

РАСЧЕТ СИЛЫ ДАВЛЕНИЯ СВЕТА НА КРУГЛЫЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЦИЛИНДР С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БЫСТРОГО ИТЕРАТИВНОГО АЛГОРИТМА И НА ОСНОВАНИИ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Котляр В.В., Налимов А.Г., Личманов М.А.
Институт систем обработки изображений РАН
Самарский государственный аэрокосмический университет

Аннотация

Проведено сравнение аналитического решения дифракции непараксиального гауссова пучка на круглом цилиндре с быстрым итеративным алгоритмом расчета. Рассчитаны силы давления, оценена эффективность оптического захвата круглого диэлектрического цилиндра с помощью гауссова пучка с острой фокусировкой в двумерном случае.

Введение

В [1, 2] рассмотрена дифракция непараксиального гауссова пучка на круглом диэлектрическом цилиндре. При этом центр круга может не совпадать с центром перетяжки цилиндрического гауссова пучка. Приведены аналитические формулы, описывающие напряженность электрического и магнитного полей дифракции в виде рядов по цилиндрическим функциям Бесселя и Ханкеля. В [3-7] получены общие выражения для силы давления света на трехмерный диэлектрический объект, основанные на электромагнитном тензоре Максвелла [3]. Сила давления электромагнитной волны на диэлектрический объект выражается через интеграл по поверхности, охватывающей это тело, от квадратичной комбинации проекций векторов напряженности электрического и магнитного полей. Поэтому чтобы рассчитать силу давления света требуется решить задачу дифракции света на объекте.

В [8, 9] был предложен быстрый итеративный метод расчета дифракции двумерной электромагнитной волны с ТЕ- и ТМ-поляризациями на диэлектрическом бесконечно-протяженном цилиндре с произвольной формой сечения. В двумерной постановке мощность падающего на объект света рассчитывается как линейная плотность, то есть мощность цилиндрического пучка света на единицу длины цилиндра. Также рассчитывается и сила давления света на цилиндр, как сила на единицу длины цилиндра.

В данной работе проведено численное сравнение двух методов расчета дифракции ТЕ-волны на круглом диэлектрическом цилиндре – аналитического [1, 2] и итеративного [8, 9]. Получены условия, при которых оба метода отличаются не более чем на 1%. Кроме этого показано, что при увеличении смещения центра круглого цилиндра из центра перетяжки гауссова пучка растет число ненулевых членов ряда, которые должны быть учтены в аналитическом расчете, чтобы сохранить точность решения.

Также в работе показана возможность оптического захвата цилиндрическим непараксиальным гауссовым пучком с радиусом перетяжки, равным половине длины волны, круглого диэлектрического цилиндра с диаметром, равным длине волны, и диэлектрической проницаемостью, равной 2.

1. Расчет поля дифракции и силы давления света на диэлектрический цилиндр

Для расчета сил, действующих на объект со стороны света, необходимо рассчитать все компоненты электрического и магнитного полей дифракции лазерного излучения на этом объекте. В частности для двумерного случая с ТЕ-поляризацией необходимо рассчитать электрическую компоненту E_x и магнитные компоненты H_y, H_z .

Далее рассмотрим быстрый итеративный алгоритм расчета поля дифракции и расчет аналитическим методом с разложением по цилиндрическим волнам. Рассчитанные поля дифракции затем подставим в расчет силы давления света на двумерный объект.

1.1 Итеративный алгоритм

В [8] описан итеративный метод расчета дифракции произвольной электромагнитной волны, удовлетворяющей уравнению Гельмгольца, на цилиндрических диэлектрических микрообъектах с произвольной формой сечения (ТЕ-поляризация). Ядром итеративного алгоритма является уравнение Фредгольма второго рода:

$$E_{n+1}(z, y) = \gamma E_{0x}(z, y) + (1 - \gamma) E_n(z, y) + \gamma \beta \iint_S E_n(\xi, \eta) H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(z-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right) d\xi d\eta, \quad (1)$$

