ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ: МЕТОДЫ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

О РЕКУРСИВНОМ ВЫЧИСЛЕНИИ СВЕРТКИ ИЗОБРАЖЕНИЯ И ДВУМЕРНОГО НЕРАЗДЕЛИМОГО КИХ-ФИЛЬТРА

Мясников В.В.
Институт систем обработки изображений РАН,
Самарский государственный аэрокосмический университет

Аннотация

В работе предлагается метод построения алгоритма рекурсивного вычисления свертки изображения и двумерного фильтра с неразделимой конечной импульсной характеристикой (КИХ). Этот метод основан на представлении конечной импульсной характеристики фильтра через вертикальные и горизонтальные рекуррентные соотношения. Каждое из рекуррентных соотношений приводит к полу-рекурсивной процедуре вычисления свертки изображения и двумерного КИХ-фильтра. В свою очередь, каждая из этих полу-рекурсивных процедур состоит из двух частей. Первая часть процедуры представляет собой рекурсивное соотношение, предназначенное для пересчета значений в процедуре, а вторая часть - нерекурсивное вычисление сверток на границах импульсной характеристики. Для перехода от полученной полу-рекурсивной процедуры к полностью рекурсивному алгоритму вычисления искомой свертки в работе доказывается специальное утверждение. Это утверждение показывает, что если импульсная характеристика искомого фильтра удовлетворяет рекуррентным соотношениям и по вертикали и по горизонтали, тогда все дополнительные импульсные характеристики, с которыми производится вычисление сверток на границах КИХ-фильтра, удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям. Данное утверждение позволяет модифицировать полученную процедуру в полностью рекурсивный алгоритм вычисления свертки изображения и двумерного неразделимого КИХ-фильтра. В работе также приводятся оценки вычислительной сложности предложенного рекурсивного алгоритма, выражаемые числом арифметических операций.

Введение

Вычисление свертки является базовой операцией в теории цифровой обработке сигналов и изображений. Вычисление свертки входного изображения $x(n_1,n_2)$ и линейного фильтра с конечной импульсной характеристикой (ИХ) $h(n_1,n_2)$ может быть представлено в форме:

$$y(n_1,n_2)=\sum_{(m_1,m_2)\in D} h(m_1,m_2)\times(n_1-m_1,n_2-m_2). \quad (1)$$

Здесь $y(n_1,n_2)$ – выходное изображение, D – конечная (ограниченная) область ненулевых отсчетов импульсной характеристики. Будем считать, что область D задана следующим образом:

$$D=\{(m_1,m_2)\in[0,M_1]\times[0,M_2]\}. \quad (2)$$

В теории цифровой обработки сигналов и изображений существует два принципиально различных алгоритмических подхода к быстрому вычислению свертки (1). Первый подход использует теорию быстрых ортогональных преобразований [1]. Второй подход использует рекуррентные соотношения для получения рекурсивных алгоритмов вычисления свертки. Последний применяется обычно для фильтров с бесконечной импульсной характеристикой – БИХ–фильтров [2, 12]. Однако также возможно использованием этого подхода для КИХ–фильтров [4–9, 11, 12]. На возможность рекурсивного и параллельно-рекурсивного вычисления свертки изображения и КИХ–фильтра одним из первых указал Л.П. Ярославский в работе [3]. Определенное обобщение и развитие этого подхода было представлено в работах [4, 5, 8]. Работы [6, 7, 9] использовали полиномиальные импульсные характеристики фильтра для рекурсивной реализации свертки. Авторская работа [9] дает описание метода построения алгоритма рекурсивного вычисления свертки изображения и неразделимого двумерного полиномиального КИХ–фильтра.

Настоящая работа представляет развитие метода, предложенного в [9], для случая, когда ИХ фильтра является произвольной неразделимой двумерной функцией с конечной областью определения.

Данная работа организована следующим образом. Первый раздел представляет некоторые известные результаты одномерной рекурсивной фильтрации. В нем дается описание одномерного рекурсивного алгоритма, используемое для вычисления свертки сигнала и одномерного КИХ–фильтра. Определение одномерной рекуррентной конечной импульсной характеристики дается также в этом разделе. Приведены выражения для вычислительной сложности рекурсивной обработки. Также здесь демонстрируется простой пример рекурсивного вычисления свертки сигнала и одномерного фильтра с прямоугольным импульсным откликом. Детали подхода, изложенного в этом разделе, могут быть найдены в работах [4, 5, 8].

