

## ДИФРАКЦИЯ КОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ И ГАУССОВОГО ПУЧКА НА СПИРАЛЬНОЙ ФАЗОВОЙ ПЛАСТИНКЕ

*В.В. Котляр, А.А. Ковалев, С.Н. Хонина, Р.В. Скиданов, В.А. Сойфер, Я. Турунен*

*Институт систем обработки изображений РАН*

*Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва  
Университет Йёнсуу, Финляндия*

### Аннотация

Получено аналитическое выражение для дифракции в дальней зоне конической волны на спиральной фазовой пластинке (СФП) с произвольным целым порядком сингулярности  $n$ . Дифракция конической волны на СФП эквивалентна дифракции плоской волны на винтовом аксиконе. Аналитически произведено сравнение дифракции конической волны и Гауссова пучка на СФП. Показано, что в обоих случаях формируется световое кольцо, и функция интенсивности при малых значениях радиальной переменной  $\rho$  растёт пропорционально  $\rho^{2n}$ , а при больших  $\rho$  убывает как  $n^2\rho^{-4}$ .

Прямой записью электронным лучом на резисте изготовлена 32-уровневая СФП 2-го порядка диаметром 5 мм. С помощью этой СФП пучок гелий-неонового лазера был преобразован в пучок с фазовой сингулярностью и кольцевым распределением интенсивности.

### Введение

Спиральная фазовая пластинка (СФП) как оптический элемент, функция пропускания которого пропорциональна  $\exp(in\varphi)$ ,  $\varphi$  – полярный угол,  $n$  – целое число (порядок СФП), впервые изготовлен и проанализирован в [6]. В последнее время, особенно в связи с оптической манипуляцией микрочастицами, возрос интерес к СФП [3, 9, 10, 12, 15, 16]. В [12] СФП диаметром несколько миллиметров с  $n=3$  изготовлена и охарактеризована для длины волны 831 нм с помощью технологии формовки с максимальной высотой микрорельефа 5 мкм. Точность изготовления рельефа поверхности СФП на полимере была очень высокой (ошибка ~3%). В [3] с помощью обычного сканирующего электронного микроскопа, переделанного в электронный литограф, в режиме прямой записи на негативном фоторезисте SU-8 была записана СФП диаметром 500 мкм с  $n=1$  и с непрерывным профилем рельефа с максимальной высотой ступеньки 1,04 мкм для гелий-неонового лазера. Сформированная картина дифракции Гауссова пучка на СФП отличалась от идеальной формы «пончика» только на 10%. Изготовленная таким образом СФП была использована для оптического захвата одновременно 6 латексных микросфер диаметром 3 мкм каждая и с показателями преломления  $n'=1,59$ . В [10] те же авторы показали, что при смещении центра СФП от оси Гауссова пучка происходит формирование неосевого вихря (vortex), поперечное распределение интенсивности которого вращается вокруг оптической оси при распространении пучка.

В [15] с помощью стандартной фотолитографической техники с использованием четырех бинарных амплитудных масок (фотошаблонов) была изготовлена и исследована 16-уровневая и 16-секторная СФП для импульсного твердотельного лазера с длиной волны 789 нм. СФП была изготовлена на  $\text{SiO}_2$  диаметром 100 мм и с максимальной высотой ступеньки

рельефа 928 нм. В [9] с помощью прямой записи электронным лучом на негативном фоторезисте для длины волны 514 нм была изготовлена СФП диаметром 2,5 мм и глубиной рельефа 1082 нм. Кроме того, в [9] проведен теоретический анализ дифракции Френеля для плоской волны и Гауссова пучка на СФП. В [16] с помощью жидко-кристаллического пространственного модулятора света и неодимового лазера с удвоенной частотой и длиной волны 532 нм сформирована СФП с высоким порядком сингулярности  $n=80$ . Кроме того, в [16] получены аналитические выражения для дифракции Фраунгофера Гауссова пучка на СФП с большими порядками сингулярности  $n \gg 1$ .

СФП может быть использована в качестве пространственного фильтра для выполнения обобщенного преобразования Гильберта [6] и для повышения контраста при наблюдении фазовых объектов в микроскопии [4]. В [5] приведены результаты компьютерного моделирования векторной дифракции линейно-поляризованного света на СФП. В частности, численно рассчитано распределение интенсивности в фокусе сферической линзы с числовой апертурой, близкой к единице, и показано, что из-за влияния поляризации распределение интенсивности по кольцу становится не симметричным.

Кроме исследований дифракции плоской волны и Гауссова пучка на СФП рассматривалась также и дифракция конической волны на СФП. В [8] с помощью полутонковой фотолитографии был изготовлен на низкоконтрастном фоторезисте оптический элемент, пропускание которого пропорционально произведению функции пропускания аксикона и СФП. Этот элемент в [8] назван трохосоном, то есть формирующим световую трубку. Такой оптический элемент иногда называют винтовым аксиконом [13]. Дифракция плоской волны на таком элементе тождественна дифракции конической волны на СФП. В [7] с помощью 16-уровневого винтового аксикона 5-го порядка диаметром 6 мм, изготовленного с помощью прямой записи электронным лучом, и гелий-

неонового лазера был осуществлен оптический захват и вращение с периодом 2 сек частиц дрожжей и полистироловых шариков диаметром 5 мкм.

В [2] с помощью жидко-кристаллического пространственного модулятора света сформированы конико-винтовые оптические пучки, распределение интенсивности которых не кольцевое, а спиральное.

В [11] была изготовлена и исследована СФП для излучения с круговой поляризацией и длиной волны 10,6 мкм. Этот оптический элемент состоял из набора пространственно-инвариантных субволновых диэлектрических дифракционных решеток. Недостаток метода в том, что (а) предполагается круговая поляризация падающей волны и (б) оптическая схема содержит дополнительные элементы (четверть-волновая пластинка и поляризатор), снижающие дифракционную интенсивность. Кроме того, субволновые дифракционные решетки для видимого диапазона трудоемки в изготовлении.

