

ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОБЪЕКТОВ НАБОРОМ ЭЛЛИПСОИДОВ

А.Г. Храмов, А.О. Корепанов

Институт систем обработки изображений РАН

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва

Аннотация

В работе рассмотрен подход к анализу геометрических характеристик двух- и трехмерных изображений на основе представления последних набором геометрических примитивов – эллипсоидов. Рассмотрены основные характеристики эллипсоидов в n -мерном аффинном пространстве, определены операция сложения эллипсоидов и их взвешенная сумма.

Введение

Всякое преобразование в обработке изображений направлено на выявление тех или иных свойств изображений. Преобразование Фурье, например, выявляет частотные характеристики изображений, представление изображения в виде векторного поля позволяет проанализировать дифференциальные свойства первого порядка. В работе рассмотрен подход к выявлению и анализу геометрических характеристик двух- и трехмерных изображений на основе представления последних набором геометрических примитивов – эллипсоидов.

Подход к построению представлений двумерных форм в виде набора аппроксимирующих геометрических примитивов предложен в работе [4]. Развитие такого подхода в сочетании с методами рекурсивной декомпозиции образов на сегменты предложено в работах [3], посвященных разработке древовидных инвариантных представлений образов геометрическими примитивами заданной формы. В отличие от перечисленных работ вводится арифметика геометрических примитивов, рассматриваются методы фильтрации и интерполяции изображений на основе анализа их геометрических характеристик.

Рассматриваемые представления изображений являются сжатыми описаниями образов с требуемой точностью, которая определяется заданной допустимой погрешностью аппроксимации сегментов примитивами, что делает такой подход приемлемым для обработки изображений со структурной избыточностью [6].

В работе рассмотрены основные характеристики эллипсоидов в n -мерном аффинном пространстве, определена операция сложения эллипсоидов и их взвешенная сумма. За рамками работы остались методы представления изображений набором эллипсоидов, а также интерпретация и анализ мнимых эллипсоидов.

Характеристики эллипсоидов в n -мерном аффинном пространстве

Пусть A – n -мерное аффинное пространство, ассоциированное с вещественным векторным пространством V . Определим прямоугольную систему координат $\{\dot{o}, e_1, \dots, e_n\}$, $\dot{o} \in A$, $e_i \in V$. Квадрика вида

$$E(Q) = \{ \dot{p} \in A : Q(\dot{p}) = 0 \} \quad (1)$$

где $Q(x) = x^T Bx + b^T x + c$ – аффинно-квадратичная функция, B – положительно, либо отрицательно определенная матрица квадратичной формы, b – вектор, $c \in \mathbf{R}$, определяет один из следующих видов геометрических объектов [1]:

(I) эллипсоид

В этом случае $-c_0^{-1}B$ – положительно определенная матрица, где $c_0 = c - \frac{1}{4}b^T B^{-1}b$. К данному типу отнесем также вырожденный эллипсоид (множество, состоящее из одной точки), получаемый в случае, когда B – положительно определенная матрица и $c_0 = 0$.

(II) мнимый эллипсоид

В этом случае $-c_0^{-1}B$ – отрицательно определенная матрица. К данному типу отнесем также вырожденный эллипсоид, получаемый в случае, когда B – отрицательно определенная матрица и $c_0 = 0$.

(III) множество точек аффинного пространства A , которое может быть получено из (1) в случае, когда все коэффициенты аффинно-квадратичной функции равны нулю $E(0)$.

(IV) пустое множество \emptyset , которое получается из (1) при $B = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$.

Далее будем рассматривать множество E^n , элементами которого являются квадрики указанного вида в n -мерном аффинном пространстве. Определим операцию сложения элементов множества E^n . Рассмотрим множество эллипсоидов $\{E(Q^m)\}_{m=1, M} \subset E^n$ и запишем формальную сумму вида