Во втором разделе приведено обобщение результатов одномерной рекурсивной обработки на двумерный случай. Для того чтобы перейти к ситуации двумерной обработки, используется идея, которая была предложена автором в работе [9] при построении рекурсивного двумерного неразделимого полиномиального КИХ–фильтра. В частности, по аналогии с одномерным случаем вводится определение двумерной рекуррентной импульсной характеристики. Это определение, соответствующее представлением двумерного КИХ–фильтра, используется для получения полу-рекурсивной процедуры вычисления свертки изображения и произвольного двумерного неразделимого КИХ-фильтра. Эта полу-рекурсивная процедура представлена в настоящем разделе. Показано, что она состоит из двух частей. Первая часть представляет собой рекурсивную часть расчета искомой свертки, а вторая содержит выражения для нерекурсивного вычисления сверток на границах исходного КИХ–фильтра. В работе показывается, что указанные выражения вычисления сверток используют в выражениях пиксели входного изображения и некоторые специфические конечные ИХ, отсчеты которых зависят от отсчетов первоначального КИХ–фильтра. Выражения для вычислительной сложности предложенной полу-рекурсивной процедуры даны во втором разделе. В качестве показателей сложности выступают количества арифметических операций сложения и умножения, необходимых для расчета одного отсчета выходного изображения.

Третий раздел представляет результаты модификации полученной полу-рекурсивной процедуры в полностью рекурсивный алгоритм расчета свертки. В нем доказывается утверждение, которое показывает, что конечные импульсные характеристики, используемые в нерекурсивной части процедуры, удовлетворяют одному и тому же вполне определенному двумерному рекуррентному соотношению. В частности, если ИХ первоначального фильтра удовлетворяет некоторому двумерному рекуррентному соотношению, то и все указанных ИХ удовлетворяют этому же рекуррентному соотношению. Данное утверждение позволяет перейти к полностью рекурсивному алгоритму вычисления свертки изображения и двумерного неразделимого КИХ-фильтра, заменив прямые выражения для сверток на границах исходного КИХ–фильтра некоторыми рекурсивными выражениями. Выражения для вычислительной сложности разработанного двумерного рекурсивного алгоритма вычисления свертки приводятся в завершении данного раздела.

Четвертый раздел дает алгоритм расчета параметров двумерной рекуррентной конечной ИХ для представления с ее помощью произвольной двумерной неразделимой ИХ линейного фильтра. Для этого используется аппроксимация данного двумерного линейного фильтра посредством вертикальных и горизонтальных двумерных рекуррентных соотношений. В качестве показателя качества аппроксимации в работе используется величина среднеквадратического отклонения между искомой ИХ и ее аппроксимацией. Показывается, что параметры двумерных рекуррентных соотношений зависят от ковариационной функции искомой ИХ. В разделе представлено явное выражение для квази-оптимального решения обозначенной задачи аппроксимации. Также представлено аналитическое выражение для значения критерия в точке этого решения. Следует отметить, что представленные результаты могут быть использованы также и для одномерного случая.

В пятом разделе приведена информация о поддержке данной работы со стороны грантов и спонсоров.

1. Рекурсивное вычисление свертки одномерного сигнала и КИХ-фильтра

Данный раздел содержит обзор некоторых известных результатов рекурсивной фильтрации для одномерного случая. Детали алгоритмов рекурсивного вычисления свертки сигнала и одномерного КИХ-фильтра могут быть найдены в работах [4, 5, 8].

Операция вычисления свертки сигнала и одномерного КИХ-фильтра может быть представлена в виде:

$$y(n) = \sum_{m \in D} h(m)x(n-m) \,. \tag{3}$$

Здесь сигналы $x(n)$ и $y(n)$ представляют, соответственно, входную и выходную одномерные последовательности, а функция $h(m)$ является импульсной характеристикой линейного фильтра. Величина D задает область определения фильтра, соответствующую его ненулевым значениям. Эта область является конечной. Для определенности положим $D = [0, M]$.