В данной работе получено аналитическое выражение, описывающее световое поле в фокальной плоскости идеальной, безаберрационной, линзы, освещенной монохроматической коническо-винтовой волной. Анализ полученного выражения показал, что в случае неограниченной коническо-винтовой волны в фокальной плоскости формируется световое кольцо с бесконечной интенсивностью. Радиальное распределение интенсивности вблизи центра картины дифракции пропорционально  $r^{2n}$ , где  $r$  – радиальная координата, а  $n$  – порядок сингулярности СФП. При больших  $r$  интенсивность за кольцом спадает пропорционально  $n^2 r^{-4}$ . В [14, 9] было получено аналитическое выражение для дифракции Фраунгофера Гауссового пучка на СФП. В данной работе показано, что Гауссовый пучок при дифракции на СФП в дальней зоне также формирует кольцо, и функция интенсивности при малых  $r$  внутри кольца меняется пропорционально  $(wr)^{2n}$ , где  $w$  – радиус перетяжки Гауссового пучка, а при больших  $r$  снаружи кольца интенсивность убывает также как и для винтового аксикона, пропорционально  $n^2 r^{-4}$ .

Также в данной работе проведены экспериментальные исследования по формированию с помощью СФП высококачественного трубчатого пучка с кольцевым распределением интенсивности. СФП была изготовлена по технологии прямой записи электронным пучком на резисте. В отличие от работы [3] используемая технология не накладывает жестких ограничений на диаметр СФП.

### 1. Дифракция Фраунгофера конической волны на СФП

Функция пропускания винтового аксикона [8] имеет вид:

$$f_n(r, \theta) = \exp(i\alpha r + in\theta), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1)$$

где  $\alpha$  – параметр аксикона, который связан с углом  $\nu$  при вершине конуса с показателем преломления  $n'$  и длиной волны  $\lambda$  соотношением:

$$\alpha = \frac{2\pi(n'-1)}{\lambda \tan(\nu/2)}. \quad (2)$$

Функцию (1) можно также рассматривать, как комплексную амплитуду света сразу за СФП с функцией пропускания

$$g_n(r, \theta) = \exp(in\theta), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3)$$

при ее освещении конической волной с углом при вершине  $2\beta$ . В этом случае параметр конической волны  $\alpha$  будет равен

$$\alpha = \frac{2\pi \sin \beta}{\lambda}. \quad (4)$$

Дифракция Фраунгофера плоской неограниченной волны на винтовом аксиконе или дифракция конической волны на СФП описываются преобразованием Фурье от функции (1). В полярных координатах комплексная амплитуда света в дальней зоне дифракции будет иметь вид:

$$F_n(\rho, \varphi) = \frac{-ik}{2\pi f} \times \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp\left[i\alpha r + in\theta - \frac{ik}{f} r \rho \cos(\theta - \varphi)\right] r dr d\theta, \quad (5)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число,  $f$  – фокусное расстояние сферической линзы, в задней фокальной плоскости которой формируется картина дифракции Фраунгофера.

Уравнение (5) после преобразований можно записать в виде:

$$F_n(\rho, \varphi) = \frac{(-i)^{n+2} k}{f} \exp(in\varphi) \times \frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty \exp(i\alpha r) J_n\left(\frac{k}{f} r \rho\right) dr, \quad (6)$$

где  $J_n(x)$  – функция Бесселя  $n$ -го порядка первого рода. На основе справочного интеграла [1] можно получить следующее выражение:

$$\int_0^\infty \exp(ibx) J_n(cx) dx = \begin{cases} \frac{\exp[in \arcsin(b/c)]}{(c^2 - b^2)^{1/2}}, & b < c, \\ \frac{c^n i^{n+1}}{[b + (b^2 - c^2)^{1/2}]^n (b^2 - c^2)^{1/2}}, & b > c. \end{cases} \quad (7)$$

Применив (7) к уравнению (6), получим явное выражение для комплексной амплитуды дифракции Фраунгофера конической волны на СФП:

$$F_n(\rho, \varphi) = \frac{-k}{f} \exp(in\varphi) \times \begin{cases} \frac{\bar{\rho}^n (\alpha + in\sqrt{\bar{\rho}^2 - \alpha^2})}{(\bar{\rho}^2 - \alpha^2)^{3/2} (\alpha + i\sqrt{\bar{\rho}^2 - \alpha^2})^n}, & \alpha < \bar{\rho}, \\ -i\bar{\rho}^n (\alpha + n\sqrt{\alpha^2 - \bar{\rho}^2}) / (\alpha^2 - \bar{\rho}^2)^{3/2} (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \bar{\rho}^2})^n, & \alpha > \bar{\rho}, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\bar{\rho} = k\rho/f$ . Из уравнения (8) следует, что при  $n=0$  простое выражение для дифракции Фраунгофера плоской волны на обычном аксиконе:

$$F_n(\rho) = \frac{-k}{f} \begin{cases} \frac{\alpha}{(\bar{\rho}^2 - \alpha^2)^{3/2}}, & \alpha < \bar{\rho}, \\ \frac{-i\alpha}{(\alpha^2 - \bar{\rho}^2)^{3/2}}, & \alpha > \bar{\rho}. \end{cases} \quad (9)$$

Из уравнений (8) и (9) видно, что амплитуда  $F_n(\rho, \varphi)$  имеет особенность при  $\alpha = \bar{\rho}$ . Это означает, что на расстоянии от центра Фурье-плоскости, равном  $\rho_0 = \alpha f/k$ , формируется световое кольцо с бесконечной плотностью энергии, но конечной ширины. Под шириной кольца с бесконечной интенсивностью можно понимать расстояние по радиусу между двумя точками, в которых интенсивность равна, например, единице (если интенсивность выражать безразмерной величиной). Из уравнения (8) следует выражение для интенсивности

$$\bar{I}_n(\rho) = |F_n(\rho, \varphi)|^2 = \left(\frac{k}{f}\right)^2 \begin{cases} \frac{\alpha^2 + n^2(\bar{\rho}^2 - \alpha^2)}{(\bar{\rho}^2 - \alpha^2)^3}, & \alpha < \bar{\rho}, \\ \frac{\bar{\rho}^n (\alpha + n\sqrt{\alpha^2 - \bar{\rho}^2})^2}{(\alpha^2 - \bar{\rho}^2)^3 (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \bar{\rho}^2})^{2n}}, & \alpha > \bar{\rho}. \end{cases} \quad (10)$$

Для нахождения ширины кольца приравняем интенсивность к некоторому значению  $I_0$  и найдем из (10) при  $n=0$  два числа  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , которые равны внешнему и внутреннему радиусам кольца:

$$\rho_{1,2} = \frac{f}{k} \left[ \alpha^2 \pm \left( \frac{\alpha k}{f} \right)^{2/3} \right]^{1/2}. \quad (11)$$

Полная ширина кольца по спаду интенсивности до уровня  $\bar{I}_0(\rho) = \bar{I}_0$  равна  $\rho_1 + \rho_2$  и увеличивается с ростом параметра аксикона  $\alpha$ . Заметим, что при  $\alpha < (k/f)^{1/2}$  внутренний радиус кольца становится нулевым или отрицательным. Это связано с тем, что на оптической оси при  $\rho=0$  интенсивность стано-

вится больше единицы,  $\bar{I}_0(\rho=0) > \bar{I}_0$ . Действительно, из уравнения (10) при  $\rho=0$  следует:

$$\bar{I}_n(\rho=0) = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ \left(\frac{k}{f\alpha^2}\right)^2, & n = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Из уравнения (12) видно, что для винтового аксикона ( $n \neq 0$ ) в центре Фурье-плоскости ( $\rho=0$ ) при любом  $\alpha$  будет наблюдаться нулевая интенсивность,  $\bar{I}_n(0) = 0$ .