$$E(Q_\Sigma) = E\left(\sum_{m=1}^M Q^m = 0\right) \quad (2)$$

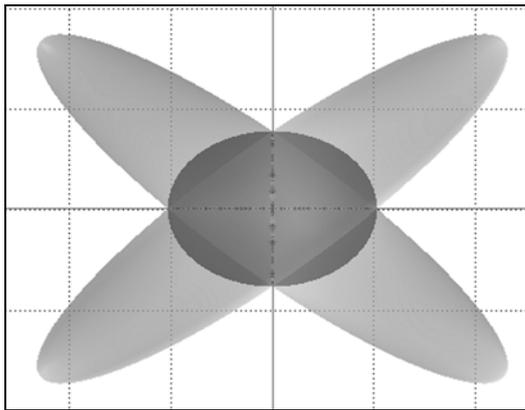
которая в нашем случае имеет смысл только, если $E(Q_\Sigma) \subset E^n$, что определяется видом функций Q^m . Ясно, что рассмотренное множество E^n является незамкнутым относительно рассматриваемой операции сложения (2).

В случае, когда выражение (2) имеет смысл, будем называть его суммой элементов пространства E^n . Следует отметить, что элемент III типа играет роль нулевого элемента относительно операции сложения (2). Рассмотренная операция сложения, в случае, когда выражение (2) имеет смысл, является коммутативной и ассоциативной.

Утверждение 1. Пусть имеется пара эллипсоидов I типа (II типа) $E(Q_i)$, $Q_i = (x - r_i)^T B_i (x - r_i) + c_i$, $i = 1, 2$. Результатом сложения пары эллипсоидов является: эллипсоид I типа (соответственно, II типа), если его центр g , определяемый выражением $g^T = (r_1^T B_1 + r_2^T B_2)(B_1 + B_2)^{-1}$, принадлежит множеству

решений системы $\begin{cases} Q_1 \leq 0 \\ Q_2 \leq 0 \end{cases}$ (то есть лежит в пересечении внутренностей и граничных точек слагаемых эллипсоидов). Эллипсоид II типа (соответственно, I типа), если его центр g принадлежит множеству решений

системы $\begin{cases} Q_1 > 0 \\ Q_2 > 0 \end{cases}$. Примеры суммы пар и троек эллипсоидов в двумерном случае представлены на рис. 1 (результатирующий эллипсоид показан темным цветом).



Очевидно, что само по себе умножение эллипсоида на произвольное неотрицательное число $\alpha E(Q) = E(\alpha Q)$, $\alpha \geq 0$ не имеет смысла, однако можно записать вполне осмысленное выражение

$$E(Q_\Sigma) = \sum_{m=1}^M \alpha_m E(Q^m) = E\left(\sum_{m=1}^M \alpha_m Q^m\right) \quad (3)$$

для $\forall \alpha_k \geq 0, k = \overline{1, M}$, которое будем называть взвешенной суммой эллипсоидов. Взвешенная сумма аффинно-квадратичных функций имеет очевидный смысл. Примеры взвешенной суммы пары эллипсоидов в двумерном случае приведены на рис. 2. Далее суммой эллипсоидов будем называть именно взвешенную сумму.

Утверждение 2. Пусть имеется пара эллипсоидов I типа (II типа) $E(Q_1), E(Q_2)$, множество Ω точек пересечения внутренностей которых не пусто. Тогда результатом сложения является эллипсоид $E(Q_\Sigma)$ такой, что множество решений неравенства $Q_\Sigma \leq 0$ целиком содержит множество Ω . То есть внутренность $E(Q_\Sigma)$ в совокупности с граничными точками содержит множество Ω .