Пусть ИХ фильтра удовлетворяет рекуррентному соотношению K–ой степени. Если данное утверждение не выполняется и ИХ не удовлетворяет рекуррентному соотношению, в этом случае всегда можно аппроксимировать ее с помощью такого рекуррентного соотношения. Поэтому предположим далее, что для импульсной характеристики фильтра выполняется следующее соотношение:

$$h(m) = \begin{cases} b_m, \quad m = \overline{0, K-1}, \\ \sum\limits_{k=1}^{K} \alpha_k h(m-k), \quad m = \overline{K, M-1}, \\ 0, \quad m < 0, \ m \geq M. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь величины $\alpha_k \left(k = \overline{1, K}\right)$ являются *коэффициентами рекуррентного соотношения*, а величины $b_m \left(m = \overline{0, K-1}\right)$ – его *начальными значениями* [10]. Будем в дальнейшем называть импульсные характеристики, удовлетворяющие соотношению (4), *одномерными рекуррентными импульсными характеристиками*. Тогда выражение вычисления свертки (3) сигнала и фильтра с одномерной рекуррентной ИХ может быть представлено в рекурсивном виде [5, 8]:

$$y(n)=\sum_{k=1}^{K}\alpha_k y(n-k)+\sum_{m=0}^{K-1}h^+(m)x(n-m)-$$
$$-\sum_{m=0}^{K-1}h^-(m)x(n-M-m).$$

Функции $h^+(k)$ и $h^-(k)$, использованные в данном выражении, могут быть вычислены заранее. Они задаются следующими выражениями:

$$h^+(m)=h(m)-\sum_{k=0}^{m}\alpha_k h(m-k),$$
$$h^-(m)=\sum_{k=m+1}^{K}\alpha_k h(M+m-k),\quad m=\overline{0,K-1}.$$

Обозначим далее

$$y^+(n)=\sum_{m=0}^{K-1}h^+(m)x(n-m),$$
$$y^-(n)=\sum_{m=0}^{K-1}h^-(m)x(n-m). \tag{5}$$

Тогда выражение, определяющее процедуру рекурсивного вычисления свертки, примет вид:

$$y(n)=\sum_{k=1}^{K}\alpha_k y(n-k)+y^+(n)-y^-(n-M). \tag{6}$$

Алгоритм рекурсивного вычисления свертки, использующий выражения (5) – (6), требует $U_*(K)=3K$ умножений и $U_+(K)=3K-1$ сложений на один пиксель выходного сигнала. Будем в дальнейшем использовать для них следующие обозначения:

$$U_+(K)=3K-1,\ U_*(K)=3K. \tag{7}$$

Представленные выражения вычислительной сложности демонстрируют основное преимущество рекурсивного подхода по сравнению с алгоритмами прямой и быстрой свертки: *вычислительная сложность рекурсивного алгоритма не зависит от размеров области определения импульсной характеристики*.

Например, одной из наиболее простых рекуррентных импульсных характеристик является прямоугольная ИХ:

$$h(n)=\begin{cases} b, & m\in[0,M-1], \\ 0, & m\notin[0,M-1]. \end{cases} \tag{8}$$

Она удовлетворяет рекуррентному соотношению первого порядка $(K=1)$. Параметры рекуррентного соотношения для этой ИХ следующие: $\alpha_1=1,\quad b_0=b$. Подставляя эти величины в выражение (5)-(6) можно легко получит следующую рекурсивную процедуру для вычисления свертки одномерного сигнала и фильтра с прямоугольным импульсным откликом:

$$y(n)=\alpha_1 y(n-1)+h(0)x(n)-h(M-1)x(n-M).$$

В соответствии с выражением (7) эта процедура требует два сложения и три умножения на один отсчет выходного сигнала. Однако, принимая во внимание, что $\alpha_1=1,\quad h(m)=b$, окончательное выражение для рекурсивного вычисления свертки принимает хорошо известное выражение:

$$y(n)=y(n-1)+b\big(x(n)-x(n-M)\big). \tag{9}$$

В такой форме для выполнения обработки требуется два сложения и одно умножение на один отсчет выходного сигнала.