Найдем функцию, описывающую интенсивность на внутренней стороне кольца, при  $\rho$ , стремящемся к нулю. Из уравнения (10) при  $\alpha \gg \bar{\rho}$  получим:

$$\bar{I}_n(\rho) = \left(\frac{k}{f}\right)^2 \left(\frac{\bar{\rho}}{\alpha}\right)^{2n} \frac{(n+1)^2}{4^n \alpha^4}. \quad (13)$$

Из уравнения (13) видно, что если стремиться к нулю одновременно и  $\alpha$  и  $\bar{\rho}$ , но так, чтобы их отношение  $\alpha/\bar{\rho}$  оставалось постоянным, то получим:

$$\bar{I}_n(\bar{\rho} \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0) \approx \alpha^{-4}. \quad (14)$$

Из уравнения (14) следует, что интенсивность вблизи центра Фурье-плоскости  $\bar{\rho}=0$  при  $\alpha \rightarrow 0$  будет стремиться к бесконечности, но в самой центральной точке ( $\rho=0$ ) интенсивность будет оставаться нулевой,  $\bar{I}_n(\bar{\rho}=0) = 0$ , при любом малом  $\alpha$ .

Из уравнения (13) также видно, что вблизи центра Фурье-плоскости интенсивность будет расти к бесконечности пропорционально радиусу в степени  $2n$ :

$$\bar{I}_n(\bar{\rho}) \approx \left(\frac{\bar{\rho}}{\alpha}\right)^{2n}, \quad \bar{\rho} \ll \alpha. \quad (15)$$

Из уравнения (10) следует также, что функция интенсивности на внешней стороне кольца при  $\alpha \ll \bar{\rho}$  спадает с увеличением радиальной переменной  $\rho$  следующим образом:

$$\bar{I}_n(\rho) \approx \left(\frac{fn}{k\rho^2}\right)^2. \quad (16)$$

Из уравнения (16) видно, что поведение функции интенсивности при больших  $\rho$  не зависит от  $\alpha$ . В частности, при  $\alpha=0$ , когда плоская волна освещает СФП, из уравнения (16) следует, что

$$\bar{I}_n(\bar{\rho}) = \begin{cases} 0, & \bar{\rho} = 0, \\ \left(\frac{kn}{f\bar{\rho}^2}\right)^2, & \bar{\rho} \neq 0. \end{cases} \quad (17)$$

На рис. 1 показан вид функции интенсивности на внутренней и внешней сторонах кольца для двух разных значений номера  $n$  ( $k/f=1$  мм<sup>2</sup>).

На рис. 1б, в показаны результаты численного моделирования дифракции Фраунгофера конической волны конечного радиуса  $R$  на СФП. Показана

зависимость распределения интенсивности  $I$ , вычисленной с помощью преобразования Фурье, от радиальной переменной  $\bar{\rho}$ . Из рис. 1б видно, что с ростом порядка СФП  $n$  происходит незначительное уменьшение максимального значения интенсивности на главном кольце (при  $\bar{\rho} = 2\text{мм}^{-1}$ ) из-за незначительного расширения кольца, и незначительного сдвига максимальной интенсивности в сторону больших значений радиальной переменной  $\bar{\rho}$ . При изменении  $n$  от 0 до 10 радиус кольца возрастает приблизительно на 7%. Это можно предположить из рис. 1а, из которого видно, что для неограниченного конического пучка возрастание порядка СФП  $n$  также приводит к сдвигу кривых интенсивности на внешней стороне кольца в направлении больших значений  $\bar{\rho}$ .

Из рис. 1в видно, что при постоянном  $n$  уменьшение радиуса  $R$  конической волны приводит к расширению главного кольца на дифракционной картине и к уменьшению максимального значения интенсивности. Заметим, что радиус кольца, т.е. расстояние от точки с максимальной интенсивностью на кольце до центра, который равен  $2\text{мм}^{-1}$ , остается неизменным. Следует отметить, что самое узкое распределение интенсивности получается в случае, когда радиус конической волны бесконечен.

Таким образом, аналитические выражения, полученные для дифракции неограниченной конической волны на СФП, применимы для анализа дифракции в реальных ситуациях, когда радиус конической волны конечен.

В заключении этого раздела исследуем подробнее амплитуду (9) как функцию с разрывом второго рода при  $\alpha = \bar{\rho}$ . Внутри кольца при  $\alpha > \bar{\rho}$  амплитуда  $F_0(\rho)$  из уравнения (9) является действительной функцией, а снаружи кольца при  $\alpha < \bar{\rho}$  функция  $F_0(\rho)$  является чисто мнимой. То есть при переходе по радиусу  $\rho$  через точку  $\alpha = \bar{\rho}$  функция  $F_0(\rho)$  приобретает фазовый сдвиг на  $(-\pi/2)$ . При  $\alpha = \bar{\rho}$  функция  $F_0(\rho)$  стремится к бесконечности, и если  $\alpha$  будет равна нулю (коническая волна вырождается в плоскую), то функция  $F_0(\rho)$  становится  $\delta$ -функцией. Это следует из уравнения (5) при  $n = 0$  и  $\alpha = 0$ :

$$F_0(\rho) = \frac{-ik}{f} \int_0^{\infty} J_0(r\bar{\rho}) r dr = \frac{-ik\delta(\bar{\rho})}{f\bar{\rho}}. \quad (18)$$

По свойству  $\delta$ -функции интеграл от нее должен быть равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1,$$