где $(z, y) \in S$; E_{n+1} и E_n – амплитуда электрического поля внутри области S на $(n+1)$ -ом и n -ом шагах итераций; γ – постоянная релаксации алгоритма, которая регулирует скорость его сходимости, $\beta = \frac{ik^2(\epsilon - 1)}{4}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число света, ϵ – диэлектрическая проницаемость цилиндра, $(\xi, \eta) \in S$ – декартовы координаты внутри объекта, $H_0^{(1)}(x)$ – функции Ханкеля 1-го рода нулевого порядка. В качестве начального приближения можно брать падающее поле:

$$E_1(x, y) = E_{x0}(x, y). \quad (2)$$

Данный алгоритм сходится при условии $kd\epsilon \leq 4\pi$, где d – диаметр сечения цилиндра. Для моделирования оптического захвата цилиндриче-

ских микрообъектов можно воспользоваться аналитическим решением дифракции гауссова пучка.

1.2. Аналитическое решение задачи дифракции

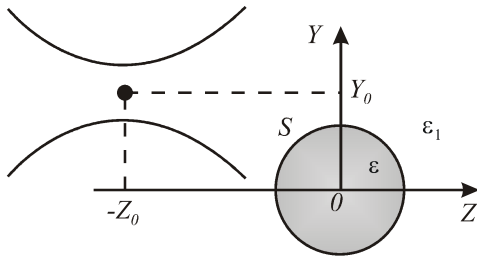


Рис. 1. Схема падения гауссова пучка с фокусом в точке $(-Z_0, Y_0)$ на круглый цилиндр с центром в точке $(0; 0)$

Следуя [2], рассмотрим дифракцию двумерного непараксиального гауссова пучка на круглом однородном цилиндре (рис. 1). Для случая ТЕ-поляризации, когда (E_x, H_y, H_z) – отличны от нуля, напряженность электрического поля для непараксиального гауссова пучка можно записать в виде:

$$E_{0x}(r, \varphi) = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n C_n J_n(kr) e^{in\varphi}, \quad (3)$$

$$C_n = \frac{\omega_0 \sqrt{\pi}}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{k^2 \omega_0^2 q^2}{4} + ik\sqrt{1-q^2} z_0 - ikqy_0 - in \arcsin q \right] dq. \quad (4)$$

Напряженность электрического поля вне цилиндра равна сумме рассеянного и падающего полей:

$$E_x = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n C_n J_n(kr) e^{in\varphi} + E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n a_n C_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\varphi} \quad (5)$$

где

$$a_n = \frac{(k_1 J_n'(k_1 R) J_n(kR) - k J_n(k_1 R) J_n'(kR))}{(k_1 J_n'(k_1 R) H_n^{(1)}(kR) - k J_n(k_1 R) H_n^{(1)}(kR))}, \quad (6)$$

где $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\varepsilon_1}$ – волновое число в среде с диэлектрической проницаемостью ε_1 .

Связь между проекциями H_y , H_z и E_x следует из уравнений Максвелла:

$$H_y = -\frac{i}{k} \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad H_z = \frac{i}{k} \frac{\partial E_x}{\partial y}. \quad (7)$$

1.3 Сила давления света на объект

Сила, действующая на объект со стороны падающего поля, рассчитанная в общем случае с помощью электромагнитного тензора Максвелла [9] в 2D случае, может быть вычислена интегрированием по контуру S вокруг объекта:

$$F_x = 0,$$

$$F_y = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \oint_S \left\{ \frac{1}{2} \left[|H_y|^2 - \varepsilon_1 |E_x|^2 - |H_z|^2 \right] dz + \operatorname{Re}(H_y H_z^*) dy \right\}, \quad (8)$$

$$F_z = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \oint_S \left\{ \frac{1}{2} \left[|H_z|^2 - \varepsilon_1 |E_x|^2 - |H_y|^2 \right] dy + \operatorname{Re}(H_z H_y^*) dz \right\}, \quad (9)$$

где ε_0 – диэлектрическая постоянная,

$$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{кЛ}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} \quad (\text{в системе СИ}).$$

2. Численное моделирование

Исследуем работоспособность итеративного и аналитического методов расчета дифракции электромагнитной волны на микрообъектах. Далее, на основании результата вычислений поля дифракции электромагнитной волны на микрообъекте, рассчитаем силу давления света на этот микрообъект.

