

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА В ТРЕХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

И.В. Алимиков

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва

Найдены в аналитической форме гладкие решения нелинейного уравнения Шредингера в виде уединенных волн для случая трех пространственных измерений. Рассмотрено явление оптической самофокусировки.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, линейное однородное уравнение первого порядка, полный интеграл, уравнения характеристик, уединенные волны, оптическая самофокусировка.

Введение

Нелинейное уравнение Шредингера находит широкое применение в различных областях физики, например, в нелинейной оптике, физике плазмы, теории сверхпроводимости, физике низких температур. Для одного пространственного измерения теория нелинейного уравнения Шредингера детально разработана [1-3]. В этой статье рассматривается случай трехмерного пространства, т.е. изучается уравнение

$$i \partial \psi / \partial t + \nabla^2 \psi + 2\eta \psi |\psi|^2 = 0, \quad (1)$$

где $\psi(\mathbf{r}, t)$ – комплексная функция, η – вещественный параметр нелинейности.

Основной формализм

Найдем «стационарные» решения вида:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}) e^{i \varepsilon t}, \quad (2)$$

где ε – свободный параметр. Подставляя (2) в (1), получим

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon \varphi + 2\eta \varphi |\varphi|^2 = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) допускает решения в классе вещественных функций, где оно принимает вид

$$\nabla^2 \varphi = \varepsilon \varphi - 2\eta \varphi^3. \quad (4)$$

Будем искать решение уравнения (4) в виде сложной функции $\varphi = \varphi(u(\mathbf{r}))$, где $u(\mathbf{r}) = \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) / k$. Здесь \mathbf{k} – произвольная векторная постоянная $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$. Подстановка $\varphi = \varphi(u(\mathbf{r}))$ в (4) даёт

$$\varphi''(u) = \varepsilon \varphi(u) - 2\eta \varphi^3(u). \quad (5)$$

Перепишем (5) в виде

$$\varphi''(u) = \partial V(\varphi) / \partial \varphi,$$

где $V(\varphi) = (\varepsilon - \eta \varphi^2) \varphi^2 / 2$. «Потенциал» $V(\varphi)$ неотрицателен при $|\varphi| < \sqrt{\varepsilon / \eta}$ и имеет нули $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \sqrt{\varepsilon / \eta}$, $\varphi_3 = -\sqrt{\varepsilon / \eta}$, поэтому [4] граничными условиями для (4) примем $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_i$, $i = 1, 2, 3$; $\partial \varphi / \partial x_i = 0$ при $|\mathbf{r}| = \infty$.

Так как $\partial \varphi / \partial x_i = \varphi'(u) \partial u / \partial x_i = \varphi'(u) k_i / k = 0$ при $|\mathbf{r}| = \infty$, то это означает, что $\varphi'(u) = 0$ при $|u| = \infty$.

Умножим последнее уравнение на $\varphi'(u)$ и проинтегрируем. Получим $\varphi'^2 / 2 = V(\varphi) + C$. Из граничных условий следует, что $C = 0$. Интегрируя ещё раз, находим

$$\int d\varphi / \sqrt{2V(\varphi)} = u,$$

или

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi \sqrt{\varepsilon - \eta \varphi^2}} = \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) / k.$$

Вычисляя интеграл и обращая полученное выражение, имеем

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{\varepsilon / \eta}}{ch(\sqrt{\varepsilon \eta} \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) / k)}.$$

Очевидно $|\varphi| \leq \sqrt{\varepsilon / \eta}$. В силу симметрии (4) и (5) относительно преобразования $\varphi \leftrightarrow -\varphi$, решением будет также $\varphi_a = -\varphi$. Итак, окончательно

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\pm \sqrt{\varepsilon / \eta} e^{i \varepsilon t}}{ch(\sqrt{\varepsilon \eta} \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) / k)},$$