и тогда для функции (18) получим равенство:

$$\int_0^{\infty} F_0(\rho) \rho d\rho = \frac{-if}{2k}. \quad (19)$$

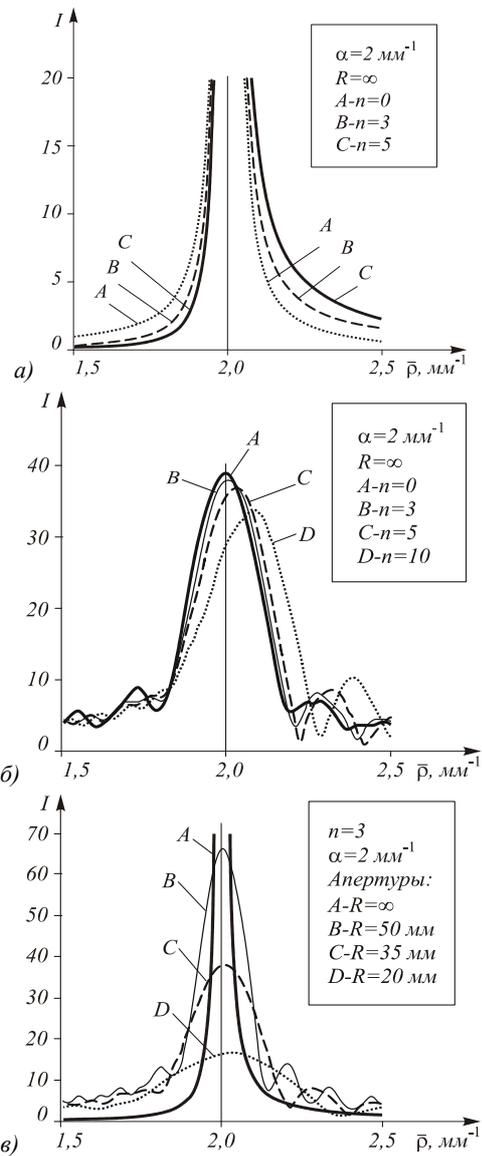


Рис. 1. Радиальное распределение интенсивности в частотной плоскости при дифракции конической волны на СФП ( $k/f = 1\text{мм}^{-2}$ ): (а) апертура - бесконечная, различные порядки сингулярности  $n$ : 0 (кривая А), 3 (кривая В) и 5 (кривая С), (б) апертура конечна ( $R=35\text{мм}$ ), различные порядки сингулярности  $n$ : 0, 3, 5, 10 (кривые А, В, С и D), и (в) порядок сингулярности  $n=3$ , различные апертуры - бесконечная (кривая А),  $R=50\text{мм}$ ,  $35\text{мм}$ , и  $20\text{мм}$  (кривые В, С, и D)

Чтобы получить выражение, аналогичное (19), исходя из явного вида функции  $F_0(\rho)$  из уравнения (9), требуется временно избавиться от расходимости при  $\alpha = \bar{\rho}$ . Это можно сделать, используя известный интеграл [1]:

$$\int_0^{\infty} \exp[-(i\alpha + \beta)r] J_0(\bar{\rho}r) r dr = \frac{i\alpha + \beta}{(\bar{\rho}^2 - \alpha^2 + \beta^2 + 2i\alpha\beta)^{3/2}}. \quad (20)$$

Видно, что функция в правой части уравнения (20) совпадает с правой частью уравнения (9) при

$\beta = 0$ . У функции в правой части уравнения (20) в знаменателе не может быть нуля ни при каких действительных значениях  $\alpha$  и  $\bar{\rho}$ . Пользуясь этой идеей, рассмотрим функцию вида:

$$F_0(\rho, \beta) = \frac{-\alpha k}{f(\bar{\rho}^2 - \alpha^2 + 2i\alpha\beta)^{3/2}}. \quad (21)$$

При  $\beta = 0$  функция  $F_0(\rho, \beta = 0)$  совпадает с функцией (9). Найдем интеграл от этой функции:

$$\int_0^{\infty} F_0(\rho, \beta) \rho d\rho = \frac{-if}{2k(1 - 2i\beta)^{1/2}}. \quad (22)$$

Уравнение (22) совпадает с уравнением (19) при  $\beta = 0$ . Причем уравнение (22) верно при любом  $\alpha$ , в том числе и при  $\alpha = 0$ . Это и доказывает, что функция (21) при стремлении  $\alpha$  к нулю и при  $\beta = 0$  стремиться к  $\delta$ -функции. Хотя интеграл от функции амплитуды (22) конечен, несмотря на разрыв второго рода при  $\alpha = \bar{\rho}$ , интеграл от интенсивности светового поля (полная энергия) будет равен бесконечности. Действительно, из уравнения (21) имеем:

$$\begin{aligned} \bar{I}_0(\rho, \beta) &= |F_0(\rho, \beta)|^2 = \\ &= \left(\frac{\alpha k}{f}\right)^2 [(\bar{\rho}^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2]^{-3/2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Интеграл от функции (23) равен:

$$\int_0^{\infty} \bar{I}_0(\rho, \beta) \rho d\rho = \frac{1}{8\beta^2} \left[ 1 + \left( 1 + 4\frac{\beta^2}{\alpha^2} \right)^{-1/2} \right]. \quad (24)$$

Из уравнения (24) следует, что при  $\beta \rightarrow 0$  независимо от величины  $\alpha$  интеграл от интенсивности (23) будет стремиться к бесконечности.

## 2. Дифракция Фраунгофера Гауссова пучка на СФП

В [14, 9] получены явные аналитические выражения, описывающие дифракцию Френеля Гауссова пучка на СФП. В [9] путем предельного перехода от дифракции в зоне Френеля к дальней зоне, также получено выражение для дифракции Фраунгофера Гауссова пучка на СФП. В этом разделе выведена аналитическая формула для описания дифракции Фраунгофера Гауссова пучка на СФП, расположенной в его перетяжке, которая формируется в фокальной плоскости сферической линзы. Также кратко повторены некоторые результаты из [9, 14] с целью сравнения дифракции обоих пучков – конического и Гауссова – на СФП.

