

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЫ

В.В. Котляр, Р.В. Скиданов, С.Н. Хонина, С.А. Балалаев
 Институт систем обработки изображения РАН,
 Самарский государственный аэрокосмический университет

Аннотация

Рассмотрено новое семейство параксиальных лазерных пучков, образующих ортогональный базис. При распространении в однородном пространстве эти пучки сохраняют свою структуру с точностью до масштаба. Распределение интенсивности в поперечном сечении таких пучков похоже на распределение интенсивности для мод Бесселя и представляет собой набор концентрических чередующихся светлых и темных колец. Комплексная амплитуда таких пучков пропорциональна вырожденной (конфлюэнтной) гипергеометрической функции, и поэтому мы назвали такие пучки гипергеометрическими модами. Мы сформировали такие моды с помощью жидко-кристаллического микродисплея.

Введение

Уравнение Гельмгольца, которое описывает распространение непараксиальной монохроматической световой волны в однородном пространстве, допускает решения с разделяющимися переменными в 11 различных системах координат [1]. Это означает, что существуют световые поля, распространяющиеся без изменения своей структуры. Примером являются хорошо известные моды Бесселя [2]. Параксиальный аналог уравнения Гельмгольца – это параболическое уравнение типа Шредингера, которое описывает распространение параксиальных световых полей. Это уравнение допускает решения с разделяющимися переменными в 17 системах координат [1]. Световые поля, которые описываются такими решениями, при распространении сохраняют свою структуру с точностью до масштаба. Примером являются хорошо известные моды Эрмита-Гаусса и Лагерра-Гаусса [3].

В последнее время резко увеличилось количество работ, в которых решения с разделяющимися переменными для уравнения Гельмгольца и Шредингера используются в оптике [4-12]. Новые непараксиальные световые пучки, которые сохраняют свою структуру при распространении, рассматривались в [4-6]. Это параболические пучки [4], волны Гельмгольца-Гаусса [5] и Лапласа-Гаусса [6]. Новые параксиальные световые пучки, сохраняющие свою структуру с точностью до масштаба, рассматривались в [7-10]. Это моды Айнса-Гаусса [7], элегантные пучки Айнса-Гаусса [8], моды Эрмита-Лагерра-Гаусса [9] и чистые оптические вихри [10]. Некоторые из этих пучков были реализованы с помощью лазерных резонаторов [9, 11], дифракционных оптических элементов [10] и жидко-кристаллических дисплеев [12].

В этой работе рассмотрено еще одно семейство лазерных мод, представляющих собой ортонормированный базис и являющихся решением с разделенными переменными параксиального параболического уравнения в цилиндрической системе координат. В цилиндрической системе координат уравнение Шредингера кроме решений в виде мод Бесселя и мод Лагерра-Гаусса также имеет решения в виде вырожденных гипергеометрических функций (поэтому эти моды названы авторами гипергеометрическими). Распределения интенсивности в поперечном сечении таких пучков близко к распределению интенсивности для мод Бесселя. Это набор концентрических световых колец, интенсивность которых спадает с ростом радиальной переменной как r^{-1} . Как и моды Бесселя гипергеометрические моды имеют бесконечную энергию. В отличие же от мод Бесселя, радиусы световых колец гипергеометрических мод увеличиваются с ростом продольной координаты z как $z^{1/2}$. Описан также эксперимент по генерации таких лазерных мод с помощью жидкокристаллического микро-дисплея.

1. Теоретические основы

Комплексная амплитуда параксиального светового поля $E(r, \varphi, z)$ в цилиндрической системе координат (r, φ, z) удовлетворяет уравнению типа Шредингера:

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) E(r, \varphi, z) = 0, \quad (1)$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ волновое число света с длиной волны λ .