2.1. Сравнение итеративного и аналитического расчетов.

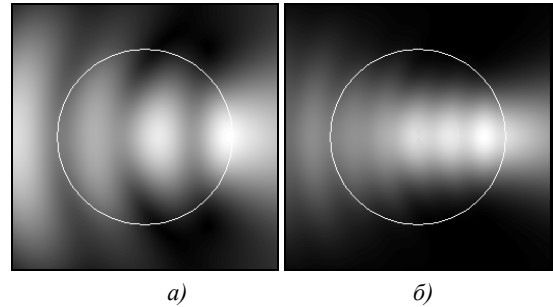


Рис. 2. а) Амплитуда E_x поля дифракции непараксиального гауссова пучка на цилиндре, б) модуль проекции вектора Умова-Пойнтинга на ось распространения света Z .

Параметры: длина волны $\lambda = 1$ мкм, диаметр круглого цилиндра $d = 1$ мкм, диэлектрическая проницаемость цилиндра $\varepsilon = 2$, среды $\varepsilon_1 = 1$, все поле $1,5 \times 1,5$ мкм, цилиндр помещен в центр перетяжки с радиусом $\sigma = 0,5$ мкм

На рис. 2 представлено поле дифракции, рассчитанное по формуле (5). СКО между данным решением и расчетом картины дифракции при помощи алгоритма, описанного в [8], составляет 0,08% при параметрах: длина волны $\lambda = 1$ мкм, диаметр круглого цилиндра $d = 1$ мкм, диэлектрическая проницаемость цилиндра $\varepsilon = 2$, среды $\varepsilon_1 = 1$, все поле $1,5 \times 1,5$ мкм, 256x256 отсчетов, объект помещен в центр перетяжки с радиусом $\sigma = 0,5$ мкм, количество коэффициентов ряда $N = 8$. Вектор Умова-Пойнтинга рассчитывается по формуле:

$$\vec{S} = \varepsilon_0 c^2 \left[\vec{E} \times \vec{H} \right] \quad (10)$$

а его проекция на ось распространения света Z будет равна:

$$S_z = \varepsilon_0 c^2 E_x H_y. \quad (11)$$

На рис. 3 приведены те же поля для цилиндра, смещенного на 0,25 мкм (вверх) по оси Y из перетяжки. По картине модуля проекции вектора Умова-Пойнтинга на ось распространения света хорошо заметно, что энергия в пучке отклоняется в сторону смещения цилиндра.

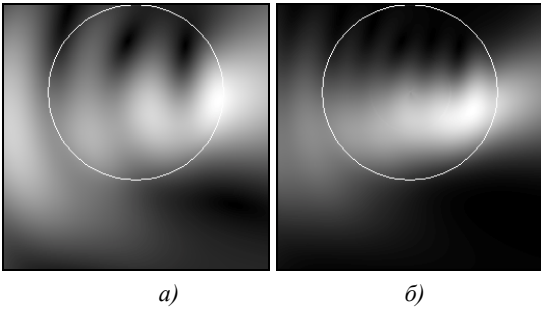


Рис. 3. а) амплитуда E_x поля дифракции непараксиального гауссова пучка на цилиндре, б) модуль проекции вектора Умова-Пойнтинга на ось распространения света Z . Параметры те же, что и на рис. 2, цилиндр смещен на $L=0,25$ мкм по оси Y

Точность расчета поля дифракции аналитическим методом зависит от количества коэффициентов ряда C_n (4). Зависимость невязки δ между амплитудами электрических полей, полученных при помощи итеративного алгоритма и по формуле (5), от количества коэффициентов показана на рис. 4, рассчитываемая по формуле:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{n,m=1}^N (E_x(n,m) - E_n(n,m))^2}{\sum_{n,m=1}^N E_x^2(n,m)}} \quad (12)$$