или, введя обозначение $a = \sqrt{\varepsilon / \eta}$, откуда $\varepsilon = a^2 \eta$,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\pm a \exp\{i a^2 \eta t\}}{ch(a \sqrt{\eta} \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) / k)}.$$

Если $\eta < 0$, т.е. $\eta = -|\eta|$, то (5) принимает вид

$$\varphi''(u) = \varepsilon \varphi(u) + 2|\eta| \varphi^3(u),$$

или

$$\varphi''(u) = \partial V(\varphi) / \partial \varphi,$$

где

$$V(\varphi) = (\varphi^2 + \varepsilon / 2 |\eta|) |\eta| / 2.$$

Несингулярное решение последнего уравнения существует только при $\varepsilon < 0$, т.е. $\varepsilon = -|\varepsilon|$,

$$\varphi''(u) = 2|\eta| \varphi^3(u) - |\varepsilon| \varphi(u). \quad (6)$$

Интегрируя (6) тем же способом, что и (5), получим

$$\pm \frac{1}{\sqrt{|\eta|}} \int \frac{d\varphi}{\varphi^2 - |\varepsilon| / 2 |\eta|} = \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) / k.$$

Вычисляя интеграл и обращая полученное выражение, находим

$$\varphi(\mathbf{r}) = \pm \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2|\eta|}} \operatorname{th} \left[\sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) / k \right].$$

Вводя обозначение $\sqrt{|\varepsilon|/2|\eta|} = a$, откуда $\varepsilon = -2a^2|\eta|$, окончательно имеем

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \pm a \operatorname{th} \left[a \sqrt{|\eta|} \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) / k \right] \exp\{-i2a^2|\eta|t\}.$$

В классе комплексных функций решение уравнения (3) ищем в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \quad (7)$$

где $f(\mathbf{r})$ – вещественная функция, $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ – свободный векторный параметр. Подставляя (7) в (3) и приравнявая к нулю мнимую и вещественную части полученного уравнения, находим

$$(\mathbf{q}\nabla f) = 0, \quad (8)$$

$$\nabla^2 f = (q^2 + \varepsilon)f - 2\eta f^3. \quad (9)$$

Уравнения (8) и (9) совместны, т.к. (8) является линейным однородным уравнением первого порядка и, как известно [5] из теории таких уравнений, решением уравнения (8) является любая дифференцируемая функция $f = f(s(\mathbf{r}))$, где $s(\mathbf{r})$ – полный интеграл уравнения

$$(\mathbf{q}\nabla s) = 0,$$

или

$$q_x \frac{\partial s}{\partial x} + q_y \frac{\partial s}{\partial y} + q_z \frac{\partial s}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

Если одна из координатных осей, например ось x , является выделенной среди других, то выбираем переменную x в качестве параметра уравнений характеристик для (10), записав его в виде

$$\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{q_y}{q_x} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{q_z}{q_x} \frac{\partial s}{\partial z} = 0.$$

Уравнения характеристик

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{q_y/q_x} = \frac{dz}{q_z/q_x}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q_y}{q_x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{q_z}{q_x}$$

элементарно интегрируются при начальных условиях $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$:

$$y = \frac{q_y}{q_x}(x - x_0) + y_0, \quad z = \frac{q_z}{q_x}(x - x_0) + z_0.$$

Для нахождения полного интеграла выражаем отсюда начальные данные

$$y_0 = y - \frac{q_y}{q_x}(x - x_0), \quad z_0 = z - \frac{q_z}{q_x}(x - x_0). \quad (11)$$

Согласно методу Коши [5], полный интеграл уравнения (10) имеет вид:

$$s(\mathbf{r}) = k_y y_0 + k_z z_0 + k_0,$$

где k_y, k_z – произвольные постоянные, k_0 – аддитивная произвольная постоянная, а y_0 и z_0 выражаются формулой (11), т.е.

$$s(\mathbf{r}) = k_y \left[y - \frac{q_y}{q_x}(x - x_0) \right] + k_z \left[z - \frac{q_z}{q_x}(x - x_0) \right] + k_0.$$