Уравнению (1) удовлетворяют функции, образующие ортонормированный базис:

$$E_{\gamma,n}(r, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi n!} \left(\frac{z_0}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1-i\gamma}{2}\right) \times \exp\left[\frac{i\pi}{4}(3n+i\gamma-1) + \frac{i\gamma}{2} \ln \frac{z_0}{z} + in\varphi\right] \times x^{\frac{n}{2}} {}_1F_1\left(\frac{n+1-i\gamma}{2}, n+1, ix\right), \quad (2)$$

где $-\infty < x < \infty$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ непрерывный и дискретный параметры, от которых зависят функции (2) и которые будем называть номерами моды; $z_0 = \frac{kw^2}{2}$ - аналог длины Релея, w - параметр моды, аналогичный радиусу гауссового пучка, хотя здесь он имеет другой смысл; $x = \frac{kr^2}{2z}$; $\Gamma(x)$ - гамма функция; ${}_1F_1(a, b, x)$ - вырожденная или конфлюэнтная гипергеометрическая функция [13]:

$${}_1F_1(a, b, x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} \exp(xt) dt, \quad (3)$$

где $\text{Re}(b) > \text{Re}(a) > 0$. Из (3) видно, что ${}_1F_1(a, b, x)$ - это целая аналитическая функция. В случае (2) $\text{Re}(x)=0$ и тогда уравнение (3) является одномерным преобразованием Фурье от ограниченной функции на отрезке $[0, 1]$. По теореме Шеннона асимптотически при $r \rightarrow \infty$ период модуляции функции (2) (т.е. расстояние между соседними максимумами или минимумами) равно 2π . При больших значениях аргумента $x \gg 1$ имеет место асимптотика $x^{\frac{n}{2}} \left| {}_1F_1\left(\frac{n+1-i\gamma}{2}, n+1, ix\right) \right| \approx \frac{1}{x}$. Такое

поведение модуля функции (2) совпадает с асимптотикой функции Бесселя. Кроме того, нули вырожденной гипергеометрической функции ${}_1F_1(a, b, x_{0m})=0$ близки к нулям функции Бесселя

$$J_{b-1}(x_{b-1,m})=0 \text{ [13]: } x_{0,m} \approx \frac{x_{b-1,m}^2}{2b-4a}.$$

Реализовать световые пучки (2), которые в дальнейшем будем называть гипергеометрическими (ГГ) модами, можно с помощью оптического элемента, имеющего функцию пропускания:

$$E_{\gamma,n}(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{w}{\rho}\right) \exp\left[i\gamma \ln\left(\frac{\rho}{w}\right) + in\theta\right]. \quad (4)$$

При освещении оптического элемента (4), расположенного в плоскости $z=0$, неограниченной плоской волной на расстоянии z сформируется световое поле с комплексной амплитудой (2). Энергия световых полей (2) и (4) неограниченна, как и у моды Бесселя

$$E_{\beta,n}(r, \varphi, z) = J_n(\beta r) \exp\left[i\frac{\beta^2 z}{2k} + in\varphi\right],$$

которая также удовлетворяет ур. (1). Поэтому на практике для реализации моды (2) оптический элемент (4) следует ограничивать кольцевой диафрагмой. При этом на конечном расстоянии $z_0 < R \tan(\gamma/R)$, где R - большой радиус кольцевой диафрагмы, будет эффективно формироваться мода (2).

Световое поле (2) при распространении сохраняет свою структуру и меняется только масштабно. Поперечное распределение интенсивности ГГ-моды (2) представляет собой набор концентрических световых колец, радиусы которых удовлетворяют условию:

$$\rho_m = \sqrt{\frac{\alpha_m z \lambda}{\pi}}, \quad (5)$$

где α_m - постоянные, зависящие от номера кольца m и от номеров моды (γ, n) . Из (5) следует, что радиусы колец увеличиваются с ростом z как $z^{1/2}$. Из соотношения [13]:

$${}_1F_1\left(\frac{n+1+i\gamma}{2}, n+1, -ix\right) = \exp(-ix) {}_1F_1\left(\frac{n+1-i\gamma}{2}, n+1, ix\right)$$

следует, что фаза гипергеометрической функции

$$\text{равна } x/2: \arg\left\{{}_1F_1\left(\frac{n+1+i\gamma}{2}, n+1, -ix\right)\right\} = \frac{x}{2}.$$

Интересно, что эта фаза не зависит от номеров моды (γ, n) . Тогда можно записать выражение для фазы ГГ-моды:

$$\arg\{E_{\gamma,n}(r, \varphi, z)\} = \frac{\gamma}{2} \ln \frac{z}{z_0} + n\varphi + \frac{kr^2}{4z} + \frac{\pi}{4}(3n-1), \quad (6)$$

где первое слагаемое имеет смысл фазы Гоу (Gouy).

