преломления 1,33 (вода) на круглом цилиндрическом объекте с показателем преломления 1 (цилиндрический пузырек воздуха). Диаметр цилиндра равен длине волны, т.е. – 1 мкм. Рис. 6а представляет напряженность электрического поля *Ex* (ТЕ-поляризация), рис. 6б – проекцию вектора Умова-Пойнтинга на ось *Z*. Энергия за «пузырек воздуха» почти не распространяется, что хорошо видно на срезах, отображенных на рис. 7, сделанных по оси *Z* через точку *y=0*.



а) *б)*

Рис. 6. Модуль напряженности электрического поля (а) и модуль вектора Умова-Пойнтинга (б) на картине дифракции плоской волны на воздушном круглом цилиндре в воде

Рис. 7а отображает значение амплитуды *Ex*, рис. 7б – значение проекции вектора Умова-Пойнтинга на ось *Z*.

Если такой объект поместить вблизи фокуса Гауссова пучка, то он будет выталкиваться из него, что проиллюстрировано на графиках рис. 8.

На рис. 8а представлен график зависимости силы *Fz* вдоль оси *Z* от смещения по оси *Z*, на рис. 8б – зависимость силы *Fy* от смещения вдоль оси *Y* через фокус. Гауссовый пучок имеет длину волны 1 мкм, диаметр перетяжки равен 1 мкм, мощность излучения 100 мВт/м. Видно, что при отклонении в любую сторону из фокуса в поперечном направлении сила, направленная в сторону отклонения, возрастает, что приводит к устойчивому движению в этом направлении. При отклонении вдоль оси распространения света *Z* сила, действующая на объект, перед фокусом меньше по модулю, чем после фокуса.

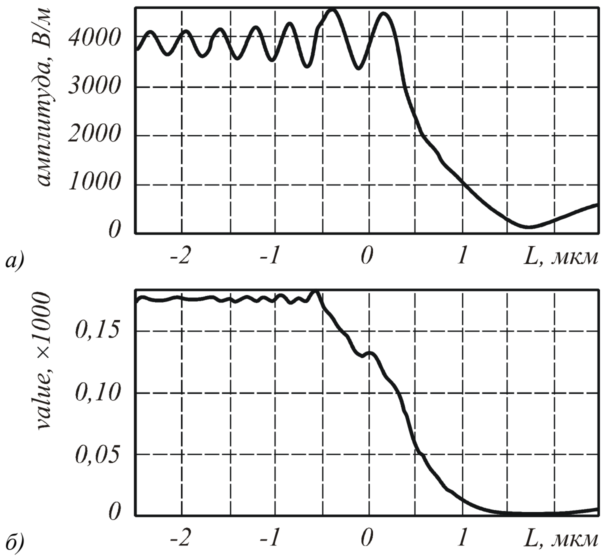


Рис. 7. Сечения картины 6а и 6б вдоль оси Z через точку Y=0

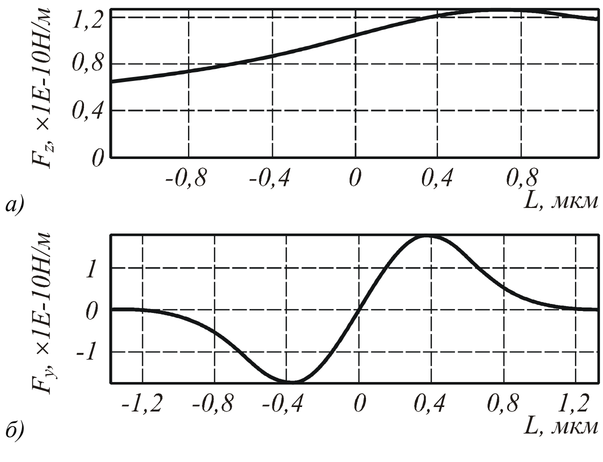


Рис. 8. Проекции силы давления непараксиального гауссова пучка на «цилиндрический пузырек воздуха» в воде: на продольную ось (а) и поперечную ось (б)

Если показатель преломления среды меньше, чем показатель преломления частицы, то при определенных параметрах можно наблюдать «захват» частицы по оси *Z*.