Аддитивную произвольную постоянную k_0 выберем в виде

$$k_0 = -k_y y_0 - k_z z_0,$$

тогда

$$s(\mathbf{r}) = k_y \left[y - y_0 - \frac{q_y}{q_x}(x - x_0) \right] + k_z \left[z - z_0 - \frac{q_z}{q_x}(x - x_0) \right].$$

В силу линейности уравнения (10) его полный интеграл можно умножить на любой числовой множитель $1/C$, что сделано для дальнейшего удобства. Итак,

$$s(\mathbf{r}) = \frac{k_y (y - y_0 - (x - x_0)q_y/q_x)}{C} + \frac{k_z (z - z_0 - (x - x_0)q_z/q_x)}{C}. \quad (12)$$

Подставляя $f = f(s(\mathbf{r}))$ в (9), получим

$$f''(s) \left[\frac{(k_y q_y + k_z q_z)^2}{q_x^2} + k_y^2 + k_z^2 \right] / C^2 = (q^2 + \varepsilon)f(s) - 2\eta f^3(s). \quad (13)$$

Положим

$$C = \sqrt{(k_y q_y + k_z q_z)^2 + q_x^2(k_y^2 + k_z^2)} / q_x.$$

Тогда (12) и (13) примут вид:

$$s(\mathbf{r}) = \frac{k_y [q_x(y - y_0) - q_y(x - x_0)]}{\sqrt{(k_y q_y + k_z q_z)^2 + q_x^2(k_y^2 + k_z^2)}} + \frac{k_z [q_x(z - z_0) - q_z(x - x_0)]}{\sqrt{(k_y q_y + k_z q_z)^2 + q_x^2(k_y^2 + k_z^2)}}, \quad (14)$$

$$f''(s) = (q^2 + \varepsilon)f(s) - 2\eta f^3(s). \quad (15)$$

При $\eta > 0$ несингулярное решение уравнения (15) существует только, если $q^2 + \varepsilon = a^2$. Тогда (15) примет вид:

$$f''(s) = a^2 f(s) - 2\eta f^3(s), \quad (16)$$

совпадающий по форме с уравнением (5). Повторяя ход решения уравнения (5), получим

$$f(\mathbf{r}) = \frac{\pm a / \sqrt{|\eta|}}{\operatorname{ch} a s(\mathbf{r})},$$

где $s(\mathbf{r})$ выражается громоздкой формулой (14). Так как $\varepsilon = a^2 - q^2$, то окончательно

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\pm a / \sqrt{\eta}}{ch a s(\mathbf{r})} \exp\left\{i[\mathbf{q}\mathbf{r} + (a^2 - q^2)t]\right\}.$$

Если $\eta < 0$, т.е. $\eta = -|\eta|$, то несингулярное решение уравнения (15) существует только при $q^2 + \varepsilon = -a^2$ и (15) принимает вид:

$$f''(s) = 2|\eta|f^3(s) - a^2f(s), \quad (17)$$

совпадающий по форме с уравнением (6). Интегрируя (17) тем же способом, что и (6), находим

$$f(\mathbf{r}) = \pm \frac{a}{\sqrt{2|\eta|}} th \frac{a s(\mathbf{r})}{\sqrt{2}}.$$

Учитывая, что $\varepsilon = -(a^2 + q^2)$, окончательно имеем

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \pm \frac{a}{\sqrt{2|\eta|}} th \left[\frac{a s(\mathbf{r})}{\sqrt{2}} \right] \left\{ i[\mathbf{q}\mathbf{r} - (a^2 + q^2)t] \right\}.$$

Нестационарные решения уравнения (1) будем искать в виде

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}, t) \exp\{i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t + \varphi_0)\}, \quad (18)$$