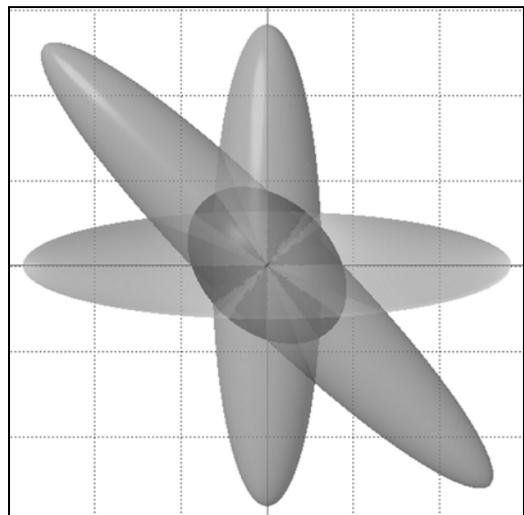
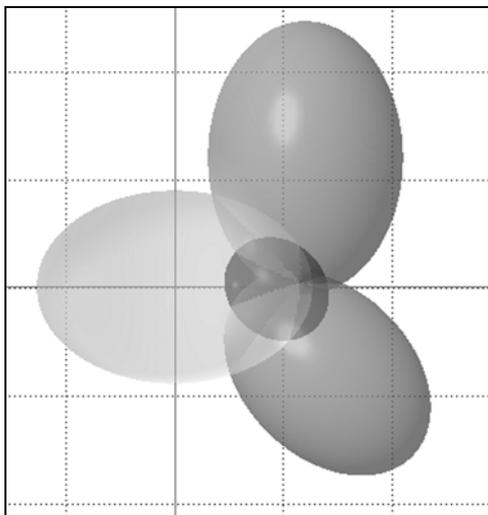
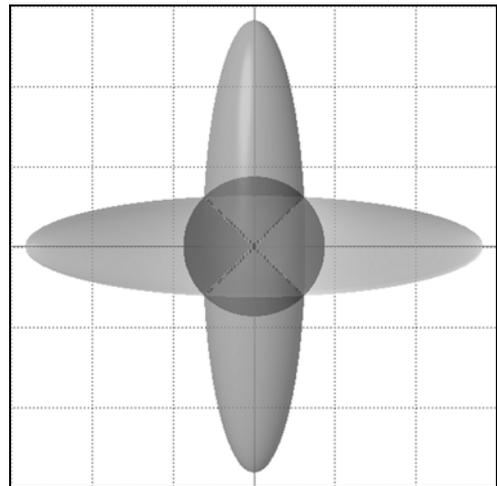