2. Полу-рекурсивная процедура вычисления свертки изображения и двумерного неразделимого КИХ–фильтра

Для обобщения представленного выше одномерного подхода к построению рекурсивного алгоритма на двумерный случай введем понятие двумерной рекуррентной импульсной характеристики. Итак, назовем *двумерной рекуррентной импульсной характеристикой* такую ИХ, которая удовлетворяет следующему двумерному рекуррентному соотношению:

$$h(m_1,m_2)=\begin{cases} b_{m_1m_2}, \quad m_1=\overline{0,K_1-1},\ m_2=\overline{0,K_2-1}, \\ \sum\limits_{k=1}^{K_1}\alpha_k^1 h(m_1-k,m_2), \\ \qquad m_1=\overline{K_1,M_1-1},\ m_2=\overline{0,K_2-1}, \\ \sum\limits_{k=1}^{K_2}\alpha_k^2 h(m_1,m_2-k), \\ \qquad m_1=\overline{0,M_1-1},\ m_2=\overline{K_2,M_2-1}, \\ 0, \quad m_1\notin[0,M_1-1]\ or\ m_2\notin[0,M_2-1]. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь величины $\alpha_k^1\ \left(k=\overline{1,K_1}\right)$ задают коэффициенты вертикального рекуррентного соотношения, величины $\alpha_k^2\ \left(k=\overline{1,K_2}\right)$ задают коэффициенты горизонтального рекуррентного соотношения, а величины $b_{m_1m_2}$, $\left(m_1=\overline{0,K_1-1},\ m_2=\overline{0,K_2-1}\right)$ являются начальными значениями для двумерного рекуррентного соотношения. Из представленного выражения видно, что для вычисления значения импульсного отклика, используя выражение (10), необходимо использовать вначале вертикальное рекуррентное соотношение, которое задается в (10) выражением во второй строке, а затем уже горизонтальное рекуррентное соотношение, которое задается выражением в третьей строке (10). Однако подобный способ задания не единственный. А именно, двумерная рекуррентная ИХ может быть представлена в альтернативной форме, когда порядок использования вертикальных и горизонтальных рекуррентных соотношений обратный. Поэтому может быть использовано такое определение для рекуррентной ИХ:

$$h(m_1,m_2)=\begin{cases} \ldots \\ \sum\limits_{k=1}^{K_2}\alpha_k^2 h(m_1,m_2-k), \\ \qquad m_1=\overline{0,K_1-1},\ m_2=\overline{K_2,M_2-1}, \\ \sum\limits_{k=1}^{K_1}\alpha_k^1 h(m_1-k,m_2), \\ \qquad m_1=\overline{K_1,M_1-1},\ m_2=\overline{0,M_2-1}, \\ \ldots. \end{cases} \tag{11}$$

Следующее утверждение определяет связь между импульсными характеристиками, получаемыми с использованием этих двух представлений.

Утверждение. Значения двумерной рекуррентной ИХ зависят только от начальных значений и коэффициентов вертикального и горизонтального рекуррентных соотношений. Значения двумерной рекуррентной ИХ не зависят от формы представления двумерного рекуррентного соотношения.

Доказательство приведенного утверждения заключается в очевидной проверке.

Для синтеза рекурсивного алгоритма вычисления свертки используется выражение (10). Для этого подставим горизонтальное рекуррентное соотношение, представленное в третьей строке выражения (10), в выражение для двумерной свертки (1). Это дает следующее полу-рекурсивное выражение, которое похоже на одномерное рекурсивное выражение (6):

$$\begin{aligned} y(n_1,n_2) = \sum_{k=1}^{K_2} \alpha_k^2 y(n_1,n_2-k) + \\ + y_2^+(n_1,n_2) - y_2^-(n_1,n_2-M_2). \end{aligned} \tag{12}$$