где $\varphi(\mathbf{r}, t)$ – вещественная функция, \mathbf{q} , ω и φ_0 – свободные параметры. Подставляя (18) в (1) и приравнявая к нулю мнимую и вещественную части полученного уравнения, находим

$$\partial\varphi / \partial t + 2(\mathbf{q}\nabla\varphi) = 0, \quad (19)$$

$$\nabla^2\varphi = (q^2 - \omega)\varphi - 2\eta\varphi^3. \quad (20)$$

Линейное однородное уравнение первого порядка (19) имеет своим решением любую дифференцируемую функцию $\varphi = \varphi(s(\mathbf{r}, t))$, где $s(\mathbf{r}, t)$ – полный интеграл уравнения

$$\partial s / \partial t + 2(\mathbf{q}\nabla s) = 0,$$

или в развёрнутой форме

$$\frac{\partial s}{\partial t} + 2\left(q_x \frac{\partial s}{\partial x} + q_y \frac{\partial s}{\partial y} + q_z \frac{\partial s}{\partial z}\right) = 0. \quad (21)$$

Уравнения характеристик для (21) имеют вид

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{2q_x} = \frac{dy}{2q_y} = \frac{dz}{2q_z},$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = 2q_x, \quad \frac{dy}{dt} = 2q_y, \quad \frac{dz}{dt} = 2q_z.$$

Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений элементарно интегрируется при начальных условиях $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$:

$$x = 2q_x t + x_0, \quad y = 2q_y t + y_0, \quad z = 2q_z t + z_0.$$

Выражаем отсюда начальные данные

$$x_0 = x - 2q_x t, \quad y_0 = y - 2q_y t, \quad z_0 = z - 2q_z t. \quad (22)$$

Согласно методу Коши, полный интеграл уравнения (21) имеет вид:

$$s = k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0 + k_0,$$

где k_x, k_y, k_z – произвольные постоянные, k_0 – аддитивная произвольная постоянная, а x_0, y_0, z_0 – выражены согласно (22), т.е.

$$s = k_x(x - 2q_x t) + k_y(y - 2q_y t) + k_z(z - 2q_z t) + k_0.$$

Аддитивную произвольную постоянную k_0 выберем в виде

$$k_0 = -k_x x_0 - k_y y_0 - k_z z_0,$$

тогда

$$s = k_x(x - x_0 - 2q_x t) + k_y(y - y_0 - 2q_y t) + k_z(z - z_0 - 2q_z t),$$

что можно записать в векторной форме

$$s = \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - 2\mathbf{q}t). \quad (23)$$

В силу линейности уравнения (21) его решение (23) можно умножить на любой числовой множитель $1/C$, что сделано для дальнейшего удобства. Итак, окончательно

$$s(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - 2\mathbf{q}t) / C. \quad (24)$$

Подставляя $\varphi = \varphi(s(\mathbf{r}, t))$, где $s(\mathbf{r}, t)$ – определяется формулой (24) в (20), получим

$$\varphi''(s) \frac{k^2}{C^2} = (q^2 - \omega)\varphi(s) - 2\eta\varphi^3(s). \quad (25)$$

Положим $C = k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$. Тогда (24) и (25) примут вид

$$s(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - 2\mathbf{q}t) / k, \quad (26)$$

$$\varphi''(s) = (q^2 - \omega)\varphi(s) - 2\eta\varphi^3(s). \quad (27)$$

При $\eta > 0$ полагаем $q^2 - \omega = a^2$ и (27) принимает вид:

$$\varphi''(s) = a^2\varphi(s) - 2\eta\varphi^3(s),$$

совпадающий с уравнением (16), и мы можем сразу записать его решение

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{\pm a / \sqrt{\eta}}{ch a s(\mathbf{r}, t)} = \frac{\pm a / \sqrt{\eta}}{ch[\mathbf{a}\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - 2\mathbf{q}t) / k]}.$$

Так как $\omega = q^2 - a^2$, то окончательно

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\pm a \exp\left\{i[\mathbf{q}\mathbf{r} - (q^2 - a^2)t + \varphi_0]\right\}}{\sqrt{\eta} ch[\mathbf{a}\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - 2\mathbf{q}t) / k]}.$$

Если принять здесь $\mathbf{q} = (q, 0, 0)$, $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$, то получим известное решение одномерного нелинейного уравнения Шредингера.