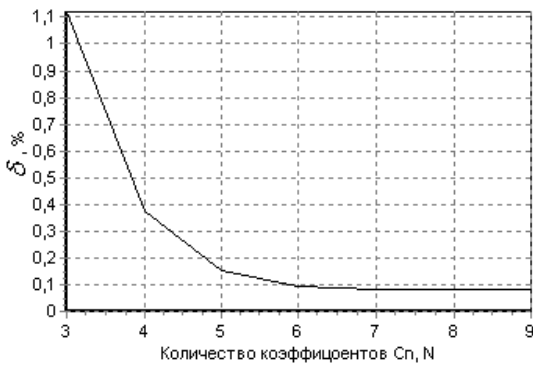


Рис. 4. Зависимость невязки δ между амплитудами поля E_x , рассчитанного итеративным и аналитическим методами, от количества коэффициента C_n ряда (5)

Количество коэффициентов ряда C_n изменяется от -3.3 до -9.9, остальные параметры моделирования те же, что и для рис. 2.

Диапазон параметров, при которых поле дифракции рассчитывается корректно у аналитического метода шире, чем у итеративного алгоритма. Однако аналитический метод дает погрешность при расчете дифракции гауссова пучка на цилиндре, находящегося в теневой области. На рис. 5 представлен график зависимости невязки δ между итера-

тивным и аналитическим методами расчета дифракции от смещения круглого цилиндра вдоль вертикальной оси Y (рис. 1) по линии, проходящей точно через перетяжку ($Z=0$).

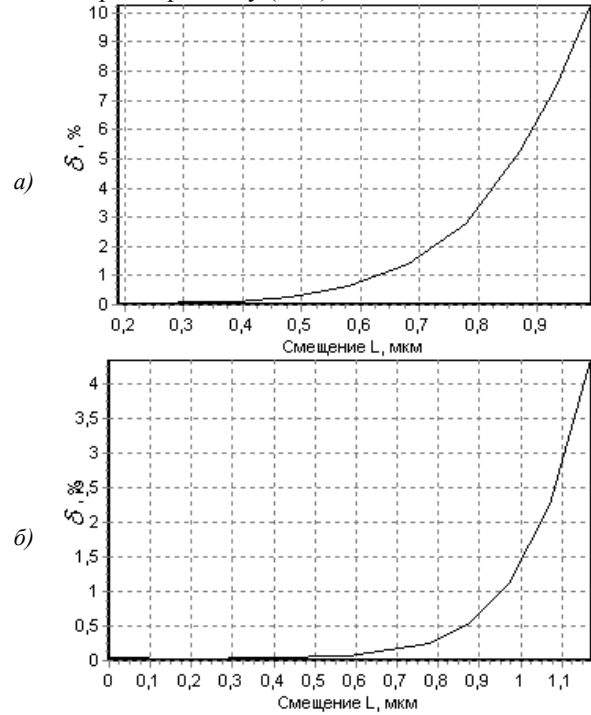


Рис. 5. Зависимость невязки δ между амплитудами электрических компонент электромагнитной волны, рассчитанных итеративным и аналитическим методами. В аналитическом методе бралось:

а) $N=7$ коэффициентов; б) $N=9$ коэффициентов

Как можно увидеть из рис. 5, невязка сильно возрастает при смещении цилиндра из фокуса в теневую область. Однако это можно исправить взятием большего количества коэффициентов C_n . Такая необходимость взятия большего количества коэффициентов C_n возникает из-за смещения значимых для расчета больших по модулю коэффициентов C_n от 0-го номера в сторону больших номеров, что проиллюстрировано на рис. 6.

На рис. 6а, б изображена зависимость модуля коэффициентов C_n от номера n . Как видно из графиков, при взятии того же количества коэффициентов и смещении цилиндра в вычислении принимают участие не все значимые коэффициенты, что дает увеличение погрешности расчетов.