Рис. 1. Примеры сложения эллипсоидов

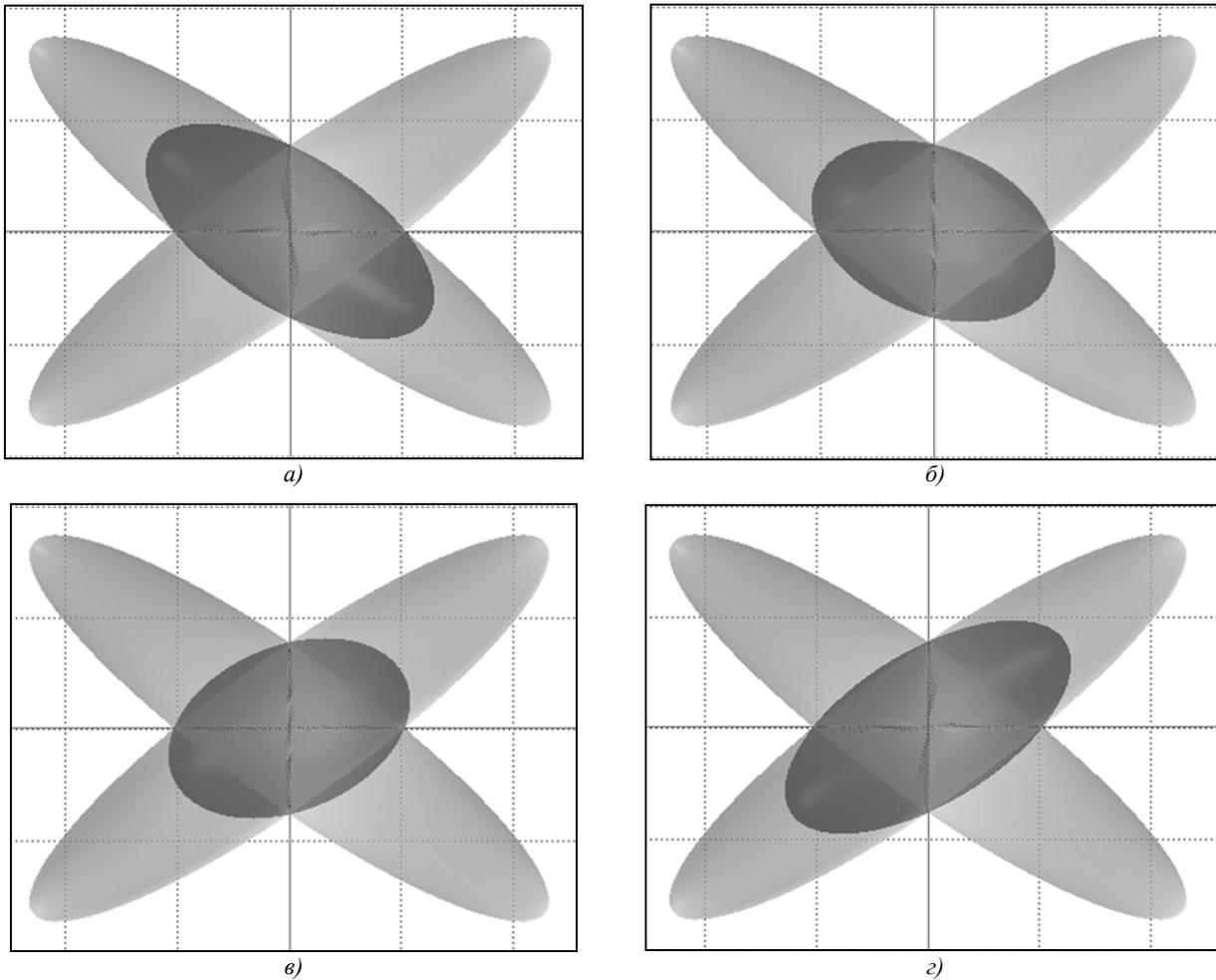


Рис. 2. Примеры взвешенной суммы эллипсоидов с отношением весов: а) 6:1; б) 2:1; в) 1:2; г) 1:6

Утверждение 3. Пусть имеется пара эллипсоидов I типа (II типа) $E(Q_1)$, $E(Q_2)$ и Ω – множество точек объединения их внутренностей и граничных точек. Тогда результатом сложения является эллипсоид $E(Q_\Sigma)$ такой, что множество решений неравенства $Q_\Sigma \leq 0$ целиком содержится во множество Ω .

Представление изображений в виде набора эллипсоидов

Пусть имеется функция $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$, где $D \subset \mathbf{R}^n$ – область определения функции. Положим, что в каждой точке $x \in D$ изображения каким-либо способом определен эллипсоид I типа с центром в данной точке:

$$E(Q(x)) = \{y \in \mathbf{R}^n : y^T A(x)y - 2b^T(x)x + c(x) = 0\} \quad (4)$$

где $A(x)$ – положительно определенная симметричная матрица, $b^T = x^T A(x)$, $c(x) = x^T A x - 1$. Таким образом, функция f представляется набором эллипсоидов (4). В случае, когда имеется дискрет-

ное изображение в выражении (4) изменится лишь то, что x будет принимать дискретные значения.

Эффективный подход к построению представлений двумерных форм на основе их аппроксимации геометрическими примитивами рассмотрен в работах Voss, Suesse [4]. Различные методы древовидных инвариантных представлений образов геометрическими примитивами заданной (в том числе и эллиптической) формы предложены в работах Ланге М.М., Ганебных С.Н. [3].

Рассмотренное представление изображений является сжатым описанием образов с требуемой точностью, которая определяется заданной допустимой погрешностью аппроксимации сегментов примитивами. Достоинством такого представления является то, что при обработке и анализе изображений, представленных в виде (4), одновременно учитывается как форма геометрического примитива, так и его пространственное положение.

Фильтрация изображений, представленных набором эллипсоидов

Представление изображений в виде набора эллипсоидов (4) позволяет производить фильтрацию по различным геометрическим характеристикам. В качестве примеров, в работе рассмотрены два вида:

фильтрация множества эллипсоидов по направлениям (аналогично фильтрации поля направлений [5]) и фильтрация по линейному эксцентриситету – в двумерном случае (для выделения протяженных участков изображений).