На рис. 9 показан график силы *Fz* при захвате вдоль оси *Z*. Парметры эксперимента: длина волны 1 мкм, диаметр перетяжки Гауссова пучка 1 мкм, диэлектрическая проницаемость частицы 1,2, среды 1, диаметр частицы 2 мкм. Из графика можно видеть механизм захвата: сила *Fz* перед фокусом положительна и направлена в сторону фокуса, за фокусом отрицательна и толкает частицу назад, в фокус. Из численных экспериментов было определено, что наличие возможности захвата зависит от диэлектрической проницаемости частицы. Для приведенных параметров «захват» имеет место при 1< ε <1,35.

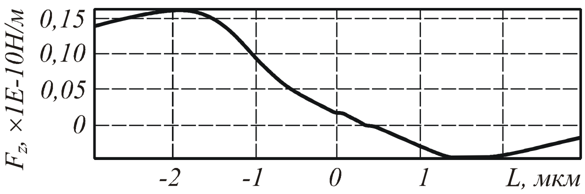


Рис. 9. Проекция силы давления на ось Z для гауссова пучка, действующего на круглый цилиндр с ε =1,2 (среда ε_1 =1)

График зависимости силы *Fz* при данных параметрах и диэлектрической проницаемости частицы 1,35 показан на рис. 10.

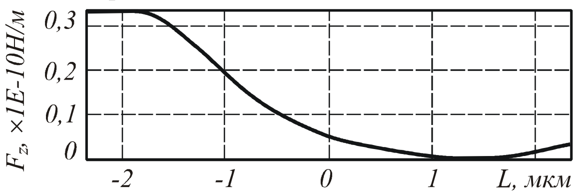


Рис. 10. Граница «захвата»: проекция силы давления на ось Z для непараксиального гауссова пучка и круглого цилиндра с ε =1,35

Заключение

В работе получены следующие результаты:

- Получено выражение для силы давления света на диэлектрический бесконечный цилиндр с произвольным сечением в декартовых (ур. (9), (10), (12) и цилиндрических (ур. (34) координатах;
- получены выражения для силы давления света (в частности непараксиального гауссова пучка) на диэлектрический бесконечный цилиндр с круглым сечением: при произвольном радиусе окружности интегрирования (ур. (36) и при бесконечном радиусе (ур. (41), (43), (44);
- численно показана возможность оптического «захвата» диэлектрического цилиндра с круглым сечением двумя встречными непараксиальными гауссовыми пучками (рис. 3 и 5) и одним гауссовым пучком при ограничении на диэлектрическую проницаемость цилиндра (рис. 9);
- численно показано, что круглый «воздушный пузырек» в воде выталкивается из фокальной области непараксиального гауссова пучка (рис. 8).

Благодарности

Работа поддержана российско-американской программой «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE), грант CRDF REC-SA-014-02 и президентским грантом НШ-1007.2003.01.