Зависимость невязки δ между картинками дифракции, рассчитанными итеративным и аналитическим методами, от смещения вдоль оси Z дает иную картину. Так, на рис. 7 можно увидеть, что невязка незначительно возрастает при смещении цилиндра из фокуса вдоль оси распространения света на большее смещение, чем вдоль оси Y . Параметры вычислительного эксперимента те же, что и для рис. 2.

Это объясняется другой зависимостью коэффициентов C_n от смещения, отображенной на рис. 8.

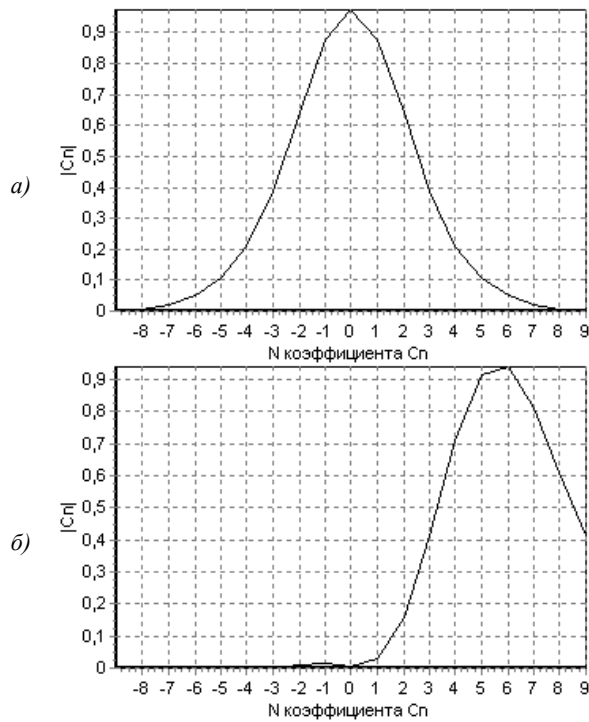


Рис. 6. Зависимость модуля коэффициента C_n от номера n : а) цилиндр совпадает с фокусом гауссова луча, б) цилиндр смещен из фокуса гауссова пучка на $L=1$ мкм по оси Y

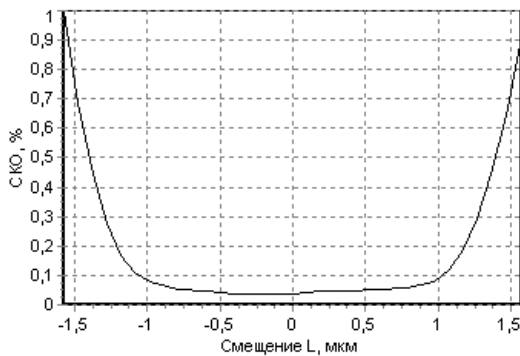


Рис. 7. Зависимость СКО между амплитудой E_x поля дифракции, рассчитанного итеративным и аналитическим методами, от смещения L цилиндра вдоль оси Z через фокус при $Y=0$

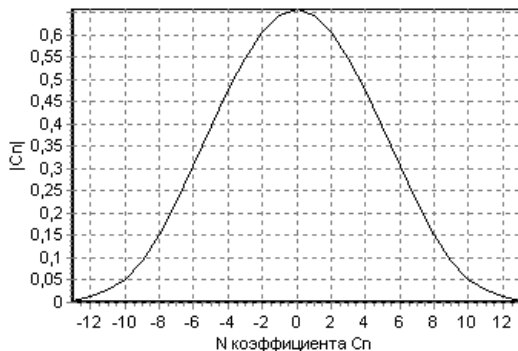


Рис. 8. Зависимость модуля коэффициентов C_n от номера n . Перетяжка смещена от цилиндра по оси Z на расстояние $L=-1,56$ мкм

Как видно из рис. 8, ширина полосы значимых коэффициентов C_n расширяется при смещении пе-

ретьяжки из центра координат (и от центра цилиндра), и, чтобы это компенсировать, необходимо брать тем больше коэффициентов C_n , чем дальше смещена перетяжка гауссова пучка. В данном примере (рис. 8) взятие коэффициентов C_n от -9 до 9 дает невязку δ между амплитудами E_x , рассчитанных аналитическим и итеративным методами, порядка 1% (рис. 7).