Для фильтрации множества эллипсоидов по направлению необходимо задать некоторое направление ℓ и для каждого эллипсоида определить главные направления. Приведем квадратичные функции $Q(x)$ к главным осям разложением матриц $A(x)$ по собственным векторам [2]:

$$A(x) = C^T(x)D(x)C(x) \quad (5)$$

где $D(x)$ – диагональная матрица собственных чисел матрицы $A(x)$, C – матрица, в столбцах которой стоят координаты собственных векторов. За направление $l(x)$ эллипсоида $E(Q(x))$ принимаем собственный вектор, соответствующий минимальному собственному числу (в случае, если таковой имеется). Тогда в результате фильтрации будут оставлены только те эллипсоиды, угловое отклонение направлений которых от ℓ меньше некоторого наперед заданного угла: $\angle(\ell, l(x)) \leq \alpha$. На рис. 3 приведены примеры фильтрации стохастического (по пространственному положению) множества эллипсоидов по направлениям в двух- и трехмерном случае ($\alpha = \pi/18$).

Такой вид фильтрации может быть использован при анализе квазипериодических структур (многомерных данных интерферометрии и пр.) для выделения доминирующих направлений. Для фильтрации «вытянутых» эллипсоидов в работе использовалась характеристика, которая в двумерном случае совпадает с линейным эксцентриситетом:

$$e = \sqrt{1 - \frac{\min_{1 \leq i, j \leq n} (a_{ij}(x))}{\max_{1 \leq i, j \leq n} (a_{ij}(x))}}. \quad \text{На рис. 4 приведены примеры}$$

фильтрации в двух- и трехмерном случае со значением e ограниченным как снизу, так и сверху.

Такой вид фильтрации может быть использован для избавления от структурной избыточности при анализе квазипериодических структур, а также изображений протяженных (например, древовидных) объектов для отделения точек объекта (с показателем e близким к 1) от объектов другой природы.

Совмещение перечисленных видов фильтрации позволяет производить фильтрацию по направлениям объектов с определенными геометрическими характеристиками, например, интерферометрических полос определенной толщины.

В общем случае для анализа и обработки множества эллипсоидов нужно использовать все собственные числа и собственные векторы, получаемые при разложении (5), что существенно повышает возможности анализа изображений по сравнению, например, с анализом векторных

полей. Однако платой за это является существенное повышение сложности представления изображения в виде набора геометрических примитивов.

Интерполяция формы объектов на изображении

Пусть по изображению построено некоторое опорное множество эллипсоидов $\{E(Q^m)_{m=1, \dots, M}\}$ I типа, соответствующих некоторому геометрическому объекту на изображении. Тогда по заданному набору эллипсоидов могут быть получены эллипсоиды в промежуточных точках изображения посредством определения всевозможных взвешенных сумм вида:

$$E(Q(s)) = \sum_{m=1}^M s_m E(Q^m),$$

где $s = (s_1, \dots, s_M)$, $s_m \in (0, 1]$ – вектор весов, при условии, что рассматриваются только эллипсоиды I типа.

Заключение

В работе рассмотрены:

- подход к выявлению и анализу геометрических характеристик двух- и трехмерных изображений на основе их представления набором геометрических примитивов – эллипсоидов;
- основные характеристики эллипсоидов в n -мерном аффинном пространстве;
- определена операция сложения эллипсоидов и их взвешенная сумма;
- некоторые методы фильтрации множеств эллипсоидов.

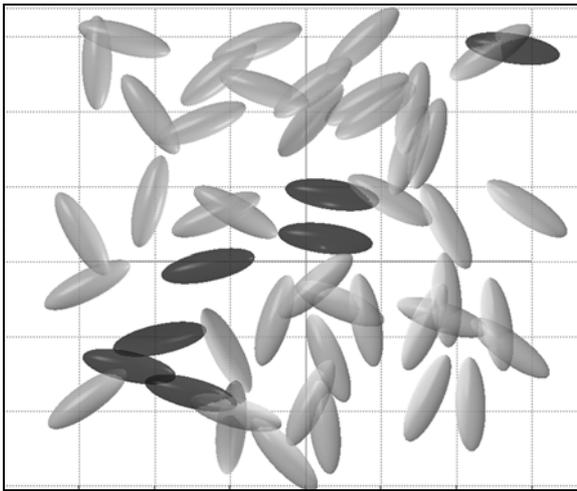
Предложенный подход является эффективным:

- при анализе геометрической формы протяженных объектов (например, древовидных);
- при анализе квазипериодических структур.