Вместо уравнения (1) рассмотрим исходную функцию в виде:

$$f'_n(r, \theta) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + in\theta\right), \quad (25)$$

где  $w$  – радиус перетяжки Гауссова пучка. Тогда комплексная амплитуда дифракции Фраунгофера

Гауссова пучка в перетяжке на СФП будет описываться выражением:

$$\begin{aligned} F'_n(\rho, \varphi) &= \frac{(-i)^{n+1} k}{f} \exp(in\varphi) \times \\ &\times \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) J_n\left(\frac{k}{f} r\rho\right) dr. \end{aligned} \quad (26)$$

Известен справочный интеграл [1]:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp(-px^2) J_n(cx) x dx &= \frac{c\sqrt{\pi}}{8p^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{8p}\right) \times \\ &\times \left[ I_{(n-1)/2}\left(\frac{c^2}{8p}\right) - I_{(n+1)/2}\left(\frac{c^2}{8p}\right) \right], \end{aligned} \quad (27)$$

где  $I_\nu(x)$  – модифицированная функция Бесселя или функция Бесселя второго рода. С учетом уравнения (27) выражение (26) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} F'_n(\rho, \varphi) &= (-i)^{n+1} \exp(in\varphi) \left(\frac{kw^2}{4f}\right) \sqrt{2\pi x} \times \\ &\times \exp(-x) \left[ I_{(n-1)/2}(x) - I_{(n+1)/2}(x) \right], \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$x = \frac{1}{2} \left( \frac{kw\rho}{2f} \right)^2.$$

Функция интенсивности картины дифракции Фраунгофера Гауссова пучка на СФП имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{I}'_n(\rho) &= |F'_n(\rho, \varphi)|^2 = 2\pi \left(\frac{kw^2}{4f}\right)^2 \times \\ &\times \exp(-2x) \left[ I_{(n-1)/2}(x) - I_{(n+1)/2}(x) \right]^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Из уравнения (29) видно, что при  $x = 0$  в центре Фурье-плоскости интенсивность будет равна нулю ( $n \neq 0$ ):  $\bar{I}'_n(0) = 0$ . Сомножители  $x \exp(-2x)$  в уравнении (29) показывают, что в дальней зоне формируется кольцевое распределение интенсивности. Радиус кольца можно найти из уравнения [9]:

$$(n - 4x)I_{(n-1)/2}(x) + (n + 4x)I_{(n+1)/2}(x) = 0. \quad (30)$$

Найдем вид функции интенсивности на внешней стороне кольца при  $\rho \rightarrow \infty$  (или  $x \rightarrow \infty$ ).

Для этого воспользуемся асимптотикой функции Бесселя:

$$I_\nu(x) \approx \frac{\exp(x)}{\sqrt{2\pi x}} \left( 1 - \frac{4\nu^2 - 1}{8x} \right), \quad x \gg 1. \quad (31)$$

Тогда, вместо уравнения (29) при  $x \rightarrow \infty$ , получим:

$$\bar{I}'_n(\rho) \approx \left( \frac{nf}{k\rho^2} \right)^2. \quad (32)$$

Интересно, что уравнение (32) не зависит от радиуса перетяжки Гауссова пучка и совпадает с уравнением (16). Из этого совпадения можно сделать вывод о том, что асимптотика функции интенсивно-

сти при  $\rho \rightarrow \infty$  определяется только номером СФП, величиной фокуса сферической линзы и длиной волны излучения и не зависит от амплитудно-фазовых параметров освещающего СФП пучка  $\alpha$  и  $w$ .

Заметим, что выражение (32) можно получить из уравнения (29), устремляя к бесконечности радиус Гауссова пучка  $w \rightarrow \infty$  при фиксированном  $\rho$ .

Найдем вид функции интенсивности на внутренней стороне кольца. При стремлении  $\rho$  к нулю (при фиксированном  $w$ ) аргумент функции Бесселя  $x$  также стремится к нулю, и можно использовать первые члены разложения в ряд цилиндрической функции:

$$I_\nu(x) \approx \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \Gamma^{-1}(\nu+1), \quad x \ll 1, \quad (33)$$

где  $\Gamma(x)$  – гамма-функция. Тогда вместо уравнения (29) при  $\rho \rightarrow 0$ , получим:

$$\bar{I}'_n(\rho) \approx \pi \Gamma^{-2}\left(\frac{n+1}{2}\right) \left(\frac{kw^2}{f}\right) \left(\frac{kw\rho}{4f}\right)^{2n}. \quad (34)$$

Из уравнения (34) видно, что интенсивность вблизи центра Фурье-плоскости растет как степень  $2n$  от радиальной координаты:

$$\bar{I}'_n(\rho) \approx (w\rho)^{2n}, \quad \rho \ll 1. \quad (35)$$

Вид асимптотики (35) совпадает с уравнением (15) для дифракции конической волны на СФП, если заменить  $w$  на  $1/\alpha$ .

Если одновременно со стремлением  $\rho$  к нулю устремить к бесконечности радиус Гауссова пучка  $w$  так, чтобы их произведение  $w\rho$  оставалось постоянным, то из уравнения (34) следует, что интенсивность вблизи центра Фурье-плоскости будет стремиться к бесконечности пропорционально квадрату радиуса перетяжки:

$$\bar{I}'_n(\rho \rightarrow 0, w \rightarrow \infty) \approx w^2, \quad \rho w = const, \quad (36)$$

но в самой центральной точке при  $\rho = 0$  интенсивность будет нулевой,  $\bar{I}'_n(\rho = 0) = 0$ , при любом  $w$ .

### 3. Экспериментальные исследования дифракции света на СФП

Ранее уже сообщалось об изготовлении и экспериментах с СФП, изготовленных по современным технологиям микролитографии [3, 6, 9, 10, 12, 15]. Однако все эти технологии имеют свои недостатки. Например, в [3] для изготовления СФП использовался обычный сканирующий электронный микроскоп, специально переделанный для прямой записи на резисте. Но система управления электронным лучом микроскопа не позволяет «рисовать» на резисте качественные «изображения» диаметром большим 500 мкм. Технология фотолитографии с помощью нескольких фотошаблонов, которая использовалась в [15] для изготовления СФП, включает в себя кри-

стическую операцию совмещения фотошаблонов, которая вносит дополнительные ошибки в изготавливаемый микрорельеф. Использование стандартного электронного литографа в режиме прямой записи лучом на резисте для изготовления СФП свободно от перечисленных недостатков.