При $\eta < 0$, т.е. $\eta = -|\eta|$ полагаем $q^2 - \omega = -a^2$ и (27) принимает вид:

$$\varphi''(s) = 2|\eta|\varphi^3(s) - a^2\varphi(s),$$

совпадающий с уравнением (17). Следовательно,

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{\pm a}{\sqrt{2|\eta|}} th \frac{a}{\sqrt{2}} s(\mathbf{r}, t) = \\ &= \frac{\pm a}{\sqrt{2|\eta|}} th \frac{a\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - 2\mathbf{q}t)}{\sqrt{2k}}.\end{aligned}$$

Учитывая, что $\omega = q^2 + a^2$, окончательно имеем

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}, t) &= \frac{\pm a}{\sqrt{2|\eta|}} th \frac{a\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - 2\mathbf{q}t)}{\sqrt{2k}} \times \\ &\times \exp\left\{i\left[\mathbf{q}\mathbf{r} - (q^2 + a^2)t + \varphi_0\right]\right\}\end{aligned}$$

В приведенных решениях амплитудные функции имеют вид гиперболических секанса и тангенса, аргументами которых являются линейные функции $s(\mathbf{r})$ или $s(\mathbf{r}, t)$. Для нахождения решений, зависящих от нелинейных функций $s(\mathbf{r})$ или $s(\mathbf{r}, t)$ нужно вместо полных интегралов линейных однородных уравнений первого порядка использовать особые интегралы.

Проиллюстрируем сказанное на примере решений вида (18), сводящихся к уравнениям (19) и (20). Найдем особый интеграл уравнения (19). Для этого исключим стандартным способом [5] произвольные постоянные k_x, k_y, k_z из полного интеграла (26). Дифференцируя (26) по k_x, k_y, k_z и приравнявая производные к нулю, найдем

$$\begin{aligned}s(\mathbf{r}, t) &= \\ &= \sqrt{(x - x_0 - 2q_x t)^2 + (y - y_0 - 2q_y t)^2 + (z - z_0 - 2q_z t)^2}.\end{aligned}\quad (28)$$

Подставив $\varphi = \varphi(s)$ в (20), получим

$$\varphi''(s) + \frac{2\varphi'(s)}{s} = a^2\varphi - 2\eta\varphi^3.\quad (29)$$

Аналитические решения этого обыкновенного дифференциального уравнения автору неизвестны, однако легко найти приближенное решение при больших значениях s (что является оправданным в нелинейной оптике, где расстояния измеряются в единицах длин волн). Тогда вторым слагаемым в левой части (29) можно пренебречь и получим уже знакомое уравнение

$$\varphi''(s) = a^2\varphi(s) - 2\eta\varphi^3(s),$$

имеющее решение

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{a/\sqrt{\eta}}{ch\,as(\mathbf{r}, t)},$$

где $s(\mathbf{r}, t)$ выражается формулой (28).

В стационарной теории оптической самофокусировки ключевую роль играет уравнение [6]

$$i2k_0 \frac{\partial E_0}{\partial x} + \nabla_{y,z}^2 E_0 + 2\eta|E_0|^2 E_0 = 0,\quad (30)$$

где $E_0(\mathbf{r})$ – комплексная огибающая электрического поля, k_0 – главная часть волнового вектора $\mathbf{k} = (k_0 + q_x, q_y, q_z)$, q_x, q_y, q_z – малые поправки к $\mathbf{k}_0 = (k_0, 0, 0)$, η – коэффициент нелинейности среды.

Уравнение (30) является «двумерным» нелинейным уравнением Шредингера, в котором роль «времени» играет $x/2k_0$. Другими словами, (30) записано на \mathbb{R}^3 , тогда как (1) на \mathbb{R}^{3+1} .