Взятие большего количества коэффициентов C_n сопряжено с увеличением вычислительной сложности и, следовательно, с увеличением временных затрат на расчет поля дифракции. Так, например, расчет поля дифракции размером 5×5 мкм (256×256 отсчетов) при параметрах: длина волны $\lambda=1$ мкм, диэлектрическая проницаемость среды $\epsilon_1=1$, диэлектрическая проницаемость цилиндра $\epsilon=2$, диаметр цилиндра $d=1$ мкм (перетяжка расположена в центре координат) аналитическим методом при взятии коэффициентов C_n от -7 до 7 требует 40 секунд для компьютера с ЦП Celeron 1000, СКО между амплитудами E_x , рассчитанными аналитическим и итеративным методами составляет 0,038%. Расчет поля дифракции в том же случае, но при расположении перетяжки в координатах ($Z=-1,56$ мкм, $Y=0$ мкм) и взятии коэффициентов C_n от -13 до 13 требует 19 минут 53 секунды, невязка δ между амплитудами E_x , рассчитанными аналитическим и итеративным методами составляет 0,077%.

2.2 Расчет силы давления

На рис. 9. приведен пример графиков зависимости проекций силы, действующей на круглый цилиндр со стороны гауссова пучка, вдоль осей Y, Z от смещения цилиндра по тем же осям, из которых видна возможность «захвата» объекта лазерным излучением в оптическую ловушку.

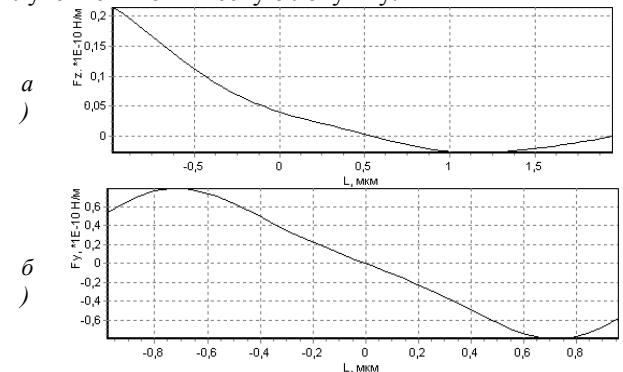


Рис 9. Зависимость проекций силы, действующей на цилиндр, от его смещения вдоль той же оси: а) вдоль оси Z ; б) вдоль оси Y

Параметры моделирования: все поле размером 5×5 мкм, 256×256 отсчетов, длина волны $\lambda=1$ мкм, диэлектрическая проницаемость среды $\epsilon_1=1$, диэлектрическая проницаемость цилиндра $\epsilon=1,3$, диаметр цилиндра $d=1,5$ мкм, радиус перетяжки в фокусе $\sigma=0,5$ мкм. Линия смещения объекта на обоих графиках проходит через центр перетяжки. Из

рис. 9 видно, что сила, действующая на микроцилиндр, равна по порядку величины $10^{-10} \frac{H}{m}$ при мощности лазера гауссова пучка $100 \frac{mBm}{m}$.

Из рис. 9 видно, что при смещении в любом направлении из фокуса гауссова пучка сила действует на частицу в направлении, противоположном смещению. Проекция силы вдоль оси Z складывается из градиентной и рассеивающей сил [10]. Градиентная сила всегда направлена в максимум интенсивности излучения, а рассеивающая – вдоль оси распространения света. Поэтому центр захвата частицы не совпадает с геометрическим центром перетяжки гауссова пучка, и возможность захвата определяется балансом между рассеивающей и градиентной составляющими проекциями силы вдоль оси Z .

На рис. 10 представлен график зависимости эффективности захвата Q от смещения вдоль осей Y, Z , рассчитываемой по формуле:

$$Q = \frac{cF}{nP}, \quad (13)$$

где c – скорость света в вакууме, F – сила, действующая на объект, $n = \sqrt{\epsilon}$ – показатель преломления объекта, P – мощность излучения лазера.