Данное выражение определяет основное соотношение в процедуре рекурсивного вычисления двумерной свертки по ее предшествующим значениям. К сожалению, величины $y_2^+(n_1,n_2), y_2^-(n_1,n_2)$ определяются как двумерные свертки:

$$\begin{aligned} y_2^+(n_1,n_2) = \sum_{m_1=0}^{M_1-1} \sum_{m_2=0}^{K_2-1} h_2^+(m_1,m_2) x(n_1-m_1,n_2-m_2), \\ y_2^-(n_1,n_2) = \sum_{m_1=0}^{M_1-1} \sum_{m_2=0}^{K_2-1} h_2^-(m_1,m_2) x(n_1-m_1,n_2-m_2). \end{aligned} \tag{13}$$

Легко проверить, что импульсные характеристики $h_2^+(m_1,m_2)$ и $h_2^-(m_1,m_2)$, используемые в этих выражениях, задаются следующими выражениями и могут быть рассчитаны заранее:

$$\begin{aligned} &\left(m_2 = \overline{0,K_2-1}, \quad m_1 = \overline{0,M_1-1}\right), \\ &h_2^+(m_1,m_2) = h(m_1,m_2) - \sum_{k=0}^{m_2} \alpha_k^2 h(m_1,m_2-k), \\ &h_2^-(m_1,m_2) = \sum_{k=m_2+1}^{K_2} \alpha_k^2 h(m_1,M_2+m_2-k). \end{aligned} \tag{14}$$

Окончательно, рекурсивное вычисление двумерной свертки (1) с использованием выражений (12) и (13) требует следующее количество арифметических операций:

$$\begin{aligned} U_+(M_1,M_2,K_1,K_2) = 2K_2(M_1+0{,}5) - 1, \\ U_*(M_1,M_2,K_1,K_2) = 2K_2(M_1+0{,}5). \end{aligned} \tag{15}$$

В полученных выражениях для вычислительной сложности рекурсивная часть (12) процедуры требует всего K_2+1 операций сложения и K_2 операций умножения. А основная вычислительная сложность относится к вычислению значений двумерных сверток (13) изображения и двумерных КИХ-фильтров $h_2^+(m_1,m_2)$ и $h_2^-(m_1,m_2)$, рассчитываемых на границах исходной импульсной характеристики. Следовательно, снижение вычислительной сложности этих операций приведет к снижению сложности рекурсивного алгоритма вычисления свертки в целом.

3. Рекурсивная процедура вычисления свертки изображения и двумерного неразделимого КИХ-фильтра

Утверждение. Если ИХ фильтр $h(m_1,m_2)$ удовлетворяет вертикальному рекуррентному соотношению, заданному второй строкой выражения (10), тогда импульсные характеристики $h_2^+(m_1,m_2)$ и $h_2^-(m_1,m_2)$ также удовлетворяют этому рекуррентному соотношению.

Доказательство приведенного утверждения заключается в очевидной проверке.

С учетом приведенного утверждения следующие рекуррентные соотношения справедливы для импульсных характеристик $h_2^+(m_1,m_2)$ и $h_2^-(m_1,m_2)$:

$$h_2^\#(m_1,m_2) = \begin{cases} b^\#_{m_1m_2}, \quad m_1 = \overline{0,K_1-1},\ m_2 = \overline{0,K_2-1}, \\ \sum_{k=1}^{K_1} \alpha_k^1 h_2^\#(m_1-k,m_2), \\ \qquad m_1 = \overline{K_1,M_1-1},\ m_2 = \overline{0,K_2-1}, \\ 0, \ m_1 \notin [0,M_1-1] \text{ or } m_2 \notin [0,K_2-1]. \end{cases} \tag{16}$$

Здесь знак '#' обозначает либо знак «+», либо знак «-». Подставляя выражение (16) в выражение (13), получаем следующие два выражения для рекурсивного вычисления сверток (13):

$$\begin{aligned} y_2^+(n_1,n_2) = \sum_{k=1}^{K_1} \alpha_k^1 y_2^+(n_1-k,n_2) + \\ + y_{21}^{++}(n_1,n_2) - y_{21}^{+-}(n_1-M_1,n_2), \\ y_2^-(n_1,n_2) = \sum_{k=1}^{K_1} \alpha_k^1 y_2^-(n_1-k,n_2) + \\ + y_{21}^{-+}(n_1,n_2) - y_{21}^{--}(n_1-M_1,n_2). \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь величины $y_{21}^{\#\#}(n_1,n_2)$ вычисляются как двумерные свертки, задаваемые следующими выражениями:

$$\begin{aligned} y_{21}^{\#\#}(n_1,n_2) = h_{21}^{\#\#}(n_1,n_2) ** x(n_1,n_2) = \\ = \sum_{m_1=0}^{K_1-1} \sum_{m_2=0}^{K_2-1} h_{21}^{\#\#}(m_1,m_2) x(n_1-m_1,n_2-m_2). \end{aligned} \tag{18}$$