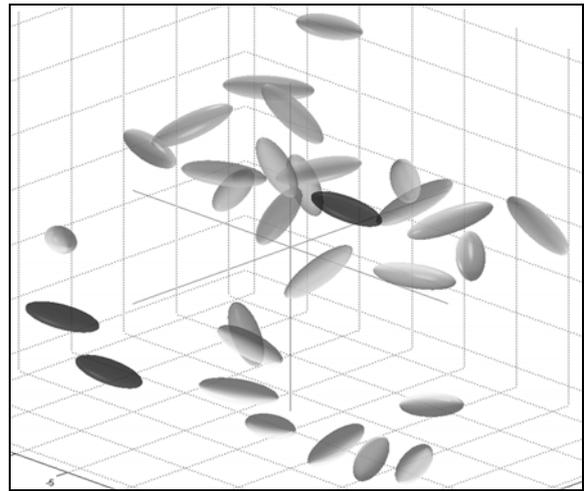
Данный подход к интерпретации изображений обладает большими возможностями для анализа изображений по сравнению, например, с анализом векторных полей и полей направлений, что особенно заметно в многомерном случае. Однако платой за это является существенное повышение сложности представления изображения в виде набора геометрических примитивов.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, правительства Самарской области и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF Project SA-014-02) в рамках российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE), а также при поддержке гранта Президента РФ № НШ-1007.2003.01 и грантов РФФИ № 03-01-00642 и № 05-01-08020.

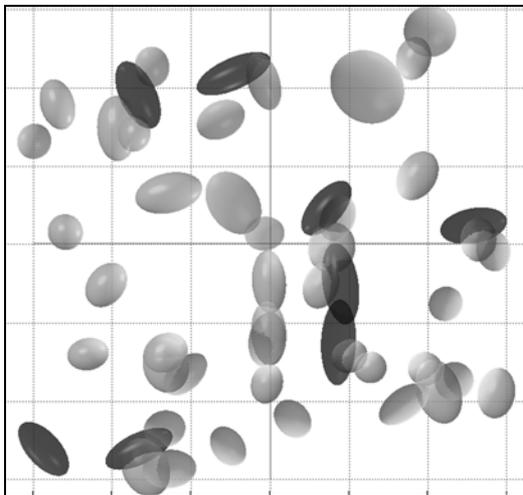


а)

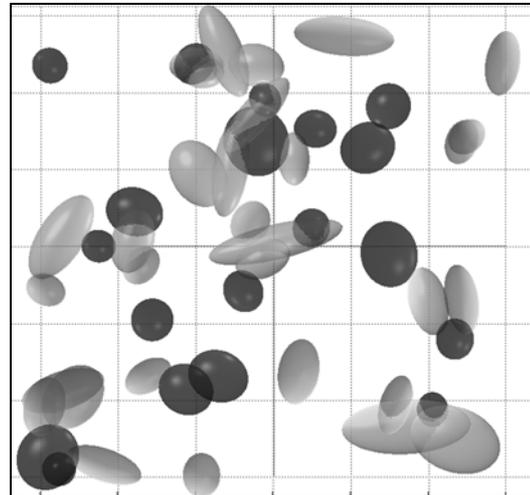


б)

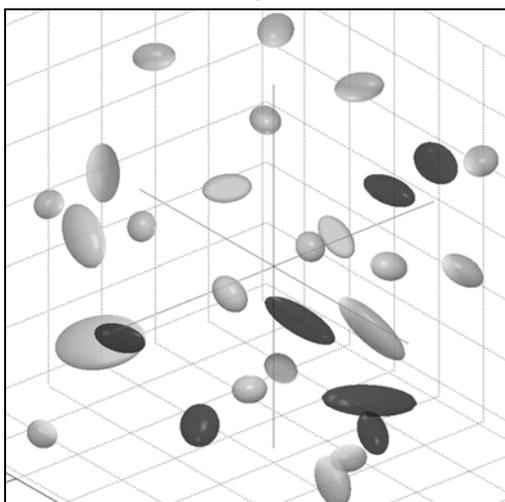
Рис. 3. Примеры фильтрации множества эллипсоидов: а) в двумерном, направляющий вектор $l = (1, 0)$ и б) трехмерном случае, направляющий вектор $l = (1, 0, 0)$