2. Численное моделирование

Формула (2) позволяет рассчитывать идеальные (бесконечные) ГГ-моды. Однако при генерации этих мод используется оптический элемент конечного размера, поэтому при моделировании формирования ГГ-моды использовалось преобразование Френеля:

$$\tilde{E}_{\gamma,n}(r, \varphi, z) = \frac{k}{2\pi iz} \exp\left(i\frac{k}{2z}r^2\right) \times \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} E_{\gamma,n}(\rho, \theta) \exp\left(i\frac{k}{2z}\rho^2\right) \exp\left[-i\frac{k}{z}r\rho \cos(\theta-\varphi)\right] \rho d\rho d\theta \quad (7)$$

от входной функции $E_{\gamma,n}(\rho, \theta)$ (4).

На рисунках 1-3 показаны распределения интенсивности и фазы различных ГГ-мод и их суперпозиций, рассчитанные по формулам (2) и (7), на расстояниях $z=1000$ мм и $z=2000$ мм. Параметры расчета: длина волны $\lambda=633$ нм, размер изображений - 4×4 мм, число отсчетов - 256×256 .

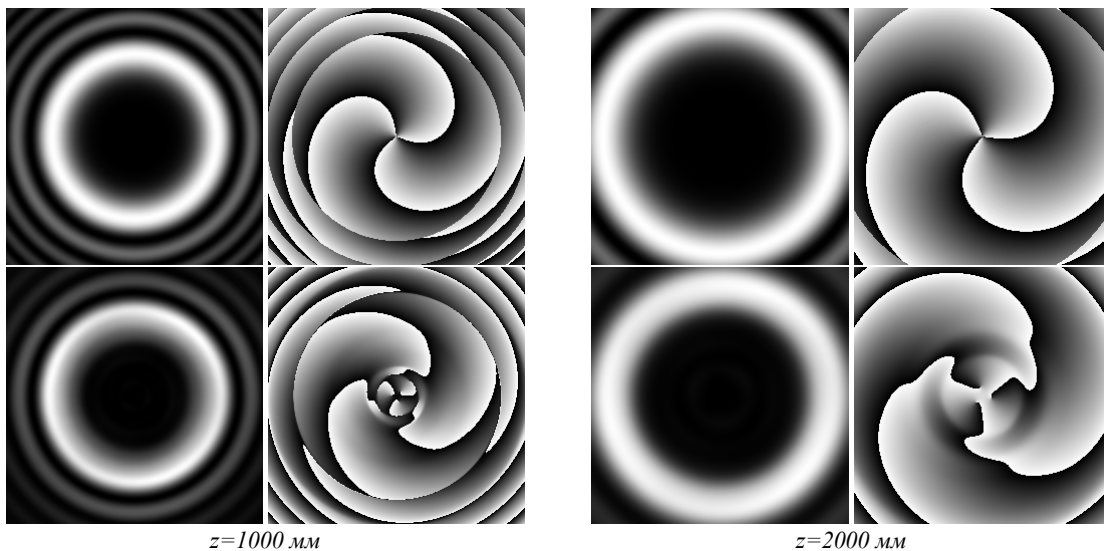


Рис. 1. Распределения интенсивности и фазы ГГ-моды $(\gamma;n)=(2,3)$, рассчитанное по формуле (2) (верхняя строка) и по формуле (7) (нижняя строка) на различных расстояниях