Если искать решение в виде

$$E_0(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}},\quad (31)$$

где $f(\mathbf{r})$ – вещественная функция, то подстановка (31) в (30) приводит к двум уравнениям:

$$k_0 \frac{\partial f}{\partial x} + q_y \frac{\partial f}{\partial y} + q_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0,\quad (32)$$

$$\nabla_{y,z}^2 f = (2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2)f - 2\eta f^3.\quad (33)$$

Уравнение (32) имеет своим решением любую дифференцируемую функцию $f = f(s(\mathbf{r}))$, где $s(\mathbf{r})$ – полный или особый интеграл уравнения

$$\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{q_y}{k_0} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{q_z}{k_0} \frac{\partial s}{\partial z} = 0.\quad (34)$$

Полный $s(\mathbf{r})$ и особый $s_0(\mathbf{r})$ интегралы уравнения (34) найдены в [7]:

$$\begin{aligned}s(\mathbf{r}) &= \frac{b_y [k_0(y - y_0) - q_y(x - x_0)]}{k_0 \sqrt{b_y^2 + b_z^2}} + \\ &+ \frac{b_z [k_0(z - z_0) - q_z(x - x_0)]}{k_0 \sqrt{b_y^2 + b_z^2}},\end{aligned}\quad (35)$$

$$s_0(\mathbf{r}) = \sqrt{\left(y - y_0 - \frac{q_y}{k_0}(x - x_0)\right)^2 + \left(z - z_0 - \frac{q_z}{k_0}(x - x_0)\right)^2},\quad (36)$$

где x_0, y_0, z_0 – координаты центра пучка, b_y, b_z – произвольные постоянные. Подстановка $f = f(s(\mathbf{r}))$ в (33) дает

$$f''(s) = (2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2)f(s) - 2\eta f^3(s).$$

Вводя обозначение

$$a = \sqrt{2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2},$$

последнее уравнение приводим к виду (16), имеющему решение

$$f(\mathbf{r}) = \frac{\pm a}{\sqrt{\eta} ch\,as(\mathbf{r})}.\quad (37)$$

Направим ось x через центр пучка. Тогда $y_0 = z_0 = 0$. С учетом (35) приходим к выводу, что вещественная огибающая (37) в любом сечении пучка $x = const$ является гладкой ограниченной функцией, быстро стремящейся к нулю при удалении от оси x по всем направлениям, кроме прямой $y = c_1 z + c_2$, определяемой из уравнения $s(\mathbf{r}) = 0$, вдоль которой поле остается постоянным. В центральном сечении $x = x_0$ эта прямая имеет вид $b_y y + b_z z = 0$. Таким образом, решение (37) описывает частично сфокусированный пучок.

Подстановка $f = f(s_0(r))$ в (33) приводит к неавтономному уравнению

$$f''(s_0) + \frac{f'(s_0)}{s_0} = a^2 f(s_0) - 2\eta f^3(s_0), \quad (38)$$

имеющему при больших значениях s_0 (в единицах длин волн) асимптотическое решение

$$f(s_0(r)) = \frac{\pm a}{\sqrt{\eta} \operatorname{ch} a s_0(r)}, \quad (39)$$

которое в любом сечении пучка $x = \text{const}$ быстро стремится к нулю при удалении от оси x по всем направлениям, т.е. пучок является полностью сфокусированным. Однако, поскольку (39) является асимптотическим решением, остается открытым вопрос о поведении функции (39) вблизи центра пучка. Точное решение уравнения (38) не должно иметь сингулярностей, чтобы быть физически допустимым решением.

Для численного решения, уравнение (38) с помощью преобразования $\xi = as_0$, $f = \frac{a}{\sqrt{\eta}} u$ приводим к безразмерному виду

$$u''(\xi) + \frac{u'(\xi)}{\xi} = u(\xi) - 2u^3(\xi). \quad (40)$$

На рис. 1 и 2 представлены численные решения уравнения (40) и их производные. Выходящие из начала координат кривые – графики производных $u'(\xi)$ соответствующих решений $u(\xi)$.