В данной работе с помощью изготовленной 32-уровневой СФП было сгенерировано световое поле с сингулярностью второго порядка. Размер элемента равен  $2,5 \times 2,5$  мм<sup>2</sup> и размер отсчета  $5 \times 5$  нм<sup>2</sup>. Эти СФП предназначены для длины волны света  $\lambda = 633$  нм. Глубина микрорельефа, измеренная с помощью контактного профилометра, составила 1320 нм. Оптимальная глубина 32-уровневого микрорельефа 1341 нм в предположении, что показатель преломления резиста равен  $n_r = 1,457$  (точное значение неизвестно). Тем самым отклонение от оптимальной глубины составляет только около 1%. В [9] СФП изготавливалась по этой же технологии, но для длины волны 514 нм, а в экспериментах использовалась длина волны 543 нм. Это привело к невысокому качеству формирования трубчатого пучка. В этой работе и при проектировании СФП и в экспериментах использовалась одна и та же длина волны гелий-неонового лазера 633 нм. Поэтому распределение интенсивности сформированного пучка действительно обладает кольцевой симметрией. На рис. 2 показаны экспериментальные результаты генерирования лазерного поля с фазовой сингулярностью второго порядка. На рис. 2а показано оцененное распределение фазы (белый цвет означает нулевую фазу, черный –  $2\pi(1 - 1/N)$ , где  $N$  – число уровней квантования). На рис. 2б показан микрорельеф СФП, полученный с помощью интерферометра NEWVIEW 5000 Zygo (200-кратное увеличение, наклонный вид). Рисунки 2в-д показывают распределения интенсивности, зарегистрированные CCD-камерой на различных расстояниях от СФП. На рис. 2е показана дифракция Фраунгофера, полученная с помощью сферической линзы с фокусным расстоянием  $f = 135$  мм, при дифракции плоской волны на указанной СФП.

На рис. 3 показано экспериментальное распределение в фокальной плоскости сферической линзы с фокусным расстоянием  $f = 135$  мм. Кольцевое распределение интенсивности на рис. 3а было получено в результате дифракции плоской волны радиуса  $R = 2,5$  мм на дифракционном аксиконе с параметром  $\alpha = 44,5$  мм<sup>-1</sup> и СФП пятого порядка ( $n = 5$ ). Длина волны лазерного пучка была равна  $\lambda = 0,633$  мкм, мощность – 1 милливатт. Второе большее кольцо (рис. 3а) появляется потому, что максимальная высота микрорельефа не позволяет получать точную задержку фазы на  $2\pi$ . Кольцевое распределение интенсивности на рис. 3б получено в результате дифракции Гауссова пучка с радиусом перетяжки  $\sigma = 0,8$  мм на СФП второго порядка ( $n = 2$ ).

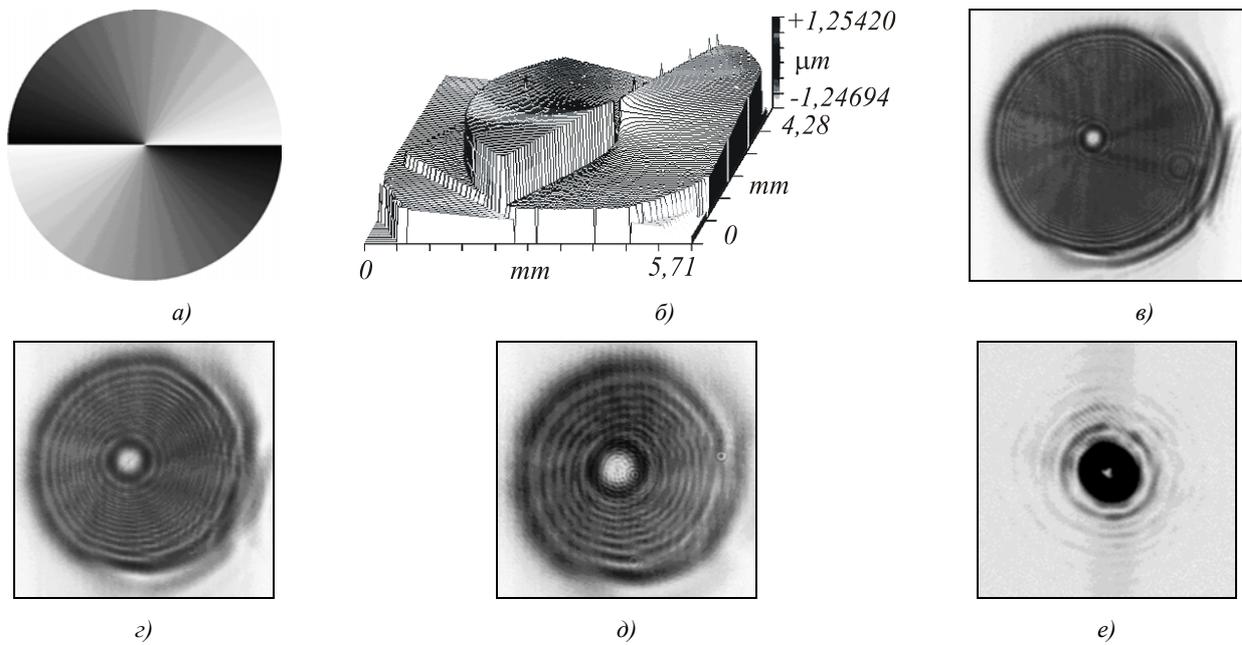


Рис. 2. Генерация лазерного поля с фазовой сингулярностью второго порядка: (а) теоретическое распределение фазы, (б) центральная часть микрорельефа СФП, и распределения интенсивности поля, зарегистрированные CCD-камерой на различных расстояниях от СФП: (в)  $z=10$  мм, (г)  $z=40$  мм, (д)  $z=80$  мм, (е) в фокальной плоскости линзы

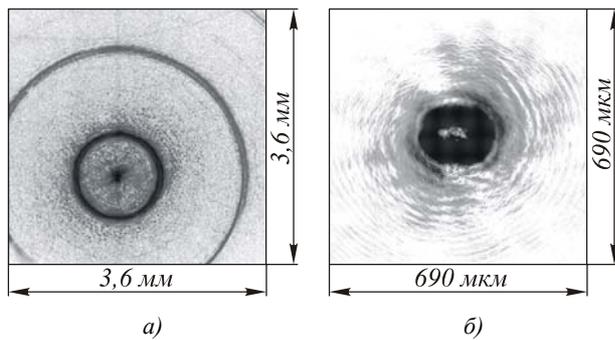


Рис. 3. Дифракция Фраунгофера от (а) конической волны (параметр аксикона:  $\alpha = 44,5 \text{ мм}^{-1}$ ) на СФП порядка  $n=5$  и (б) Гауссова пучка (радиус перетяжки:  $\sigma = 0,8 \text{ мм}$ ) на СФП порядка  $n=2$  (б)