Литература

1. Gouesbet G., Maheu B., Grehan G. Light scattering from a sphere arbitrarily located in a Gaussian beam, using a Bromwide formulation // J. Opt. Soc. Am. A. 1988. V. 5. P. 1437-1443.
2. Gouesbet G., Lock J.A. A rigorous justification of the localized approximation to the beam-shape coefficients in the generalized Lorenc-Mie theory. II. Off-axis beams // J. Opt. Soc. Am. A. 1994. V. 2, P. 2516-2525.
3. Ren F., Grehad G., Gouebet G. Radiation pressure forces exerted on a particle located arbitrarily in a Gaussian beam by using the generalized Lorenc-Mie theory and associated resonance effects // Opt. Commun., 1993. V. 108, P. 343-354.
4. Gouesbet G. Validity of the localized approximation for arbitrary shaped beams in the generalized Lorenc-Mie theory for spheres // J. Opt. Soc. Am. A, 1999. V. 16. P. 1641-1650.
5. Barton J., Alexander D., Schaub S. Theoretical determination of net radiation force and torque for a spherical particle illuminated by a focused laser beam // J. Appl. Phys., 1989. V. 66. P. 4594-4602.
6. Gussard R., Lindmo T., Brovik I. Calculation of the trapping force jn a strongly focused laser beam // J. Opt. Soc. Am. B, 1992. V. 9. P. 1922-1930.
7. Rohrbach A., Stelzer E.H.K. Optical trapping of a dielectric particles in arbitrary fields // J. Opr. Soc. Am. A, 2001. V. 18. P. 839-853.
8. Rohrbach A., Stelzer E.H.K. Trapping forces, force constant, and potential depths for dielectric spheres in the presence of spherical aberration // Appl. Opt., 2002. V. 41. P. 2494-2507.
9. Lock J.A. Calculation of the radiation trapping force for laser tweezers by use of generalized Lorenc-Mie theory I. Localized model description of an on-axis tightly focused laser beam with spherical aberration // Appl. Opt. 2004. V. 43. P. 2532-2544.
10. Lock J.A. Calculation ……. II. On-axis trapping force // Appl. Opt., 2004. V. 43. P. 2545-2554.
11. Ganic D., Gan X., Gu M. Exact radiation trapping force calculation based on vectorial diffraction theory. // Opt. Express, 2004. V. 12. № 12. P. 2670-2675.
12. Nieminen T.A., Heckenberg N.R., Rubinstein-Dunlop H. Computational modeling of optical tweezers // Proceeings of SPIE, 2004. V. 5514. P. 514-523.
13. Mazolli A., Maia Neto P.A., Nussenzveig H.M. Theory of trapping forces in optical tweezers // Pvoc. R. Soc. Lond., 2003. V. 459. P. 3021-3041.
14. Nahmias Y.K., Oddl D.J. Analysis of radiation forces in laser trapping and laser-guided direct writing application // IEEE J. daunt. Electr., 2002. V. 38. №. 2. P. 1-10.
15. Pobre R. , Saloma C. Radiation forces on nonlinear microsphere by a tightly focused Gaussian beam // Appl. Opt., 2002. V. 41. №. 36. P. 7694-7701.
16. Marston P.L., Crichton J.H. // Radiation torque on a sphere coused by a circularly-polarized electromagnetic wave // Phys. Rev. A., 1984. V. 30. №. 5. P. 2508-2516.
17. Zimmerman E., Dandliner R., Souli N. Scattering of an off-axis Gaussian beam by a dielectric cylinder compared with a rigorous electromagnetic approach // J. Opt. Soc. Am. A, 1995. V. 12. P. 398-403.
18. Wu Z., Guo L. Electromagnetic scattering from a multilayerd cylinder arbitrarily located in a Gaussian beam, a new recursive algorithms // Progress in electromagnetics research, PIER, 1998. V. 18. P. 317-333.
19. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Краткий курс теоретической физики. Механика. Электродинамика // Книга 1, М., Наука. 1969.

Calculating the pressure force of the non-paraxial cylindrical Gaussian beam exerted upon a homogeneous circular-shaped cylinder

V.V. Kotlyar[1,2], A.G. Nalimov[1,2]
[1]Image Processing Systems Institute of RAS
[2]Samara State Aerospace University (SSAU)

Abstract:

Forces exerted upon a dielectric cylinder of infinite length and arbitrary, or circular, cross-section by the non-paraxial cylindrical Gaussian beam are considered. The projections of the vector of the light force pressure exerted upon a dielectric cylinder of arbitrary and circular cross-section are expressed analytically. In particular, the pressure force is expressed through the coefficients of decomposition of the non-paraxial Gaussian beam into the cylindrical functions. Using numerical examples, a possibility to optically trap a circular-shaped cylinder in two oppositely directed Gaussian beams or a single non-paraxial Gaussian beam is demonstrated.

Keywords: non-paraxial Gaussian beam, circular-shaped cylinder, circular cross-section, optically trap

Acknowledgments: This work was supported by the Russian-American program "Basic Research and Higher Education" (BRHE), grant CRDF REC-SA-014-02 and the presidential grant NSh-1007.2003.01.

Citation: Kotlyar VV, Nalimov AG. Calculating the pressure force of the non-paraxial cylindrical Gaussian beam exerted upon a homogeneous circular-shaped cylinder. Computer Optics 2005; 27: 105-111.