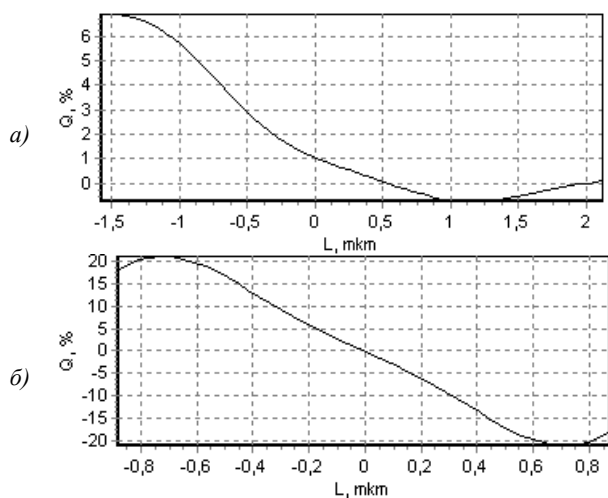


Рис. 10. Графики зависимости эффективности захвата вдоль оси от смещения вдоль той же оси: а) ось распространения света Z ; б) ось Y

В случае силы, направленной вдоль рассматриваемой оси, $Q > 0$, и $Q < 0$ в обратном случае, что показывает возможность оптического «захвата» частицы. Физический смысл эффективности захвата – это часть излучения, пошедшего на создание силы, действующей на частицу.

Заключение

В работе получены следующие результаты:

- проведено сравнение точности расчета дифракции гауссова пучка на диэлектрических микрообъектах аналитическим и итеративным методами (рис. 4, 5, 7)
- Рассмотрено влияние количества взятых для расчета коэффициентов C_n на точность расчета поля дифракции при смещении объекта из центра перетяжки непараксиального гауссова пучка вдоль осей Y (рис. 5) и Z (рис. 7)
- оценена эффективность захвата диэлектрического цилиндра отдельно для смещения вдоль осей Y и Z (рис. 10) по формуле (10).

Благодарности

Работа поддержана российско-американской программой «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE), грант CRDF REC-SA-014-02 и президентским грантом НШ-1007.2003.01.

Литература

1. Zimmerman E., Dandliner R., Souli N. Scattering of an off-axis Gaussian beam by a dielectric cylinder compared with a rigorous electromagnetic approach. // J. Opt. Soc. Am. A, 1995, v. 12, p. 398-403.
2. Wu Z., Guo L.. Electromagnetic scattering from a multilayered cylinder arbitrarily located in a Gaussian beam, a new recursive algorithms. // Progress in electromagnetics research, 1998, PIER, v. 18, p. 317-333.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Краткий курс теоретической физики. Механика. Электродинамика // Книга 1, М., Наука, 1969.
4. Lock J.A.. Calculation of the radiation trapping force for laser tweezers by use of generalized Lorenz-Mie theory I. Localized model description of an on-axis tightly focused laser beam with spherical aberration. // Appl. Opt., 2004, V. 43, p. 2532-2544.
5. Ganic D., Gan X., Gu M.. Exact radiation trapping force calculation based on vectorial diffraction theory. // Opt. Express, 2004, v. 12, no. 12, p. 2670-2675.
6. Nieminen T.A., Heckenberg N.R., Rubinstein-Dunlop H.. Computational modeling of optical tweezers. // Proceedings of SPIE, 2004, v. 5514, p. 514-523.
7. Pobre R., Saloma C.. Radiation forces on nonlinear microsphere by a tightly focused Gaussian beam. // Appl. Opt., 2002, v. 41, no. 36, p. 7694-7701.
8. Котляр В.В., Налимов А.Г., Скиданов Р.В. Быстрый метод расчета дифракции на цилиндрических диэлектрических микрообъектах // Компьютерная оптика, 2004, №25, с. 24-28.
9. Котляр В.В., Налимов А.Г., Скиданов Р.В. Расчет вектора Умова-Пойнтинга и силы давления электромагнитной волны на однородный диэлектрический цилиндр // Известия Сибирского РАН, 2004, т. 6, № 2.
10. Rohrbach A., Stelzer E.H.K.. Optical trapping of a dielectric particles in arbitrary fields. // J. Opt. Soc. Am. A, 2001, v. 18, p. 839-853.