В результате неточного совмещения центра Гауссова пучка и центра СФП на дифракционной картине нарушается круговая симметрия. Заметим, что при дифракции на СФП плоской ограниченной волны этой проблемы не возникает (рис. 2е). На рис. 4 показано сравнение теоретических и экспериментальных профилей кольцевых распределений интенсивности, показанных на рис. 3. Графики интенсивности на рис. 4 а, б калиброваны с учетом мощности освещающего лазерного пучка, измеренной ваттметром с точностью 15%. Радиус кольца на рис. 4а приблизительно равен оценке из выражения (8):  $\rho_0 = \alpha f/k = 605 \text{ мкм}$ , в то время как ширина кольца может быть получена с помощью выражения  $\Delta\rho = 2\lambda f/R \approx 68 \text{ мкм}$ . Радиус кольца на рис. 4б может быть получен с помощью соотношения из [9]:  $\rho_2 = 0,46\lambda f/\sigma = 45 \text{ мкм}$ . Из рис. 4а, б видно, что

экспериментальные и теоретические кривые довольно хорошо согласуются.

### Заключение

В работе достигнуты следующие результаты. Получено аналитическое выражение для дифракции в дальней зоне конической волны на спиральной фазовой пластинке с произвольным целым порядком сингулярности  $n$ . Дифракция конической волны на СФП эквивалентна дифракции плоской волны на винтовом аксиконе. Получено аналитическое выражение для дифракции Фраунгофера Гауссова пучка на СФП, расположенной в его перетяжке. Аналитически произведено сравнение дифракции конической волны и Гауссова пучка на СФП. Показано, что в обоих случаях формируется световое кольцо и функция интенсивности при малых значениях радиальной переменной  $\rho$  растет пропорционально  $\rho^{2n}$ , а при больших  $\rho$  убывает как  $\rho^{-4}$ .

С помощью электронной литографии прямой записью электронным лучом на резисте изготовлена 32-уровневая СФП 2-го порядка диаметром 5 мм. С помощью этой СФП пучок гелий-неонового лазера был преобразован в пучок с фазовой сингулярностью и кольцевым распределением интенсивности. Экспериментально были получены результаты дифракции Фраунгофера для ограниченной плоской волны на СФП второго порядка ( $n=2$ ) и на дифракционном аксиконе (при  $n=5$ ), а также для дифракции Гауссова пучка на СФП второго порядка. Вычисленные и полученные экспериментально кривые радиального распределения интенсивности хорошо согласуются между собой.

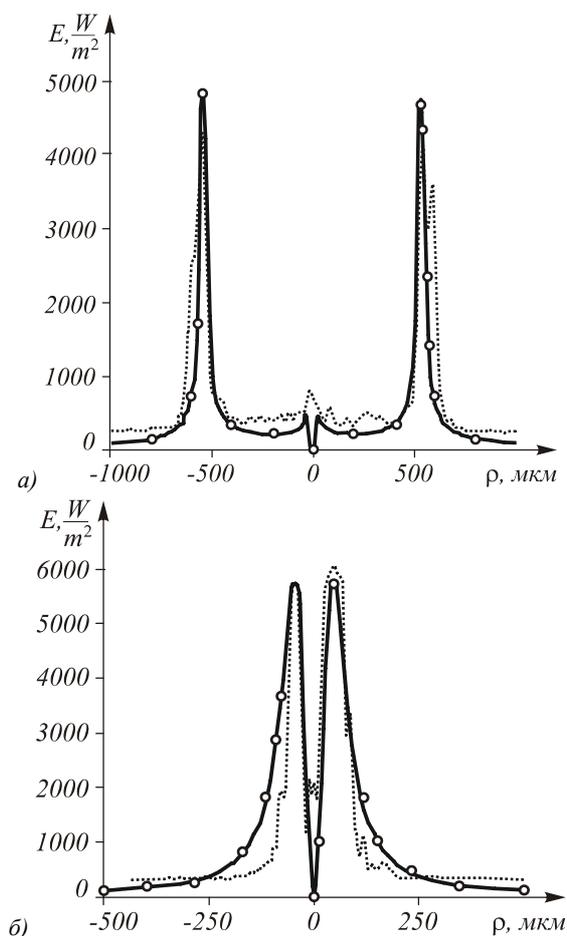


Рис. 4. Дифракция (а) конической волны и (б) Гауссова пучка на СФП: — экспериментальное и —\*—\* теоретическое распределение интенсивности

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, правительства Самарской области и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF Project SA-014-02) в рамках российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE), грантов Президента РФ МД-209.2003.01 и НШ-1007.2003.01, а также грантов РФФИ №№ 05-01-96505, 05-08-50298.

### Литература

1. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции // М.: Наука, 1983.

2. Alonzo C.A., Rodrigo P.J., Gluckstad J. Helico-conical optical beams: a product of helical and conical phase fronts // Opt. Expr., 2005. Vol. 13. No. 5. P. 1749-1760.
3. Cheong W.G., Lee W.M., Yuan X.-C., Zhang L.-S., Dholakia K., Wang H. Direct electron-beam writing of continuous spiral phase plates in negative resist with high power efficiency for optical manipulation // Appl. Phys. Lett., 2004. Vol. 85. No. 23. P. 5784-5786.
4. Furhapter S., Jesacher A., Bernet S., Ritsch-Marte M. Spiral phase contrast imaging in microscopy // Opt. Expr., 2005. Vol. 13. No. 3. P. 689-694.
5. Ganic D., Gan X., Gu M. Focusing of doughnut laser beams by a high numerical-aperture objective in free space // Opt. Expr., 2003. Vol. 11. No. 21. P. 2747-2752.
6. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Shinkarev M.V., Soifer V.A., Uspleniev G.V. The rotor phase filter // J. Mod. Opt., 1992. Vol. 39. No. 5. P. 1147-1154.
7. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Skidanov R.V., Soifer V.A., Jefimos K., Simonen J., Turunen J. Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements // J. Mod. Opt., 2004. Vol. 51. No. 14. P. 2167-2184.
8. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Shinkarev M.V., Uspleniev G.V. Trochoson // Opt. Commun., 1992. Vol. 91. No. 3-4. P. 158-162.
9. Koltlyar V.V., Almazov A.A., Khonina S.N., Soifer V.A., Elfstrom H., Turunen J. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate // J. Opt. Soc. Am. A, 2005. Vol. 22. No. 5. P. 849-861.
10. Lee W.M., Ahluwalia B.P.S., Yuan X.-C., Cheong W.C., Dholakia K. Optical steering of high and low index microparticles by manipulating an off-axis optical vortex // J. Opt. A: Pure Appl. Opt., 2005. Vol. 7. P. 1-6.
11. Niv A., Biener G., Kleiner V., Hasman E. Spiral phase elements obtained by use of discrete space-variant sub-wavelength gratings // Opt. Commun., 2005. Vol. 251. P. 306-314.
12. Oemrawsingh S.S.R., van Houwelingen J.A.W., Eliel E.R., Woerdman J.R., Vestegen E.J.K., Kloosterboer J.G., Hooft G.W. Production and characterization of spiral phase plates for optical wavelengths // Appl. Opt., 2004. Vol. 43. No. 3. P. 688-694.
13. Paterson C., Smith R. Higher-order Bessel waves produced by axicon-type computer-generated holograms // Opt. Commun., 1996. Vol. 124. P. 123-130.
14. Saks Z.S., Rozes D., Swatzlander G.A. Holographic formation of optical-vortex filaments // J. Opt. Soc. Am. B, 1998. Vol. 15. P. 2226-2234.
15. Sueda K., Miyaji G., Miyayaga N., Nakatsura M. Laguerre-Gaussian beam generated with a multilevel spiral phase plate for high intensity laser pulses // Opt. Expr., 2004. Vol. 12. No. 15. P. 3548-3553.
16. Sundbeck S., Gruzberg I., Grier D.G. Structure and scalling of helical modes of light // Opt. Lett., 2005. Vol. 30. No. 5. P. 1-13.