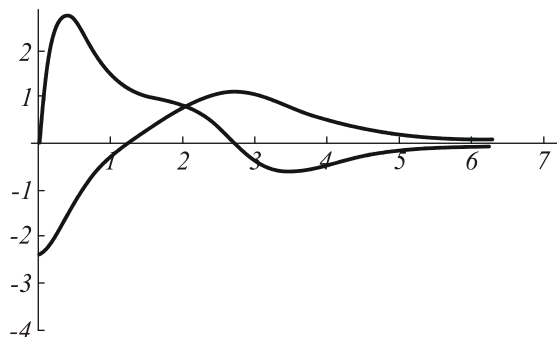


Рис. 1

Из графиков следует, что решения уравнения (40) являются гладкими ограниченными функциями, асимптотически стремящимися к нулю, а также, что

уравнение (40) обладает симметрией относительно преобразования $u \leftrightarrow -u$.

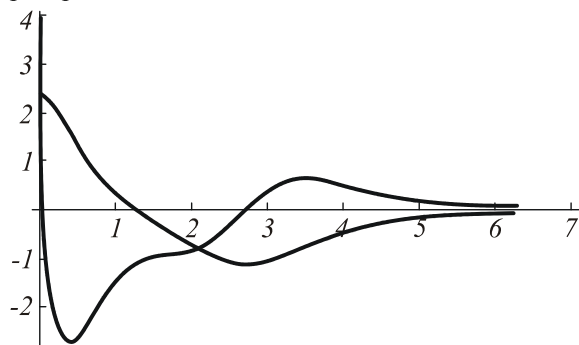


Рис. 2

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, правительства Самарской области и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF Project SA-014-02) в рамках российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE, REC N 14).

Заключение

Найдены в аналитической форме гладкие решения нелинейного уравнения Шредингера в виде уединенных волн для случая трех пространственных измерений. Рассмотрено явление оптической самофокусировки.

Литература

1. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов // М.: Наука, 1986.
2. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: «Мир», 1988.
3. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике // М.: «Мир», 1989.
4. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля // М.: «Мир», 1985.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений // М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред // М.: «Наука», 1982.
7. Алименков И.В. Точно решаемые математические модели в нелинейной оптике // Компьютерная оптика. 2005. № 28. С. 45.

Nonlinear Schroedinger equation in three spatial variables

I.V. Alimenkov¹

¹ *Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolev*

Abstract

Smooth analytical solutions are found for the nonlinear Schrödinger equation in the form of solitary waves for the case of three spatial variables. The phenomenon of optical self-focusing is considered.

Keywords: Schroedinger equation, optical self-focusing.

Citation: Alimenkov, IV. Nonlinear Schroedinger equation in three spatial variables. *Computer Optics* 2005; 28: 55-59.

References

- [1] Takhtadzhyan LA, Faddeev LD. The Hamiltonian method in the theory of solitons [In Russian]. Moscow: Nauka Publisher, 1986.
- [2] Dodd RK, Morris HC, Eilbeck JC, Gibbon JD. Soliton and nonlinear wave equations. London, New York: Academic Press Inc; 1982.
- [3] Newell AC. Solitons in mathematics and physics. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics; 1985.
- [4] Rajaraman R. Solitons and instantons: An introduction to solitons and instantons in quantum field theory. New York: Elsevier Science BV; 1982.
- [5] Stepanov VV. Course of differential equations. Moscow: State Publishing House of Technical and Theoretical Literature; 1953.
- [6] Landau LD, Lifshitz EM. Electrodynamics of continuous media. 2nd ed. Oxford: Pergamon Press Ltd; 1984.
- [7] Alimenkov IV. Exactly solvable mathematical models in nonlinear optics. *Computer Optics* 2005; 28: 45-54.