В приведенном выражении знак '**' обозначает двумерную свертку. Окончательный рекурсивный алгоритм состоит из трех шагов, каждый из которых должен быть выполнен для каждого отсчета выходного изображения.

<u>Алгоритм</u>

<u>Шаг 1.</u> Прямое вычисление четырех сверток (18): $y_{21}^{\#\#}(n_1,n_2) = h_{21}^{\#\#}(n_1,n_2) ** x(n_1,n_2)$.

Шаг 2. Рекурсивное вычисление значений $y_2^{+}(n_1,n_2), y_2^{-}(n_1,n_2)$, используя выражение (17).

Шаг 3. Рекурсивное вычисление очередного отсчета выходного изображения, используя выражение (12).

В следующей таблице представлены вычислительные сложности каждого из шагов предложенного алгоритма и его итоговая вычислительная сложность.

	$U_{+}(K_1,K_2)$	$U_{*}(K_1,K_2)$
Шаг 1	$4(K_1K_2-1)$	$4K_1K_2$
Шаг 2	$2(K_1+2)$	$2K_1$
Шаг 3	K_2+2	K_2
Итого	$4K_1K_2+2K_1+K_2+2$	$4K_1K_2+2K_1+K_2$

Таким образом, суммарное число всех арифметических операций $(U_{+}+U_{*})$ пропорционально величине $8K_1K_2$ и не зависит от размеров области определения ИХ фильтра.

4. Представление двумерного неразделимого КИХ-фильтра в виде двумерного реккурентного соотношения

Произвольная двумерная неразделимая нерекурсивная импульсная характеристика линейного фильтра может быть аппроксимирована двумерной рекурсивной ИХ. Получение коэффициентов вертикальных и горизонтальных рекуррентных соотношений связано с решением оптимизационной задачи. В качестве критерия задачи оптимизации может быть выбран критерий минимума среднеквадратической ошибки аппроксимации ИХ с помощью рекуррентной ИХ. К сожалению, такая задача оказывается существенно нелинейной относительно коэффициентов рекуррентных соотношений и не может быть решена в явном виде [5, 11]. Поэтому используем подход, предлагаемый в работе [11]. А именно, заменим критерий задачи оптимизации на другой, который позволяет записать решение задачи в явном виде. То есть, выберем в качестве показателя критерия величину линейного предсказания очередного отсчета ИХ посредством ее предшествующих отсчетов. Порядок предсказания должен соответствовать порядку рекуррентного соотношения. Тогда для вычисления коэффициентов рекуррентных соотношений в выражении (10) необходимо решить следующие две независимые задачи оптимизации:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^2 &= \sum_{m_2=0}^{M_2}\sum_{m_1=K_1}^{M_1-1}\left(h(m_1,m_2)-\sum_{k=1}^{K_1}\alpha_k^1 h(m_1-k,m_2)\right)^2 \to \min,\\
\varepsilon_2^2 &= \sum_{m_1=0}^{M_1}\sum_{m_2=K_2}^{M_2-1}\left(h(m_1,m_2)-\sum_{k=1}^{K_2}\alpha_k^2 h(m_1,m_2-k)\right)^2 \to \min.
\end{aligned} \qquad (19)$$

В соответствие с результатами, представленными в работе [11] решение, получаемое для измененной оптимизационной задачи, связано с решением первоначальной задачи оптимизации и может быть описано следующими двумя утверждениями.

Утверждение. Решения задач (19) дают оптимальное решение для первоначальной задачи оптимизации, если ИХ является рекуррентной и ее порядок равен порядку предсказания.