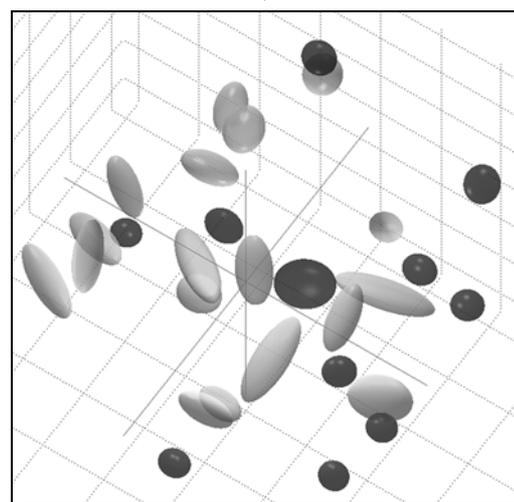
а)



б)



в)



г)

Рис. 4. Примеры фильтрации множества эллипсоидов в двумерном случае: а) $e > 0,85$; б) $e < 0,5$; в трехмерном случае в) $e > 0,9$; г) $e < 0,35$

Литература

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры // М.: Факториал пресс, 2002, 544 с.
2. Кострикин А.Э. Введение в алгебру. Часть II. Основы алгебры: Учебник для вузов // М.: Физико-математическая литература, 2001, 369с.
3. Lange M.M., Ganebnykh S.N. Tree-like Data Structures for Effective Recognition of 2-D Solids // IEEE Proceedings of the 17th International Conference on Pattern Recognition (ICPR- 2004). Cambridge, UK, 2004. Vol. 1. P. 592-595.
4. Voss K., Suesse H. Invariant Fitting of Planar Objects by Primitives // IEEE Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition. ICPR-1996. P. 508-512.
5. Soifer V.A., Khramov A.G., Korepanov A.O. Fuzzy Direction Field Method for Fringe and Tree-like Patterns Analysis // IEEE Proceedings of the 17th International Conference on Pattern Recognition (ICPR- 2004). Cambridge, UK, 2004. Vol. 2. P. 779-782.
6. Soifer V.A., Kotlyar V.V., Khonina S.N., Khramov A.G., The Method of the Directional Field in the Interpretation and Recognition of the Images with Structure Redundancy // Pattern Recognition and Image Analysis, 1996. Vol. 6. No. 4. P. 710-724.

Representation of images of flat and spatial objects by a set of ellipsoids

A.G. Khramov^{1,2}, A.O. Korepanov^{1,2}

¹ Image Processing Systems Institute of RAS

² Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolev

Abstract

The paper considers an approach to the analysis of the geometric characteristics of two- and three-dimensional images based on the representation of the latter by a set of geometric primitives – ellipsoids. The main characteristics of ellipsoids in n-dimensional affine space are considered, the operation of adding ellipsoids and their weighted sum are determined.

Keywords: ellipsoid, two- and three-dimensional image, affine space are.

Citation: Khramov AG, Korepanov AO. Representation of images of flat and spatial objects by a set of ellipsoids. Computer Optics 2005; 28: 94-99.

References

- [1] Vinberg EB. A course in algebra. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society; 2003.
- [2] Kostrikin AE. Introduction to algebra. New York: Springer-Verlag; 1982.
- [3] Lange MM, Ganebnykh SN. Tree-like data structures for effective recognition of 2-D solids. IEEE Proceedings of the 17th International Conference on Pattern Recognition (ICPR- 2004) 2004; 1: 592-595.
- [4] Voss K, Suesse H. Invariant fitting of planar objects by primitives. IEEE Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition (ICPR-1996) 1996: 508-512.
- [5] Soifer VA, Khramov AG, Korepanov AO. Fuzzy direction field method for fringe and tree-like patterns analysis. IEEE Proceedings of the 17th International Conference on Pattern Recognition (ICPR-2004) 2004; 2: 779-782. DOI: 10.1109/ICPR.2004.1334374.
- [6] Soifer VA, Kotlyar VV, Khonina SN, Khramov AG. The method of the directional field in the interpretation and recognition of the images with structure redundancy. Pattern Recognition and Image Analysis 1996; 6(4): 710-724.