# Diffraction of a conical wave and a Gaussian beam by a spiral phase plate

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>, S.N. Khonina<sup>1,2</sup>, R.V. Skidanov<sup>1,2</sup>, V.A. Soifer<sup>1,2</sup>, J. Turunen<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Image Processing Systems Institute of RAS;

<sup>2</sup>Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolev;

<sup>3</sup>University of Joensuu, Finland

## Abstract

An analytical expression is obtained for the diffraction in the far zone of a conical wave on a spiral phase plate (SPP) with an arbitrary integer order of singularity  $n$ . Diffraction of a conical wave by an SPP is equivalent to the diffraction of a plane wave on a screw axicon. The diffraction of a conical wave and a Gaussian beam by an SPP is compared analytically. It is shown that in both cases a light ring is formed and the intensity function for small values of the radial variable  $\rho$  increases in proportion  $\rho^{2n}$ , and for large  $\rho$  decreases as  $n^2\rho^{-4}$ . A 32-level second-order SPP with a diameter of 5 mm was made by way of direct recording with an electron beam on a resist. Using this SPP, a beam of a helium-neon laser was converted into a beam with a phase singularity and an annular intensity distribution.

**Keywords:** Gaussian beam, conical wave, spiral phase plate, axicon, diffraction of a conical wave, helium-neon laser

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA, Khonina SN, Skidanov RV, Soifer VA, Turunen J. Diffraction of a conical wave and a Gaussian beam by a spiral phase plate. *Computer Optics* 2005; 28: 29-36.

## References

- [1] Prudnikov AP, Brychkov YuA, Marichev OI. Integrals and series. Volume 2: Special functions. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers; 1998.
- [2] Alonzo CA, Rodrigo PJ, Gluckstad J. Helico-conical optical beams: a product of helical and conical phase fronts. *Opt Express* 2005; 13(5): 1749-1760.
- [3] Cheong WG, Lee WM, Yuan X-C, Zhang L-S, Dholakia K, Wang H. Direct electron-beam writing of continuous spiral phase plates in negative resist with high power efficiency for optical manipulation. *Appl Phys Lett* 2004; 85(23): 5784-5786.
- [4] Furhapter S, Jesacher A, Bernet S, Ritsch-Marte M. Spiral phase contrast imaging in microscopy. *Opt Express* 2005; 13(3): 689-694.
- [5] Ganic D, Gan X, Gu M. Focusing of doughnut laser beams by a high numerical-aperture objective in free space. *Opt Express* 2003; 11(21): 2747-2752.
- [6] Khonina SN, Kotlyar VV, Shinkaryev MV, Soifer VA, Uspleniev GV. The rotor phase filter. *J Mod Opt* 1992; 39(5): 1147-1154. DOI: 10.1080/09500349214551151.
- [7] Khonina SN, Kotlyar VV, Skidanov RV, Soifer VA, Jefimos K, Simonen J, Turunen J. Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements. *J Mod Opt* 2004; 51(14): 2167-2184. DOI: 10.1080/09500340408232521.
- [8] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Shinkaryev MV, Uspleniev GV. Trochoson. *Opt Commun* 1992; 91(3-4): 158-162. DOI: 10.1016/0030-4018(92)90430-Y.
- [9] Kotlyar VV, Almazov AA, Khonina SN, Soifer VA, Elfstrom H, Turunen J. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate. *J Opt Soc Am A* 2005; 22(5): 849-861. DOI: 10.1364/JOSAA.22.000849.
- [10] Lee WM, Ahluwalia BPS, Yuan X-C, Cheong WC, Dholakia K. Optical steering of high and low index microparticles by manipulating an off-axis optical vortex. *J Opt A Pure Appl Opt* 2005; 7: 1-6.
- [11] Niv A, Biener G, Kleiner V, Hasman E. Spiral phase elements obtained by use of discrete space-variant subwavelength gratings. *Opt Commun* 2005; 251: 306-314.
- [12] Oemrawsingh SSR, van Houwelingen JAW, Eliel ER, Woerdman JR, Vestegen EJK, Kloosterboer JG, Hooft GW. Production and characterization of spiral phase plates for optical wavelengths. *Appl Opt* 2004; 43(3): 688-694.
- [13] Paterson C, Smith R. Higher-order Bessel waves produced by axicon-type computer-generated holograms. *Opt Commun* 1996; 124: 123-130.
- [14] Saks ZS, Rozes D, Swatzlander GA. Holographic formation of optical-vortex filaments. *J Opt Soc Am B* 1998; 15: 2226-2234.
- [15] Sueda K, Miyaji G, Miyanaga N, Nakatsura M. Laguerre-Gaussian beam generated with a multilevel spiral phase plate for high intensity laser pulses. *Opt Express* 2004; 12(15): 3548-3553.
- [16] Sundbeck S, Gruzberg I, Grier DG. Structure and scalling of helical modes of light. *Opt Lett* 2005; 30(5): 1-13.