References:

[1] Gouesbet G, Maheu B, Gréhan G. Light scattering from a sphere arbitrarily located in a Gaussian beam, using a Bromwich formulation. J Opt Soc Am A 1988; 5(9): 1437-1443. DOI: 10.1364/JOSAA.5.001427.
[2] Gouesbet G, Lock JA. A rigorous justification of the localized approximation to the beam-shape coefficients in the generalized Lorenz-Mie theory. II. Off-axis beams. J Opt Soc Am A 1994; 11(9): 2516-2525. DOI: 10.1364/JOSAA.11.002516.
[3] Ren F, Grehad G, Gouebet G. Radiation pressure forces exerted on a particle located arbitrarily in a Gaussian beam by using the generalized Lorenz-Mie theory and associated resonance effects. Opt Commun 1994; 108(4-6): 343-354. DOI: 10.1016/0030-4018(94)90673-4.
[4] Gouesbet G. Validity of the localized approximation for arbitrary shaped beams in the generalized Lorenz-Mie theory for spheres. J Opt Soc Am A 1999; 16(7): 1641-1650. DOI: 10.1364/JOSAA.16.001641.
[5] Barton J, Alexander D, Schaub S. Theoretical determination of net radiation force and torque for a spherical particle illuminated by a focused laser beam. J Appl Phys 1989; 66(10): 4594-4602. DOI: 10.1063/1.343813.
[6] Gussgard R, Lindmo T, Brevik I. Calculation of the trapping force in a strongly focused laser beam. J Opt Soc Am B 1992; 9(10): 1922-1930. DOI: 10.1364/JOSAB.9.001922.
[7] Rohrbach A, Stelzer EHK. Optical trapping of a dielectric particles in arbitrary fields. J Opr Soc Am A 2001; 18(4): 839-853. DOI: 10.1364/JOSAA.18.000839.
[8] Rohrbach A, Stelzer EHK. Trapping forces, force constant, and potential depths for dielectric spheres in the presence of spherical aberration. Appl Opt 2002; 41(13): 2494-2507. DOI: 10.1364/AO.41.002494.
[9] Lock JA. Calculation of the radiation trapping force for laser tweezers by use of generalized Lorenz-Mie theory. I. Localized model description of an on-axis tightly focused laser beam with spherical aberration. Appl Opt 2004; 43(12): 2532-2544. DOI: 10.1364/AO.43.002532.
[10] Lock JA. Calculation of the radiation trapping force for laser tweezers by use of generalized Lorenz-Mie theory. II. On-axis trapping force. Appl Opt 2004; 43(12): 2545-2554. DOI: 10.1364/AO.43.002545.
[11] Ganic D, Gan X, Gu M. Exact radiation trapping force calculation based on vectorial diffraction theory. Opt. Express 2004; 12(12): 2670-2675. DOI: 10.1364/OPEX.12.002670.
[12] Nieminen TA, Heckenberg NR, Rubinstein-Dunlop H. Computational modeling of optical tweezers. Proc SPIE 2004; 5514: 514-523. DOI: 10.1117/12.557090.
[13] Mazolli A, Maia Neto PA, Nussenzveig HM. Theory of trapping forces in optical tweezers. Proc Math Phys Eng Sci 2003; 459(2040): 3021-3041. DOI: 10.1098/rspa.2003.1164.
[14] Nahmias YK, Oddl DJ. Analysis of radiation forces in laser trapping and laser-guided direct writing application. IEEE J Quantum Electron 2002; 38(2): 131-141. DOI: 10.1109/3.980265.
[15] Pobre R, Saloma C. Radiation forces on nonlinear microsphere by a tightly focused Gaussian beam. Appl. Opt.2002; 41(36): 7694-7701. DOI: 10.1364/AO.41.007694.
[16] Marston PL, Crichton JH. Radiation torque on a sphere caused by a circularly-polarized electromagnetic wave. Phys Rev A 1984; 30(5): 2508-2516. DOI: 10.1103/PhysRevA.30.2508.

[17] Zimmerman E, Dändliner R, Souli N, Krattiger B. Scattering of an off-axis Gaussian beam by a dielectric cylinder compared with a rigorous electromagnetic approach. J Opt Soc Am A 1995; 12(2): 398-403. DOI: 10.1364/JOSAA.12.000398.
[18] Wu Z, Guo L. Electromagnetic scattering from a multilayered cylinder arbitrarily located in a Gaussian beam, a new recursive algorithms. Prog Electromagn Res 1998; 18: 317-333. DOI: 10.2528/PIER97071100.
[19] Landau LD, Lifshitz EM. Shorter course of theoretical physics: Mechanics and electrodynamics, Volume 1. Oxford: Pergamon Press Ltd; 1972. ISBN: 978-0-08-016739-8.