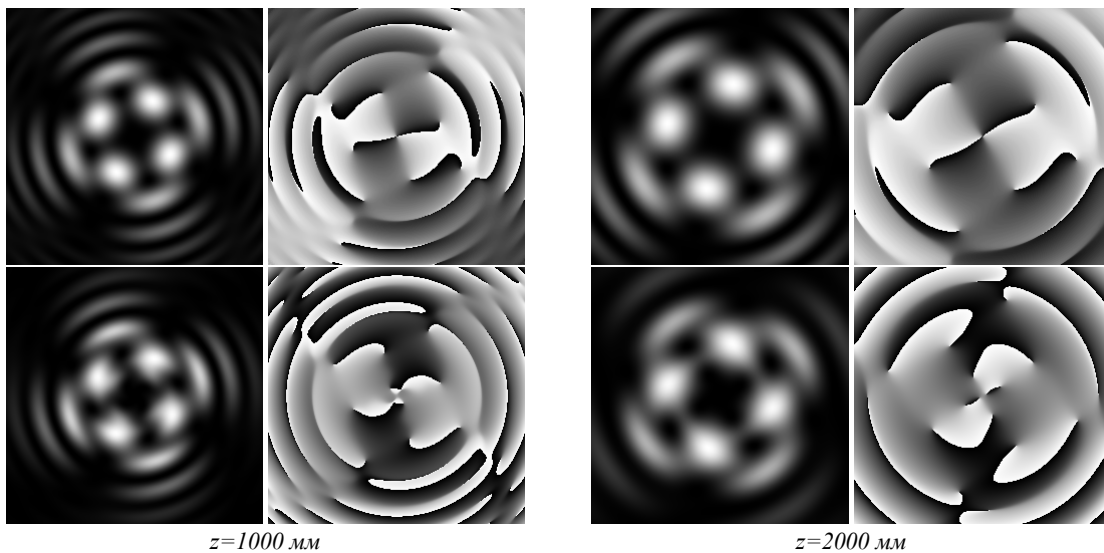


Рис. 2. Распределения интенсивности и фазы суперпозиции из двух ГГ-мод $(\gamma;n)=(0,2)+(-3,-2)$, рассчитанное по формуле (2) (верхняя строка) и по формуле (7) (нижняя строка) на различных расстояниях

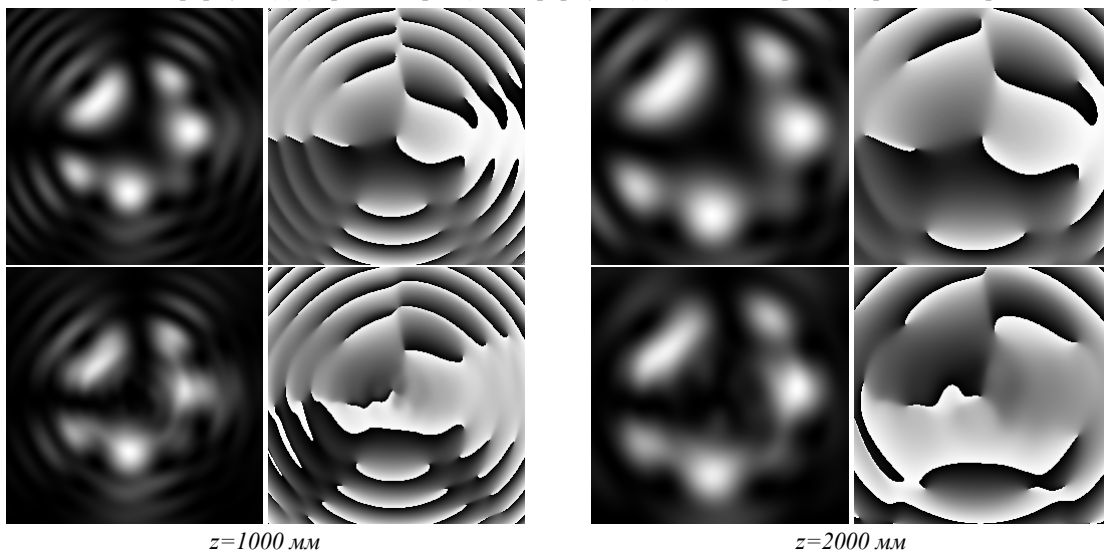


Рис. 3. Распределения интенсивности и фазы суперпозиции из четырех ГГ-мод $(\gamma;n)=(0,1)+(0,-2)+(0,3)+(0,-4)$, рассчитанное по формуле (2) (верхняя строка) и по формуле (7) (нижняя строка) на различных расстояниях

Среднеквадратичное отклонение распределения интенсивностей для идеальных пучков (формула (2)) и полученных через преобразование Френеля (формула (7)) составило 15-23%.

На рис. 4 показаны радиальные сечения интенсивности ГГ-моды $(\gamma;n)=(2,3)$ на расстояниях $z=100$ мм и $z=200$ мм. Видно, что радиусы световых колец увеличиваются с ростом z . На рис. 5 приведен график расходимости интенсивности этой моды в зависимости от пройденного расстояния z .

Среднеквадратичное отклонение численных результатов от аппроксимирующей функции $y=0,0405 z^{1/2}$ составило 14%.

На рис. 6 приведены радиальные сечения интенсивности ГГ-мод с одинаковым параметром $\gamma=2$ и различными индексами n на одном и том же расстоянии. Видно, что с ростом индекса n радиус первого светового кольца увеличивается. Это связано с возрастанием номера винтовой сингулярности, которую содержат ГГ-моды.