Calculation of light pressure on a round dielectric cylinder using a fast iterative algorithm and based on an analytical solution

V.V. Kotlyar^{1,2}, A.G. Nalimov^{1,2}, M.A. Lichmanov²

¹Image Processing Systems Institute of RAS

²Samara State Aerospace University (SSAU)

Abstract:

The analytical solution of diffraction of a nonparaxial Gaussian beam on a round cylinder is compared with a fast iterative calculation algorithm. The pressure forces are calculated, and the efficiency of optical capture of a circular dielectric cylinder is estimated using a Gaussian beam with sharp focusing for the two-dimensional case.

Keywords: dielectric cylinder, Gaussian beam, diffraction

Acknowledgments: This work was supported by the Russian-American program “Basic Research and Higher Education” (BRHE), grant CRDF RECSA-014-02 and the presidential grant NSh1007.2003.01.

Citation: Kotlyar VV, Nalimov AG, Lichmanov MA. Calculation of light pressure on a round dielectric cylinder using a fast iterative algorithm and based on an analytical solution. *Computer Optics* 2005; 27: 112-116.

References:

- [1] Zimmerman E, Dändliner R, Souli N, Krattiger B. Scattering of an off-axis Gaussian beam by a dielectric cylinder compared with a rigorous electromagnetic approach. *J Opt Soc Am A* 1995; 12(2): 398-403. DOI: 10.1364/JOSAA.12.000398.
- [2] Wu Z, Guo L. Electromagnetic scattering from a multilayered cylinder arbitrarily located in a Gaussian beam, a new recursive algorithms. *Prog Electromagn Res* 1998; 18: 317-333. DOI: 10.2528/PIER97071100.
- [3] Landau LD, Lifshitz EM. *Shorter course of theoretical physics: Mechanics and electrodynamics, Volume 1.* Oxford: Pergamon Press Ltd; 1972. ISBN: 978-0-08-016739-8.
- [4] Lock JA. Calculation of the radiation trapping force for laser tweezers by use of generalized Lorenz-Mie theory. I. Localized model description of an on-axis tightly focused laser beam with spherical aberration. *Appl Opt* 2004; 43(12): 2532-2544. DOI: 10.1364/AO.43.002532.
- [5] Ganic D, Gan X, Gu M. Exact radiation trapping force calculation based on vectorial diffraction theory. *Opt. Express* 2004; 12(12): 2670-2675. DOI: 10.1364/OPEX.12.002670.
- [6] Nieminen TA, Heckenberg NR, Rubinstein-Dunlop H. Computational modeling of optical tweezers. *Proc SPIE* 2004; 5514: 514-523. DOI: 10.1117/12.557090.
- [7] Pobre R, Saloma C. Radiation forces on nonlinear microsphere by a tightly focused Gaussian beam. *Appl. Opt.* 2002; 41(36): 7694-7701. DOI: 10.1364/AO.41.007694.
- [8] Kotlyar VV, Nalimov AG, Skidanov RV. Method for rapidly calculating the diffraction at cylindrical dielectric microscopic objects. *Computer Optics* 2004; 25: 24-28.
- [9] Kotlyar VV, Nalimov AG, Skidanov RV. Calculation of Umov-Poynting vector and the electromagnetic wave pressure force on a homogeneous dielectric cylinder. *Proc SPIE* 2005; 5773: 106-118. DOI: 10.1117/12.636945.
- [10] Rohrbach A, Stelzer EHK. Optical trapping of a dielectric particles in arbitrary fields. *J Opr Soc Am A* 2001; 18(4): 839-853. DOI: 10.1364/JOSAA.18.000839.