Утверждение. Решения задач (19) являются асимптотически оптимальным, то есть чем больше линейный размер ИХ, тем ближе получаемое решение к искомому решению первоначальной задачи оптимизации.

Поскольку оптимизационные задачи в (19) подобны, ниже будет дано решение первой из них (его детали могут быть найдены в работе [11]). Оно является решением системы линейных алгебраических уравнений и представимо в виде:

$$\overline{\alpha}^1 = [B_{\Sigma 1}]^{-1}\overline{b}_{\Sigma 1}.$$

Нотации, использованные в этом выражении, обозначают следующие вектора и матрицы:

$$\overline{\alpha}^1 = \begin{pmatrix}\alpha_1^1\\ \vdots \\ \alpha_{K_1}^1\end{pmatrix},\quad B_{\Sigma 1} = \begin{bmatrix} b_{11}^{\Sigma 1} & \cdots & b_{1K_1}^{\Sigma 1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{K_1 1}^{\Sigma 1} & \cdots & b_{K_1K_1}^{\Sigma 1}\end{bmatrix},\quad \overline{b}_{\Sigma 1} = \begin{pmatrix} b_{01}^{\Sigma 1}\\ \vdots \\ b_{0K_1}^{\Sigma 1}\end{pmatrix}.$$

Здесь величины $b_{sk}^{\Sigma 1}$ вычисляются в соответствии с выражением:

$$b_{sk}^{\Sigma 1} = \sum_{m_2=0}^{M_2-1}\sum_{m_1=K_1}^{M_1-1} h(m_1-s,m_2)h(m_1-k,m_2).$$

Явное аналитическое выражение для ошибки аппроксимации также может быть легко получено.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы "Фундаментальные исследования и высшее образование" (BRHE) и гранта Президента РФ №НШ-1007.2003.01 .

Литература

1. Blahut R.E. Fast Algorithms for Digital Signal Processing // Reading, Wokingham: Addison-Wesley, 1985.
2. Dudgeon D.E., Mersereau R.M. Multidimensional Digital Signal Processing // Prentice-Hall, Inc., Cliffs, 1984.
3. Ярославский Л.П. О возможности параллельной и рекурсивной организации цифровых фильтров // Радиотехника, No. 3, 1984, стр. 87-91.
4. Сергеев В.В., Параллельно-рекурсивные КИХ-фильтры для обработки изображений // Компьютерная оптика, 1992. No.10-11, с.186–201.
5. Chernov A.V. Fast Recursive Computation 1D and 2D Finite Convolution // Proceedings of 7th International Conference on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies, St.Peterburg, Russia, 2004. P.1001-1004.

6. Glumov N.I., Myasnikov V.V., Sergeyev V.V. Application of polynomial bases for image processing using sliding window // SPIE, Image Processing and Computer Optics, 1994. Vol.2363, P.40-49.
7. Glumov N.I., Myasnikov V.V., Sergeyev V.V. Parallel-Recursive Local Image Processing and Polynomial Bases // Proceedings of the Third IEEE International Conference on Electronics, Circuits, and Systems ICECS'96, Rodos, Greece, 1996. P.696-699
8. Myasnikov V.V. Methods for Designing Recursive FIR Filters // 7-th International Conference on Computer Vision and Graphics (ICCVG-2004), Warsaw, Poland, Springer, 2004. P.845-850.
9. Myasnikov V.V. Recursive algorithm of calculation the convolution of image and inseparable 2-*D* polynomial FIR-filter // Proc. of 7th Int. Conf. on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies, St.Peterburg, Russia, 2004. P.327-330.
10. Lidl R. and Niederreiter H. Finite Fields // 2-nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
11. Myasnikov V.V. On the solution of the recurrent equation used for the FIR-filter implementation // The IASTED International Conference on Signal and Image Processing (ACIT-SIP 2005), Novosibirsk, Russia, June 20-24, 2005 (printing).
12. Ifeachor E.C., Jervis B.W. Digital Signal Processing: A Practical Approach // Prentice-Hall, Inc., Cliffs, 2002.