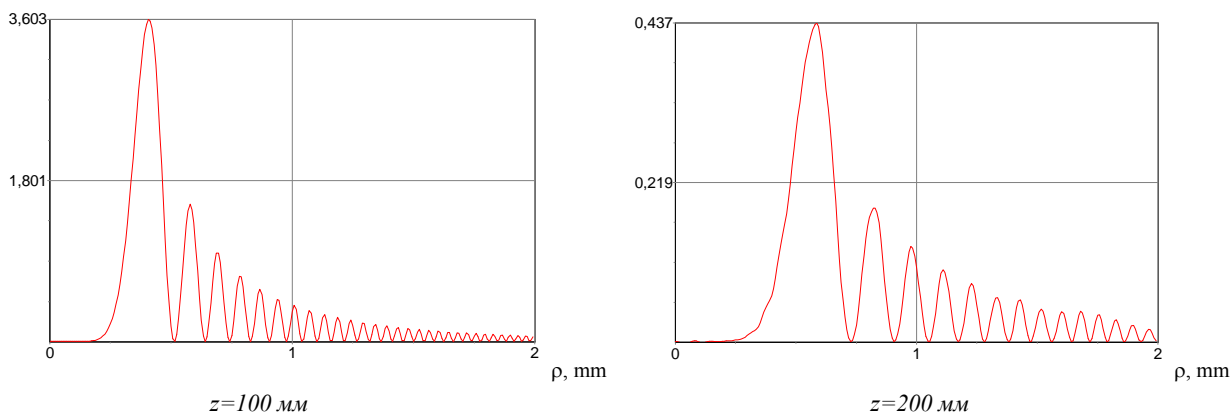


Рис. 4. Радиальные сечения интенсивности ГГ-моды $(\gamma;n)=(2,3)$, рассчитанные по формуле (7) на различных расстояниях

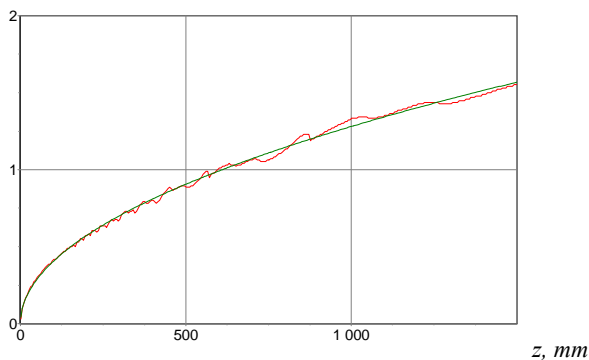


Рис. 5. График расходимости интенсивности ГГ-моды $(\gamma;n)=(2,3)$ в зависимости от пройденного расстояния z : сплошной линией отображен результат численных расчетов по формуле (7), пунктирной – аппроксимация функцией $y=0,0405 z^{1/2}$

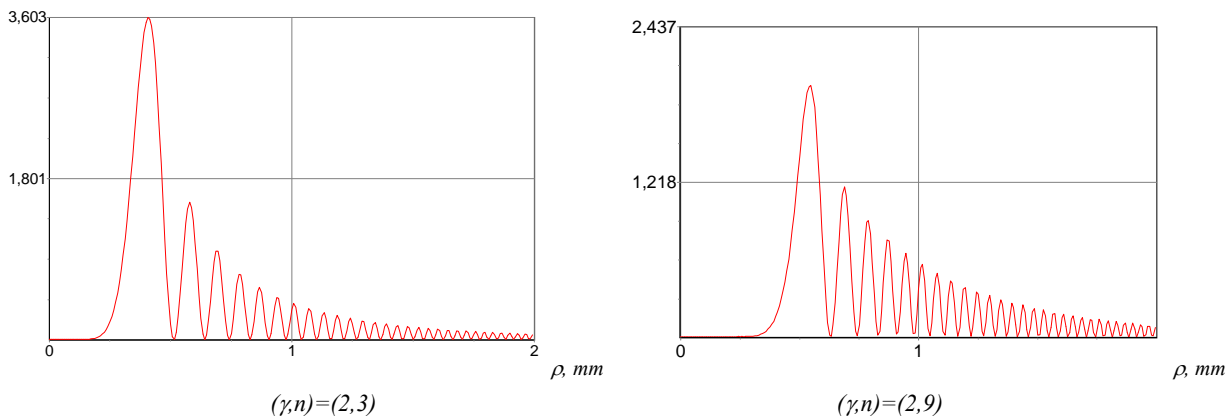


Рис. 6. Радиальные сечения интенсивности ГГ-мод с одинаковым параметром $\gamma=2$ и различными индексами n на расстоянии $z=100$ мм