On recursive computation of the convolution of an image with a two-dimensional inseparable FIR filter

V.V. Myasnikov[1]
[1]*Image Processing Systems Institute of RAS*
[2]*Samara State Aerospace University(SSAU)*

Abstract:

The paper proposes a method for constructing an algorithm for the recursive calculation of the convolution of an image and a two-dimensional filter with an inseparable finite impulse response (FIR). This method is based on the representation of the final impulse response of the filter through vertical and horizontal recurrence relations. Each of the recurrence relations leads to a semi-recursive procedure for calculating the convolution of the image and the two-dimensional FIR filter. In turn, each of these semi-recursive procedures consists of two parts. The first part of the procedure is a recursive relation designed to recalculate the values in the procedure, and the second part is the non-recursive calculation of convolutions at the boundaries of the impulse response. In order to move from the developed semi-recursive procedure to a completely recursive algorithm for computing the desired convolution, a special statement is proved in the paper. This statement shows that if the impulse response of the target filter satisfies the recurrence relations both vertically and horizontally, then all the additional impulse responses involved in the calculation of convolutions at the borders of the FIR filter correspond to the same recurrence relations. This statement allows to modify the resulting procedure into a fully recursive algorithm for calculating the convolution of the image and the two-dimensional inseparable FIR filter. The paper also provides estimates of the computational complexity of the proposed recursive algorithm, shown by the number of arithmetic operations.

Keywords: FIR filter, inseparable finite impulse response, recurrence relations, recursive algorithm

Acknowledgments: This work was supported by the Russian-American program "Basic Research and Higher Education" (BRHE) and a grant from the President of the Russian Federation No. НШ-1007.2003.01.

Citation: Myasnikov VV. On recursive computation of the convolution of an image with a two-dimensional inseparable FIR filter. Computer Optics 2005; 27: 117-122.

References:

[1] Blahut RE. Fast algorithms for digital signal processing. Reading, Wokingham: Addison-Wesley; 1985. ISBN: 978-0-201-10155-3.
[2] Dudgeon DE, Mersereau RM. Multidimensional digital signal processing. Cliffs: Prentice-Hall Inc; 1984. ISBN: 978-0-13-227638-2.
[3] Yaroslavsky LP. The possibility of parallel and recursive organization of digital filters. Radiotekhnika 1984; 3: 87-89.
[4] Sergeev VV. Parallel-recursive FIR-filters for image processing [In Russian]. Computer Optics 1992; 10-11: 186-201.
[5] Chernov AV. Fast recursive computation 1D and 2D finite convolution. Proc 7th Int Conf Pattern Recogn Image Anal (St. Petersburg, Russia) 2004: 1001-1004.
[6] Glumov NI, Myasnikov VV, Sergeyev VV. Application of polynomial bases for image processing using sliding window. Proc SPIE 1994; 2363: 40-49. DOI: 10.1117/12.199649.
[7] Glumov NI, Myasnikov VV, Sergeyev VV. Parallel-recursive local image processing and polynomial bases. Proc 3rd Int Conf on Electronics, Circuits, and Systems 1996: 696-699. DOI: 10.1109/ICECS.1996.584457.
[8] Myasnikov VV. Methods for designing recursive FIR filters. In Book: Wojciechowski K, Smolka B, Palus H, Kozera RS, Skarbek W, Noakes L, eds. Computer Vision and Graphics. Computational Imaging and Vision, Vol 32. Dordrecht: Springer; 2004: 845-850. DOI: 10.1007/1-4020-4179-9_123.
[9] Myasnikov VV. Recursive algorithm of calculation the convolution of image and inseparable 2-D polynomial FIR-filter. Proc 7th Int Conf Pattern Recogn Image Anal (St. Peterburg, Russia) 2004: 327-330.
[10] Lidl R, Niederreiter H. Finite fields. Cambridge: Cambridge University Press; 1997. ISBN: 978-0-521-39231-0.
[11] Myasnikov VV. On the solution of the recurrent equation used for the FIR-filter implementation. Proc 2nd IASTED Int Multi-Conf on Automation, Control, and Information Technology – Signal and Image Processing 2005; 2005: 158-163.
[12] Ifeachor EC, Jervis BW. Digital signal processing: A practical approach. 2nd ed. Cliffs: Prentice-Hall Inc; 2001. ISBN: 978-0-201-59619-9.