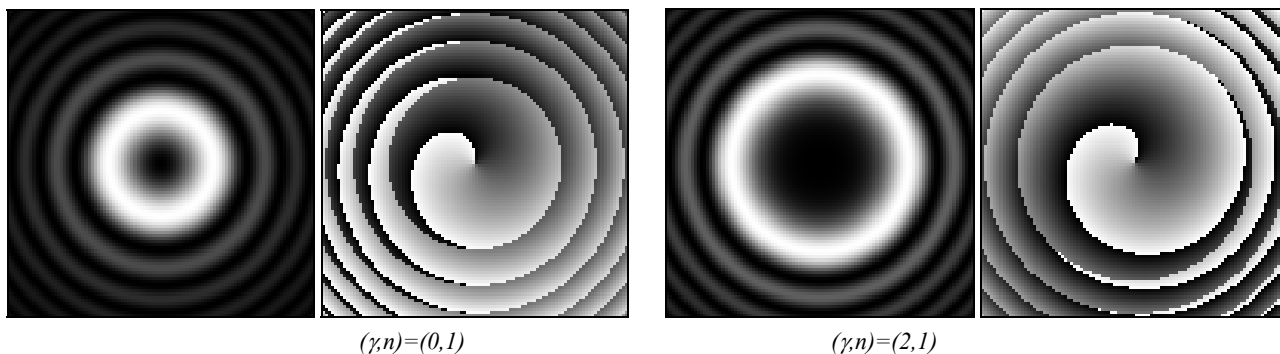


Рис. 7. Распределения интенсивности и фазы ГГ-мод с одинаковым индексом $n=1$ и различными параметрами γ на расстоянии $z=1000$ мм

На рис. 7 показаны распределения интенсивности и фазы ГГ-мод с одинаковым индексом $n=1$ и различными параметрами γ на одном и том же расстоянии. Видно, что с ростом параметрами γ радиус

первого светового кольца также увеличивается. При этом фазовая практически сохраняет свой вид, так как фазовая функция ГГ-мод (6) главным образом определяется номером винтовой сингулярности n .

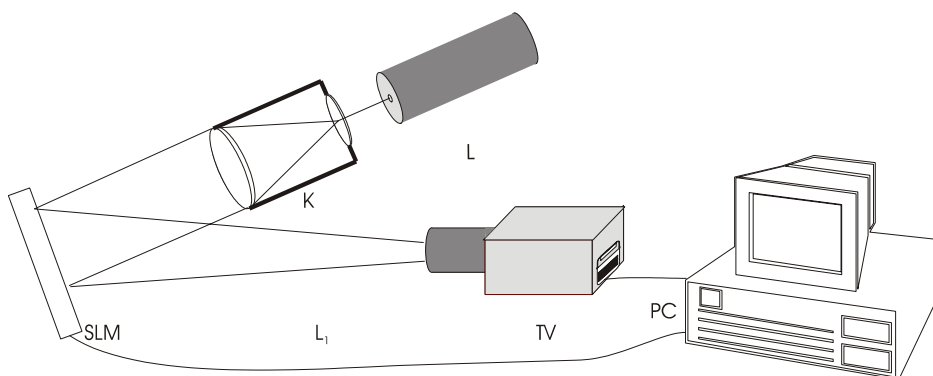


Рис. 8. Оптическая схема для эксперимента. L – твердотельный лазер с длиной волны 532 нм и мощностью 500 мВт, K – коллиматор, SLM – динамический модулятор света, TV – телекамера, PC – персональный компьютер

3. Экспериментальное формирование

Экспериментально ГГ-моды формировались с помощью жидко-кристаллического микро-дисплея с использованием оптической установки, схема которой представлена на рис.8. Луч лазера расширяется коллиматором и попадает на динамический модулятор света под углом близким к 90° и отражается в направлении телекамеры

ДОЭ формировался на динамическом модуляторе CRL OPTO с разрешением 1316×1024 и физическим размером 6,5 мм. Модулятор освещался плоским пучком от твердотельного лазера с длиной волны 532 нм и мощностью 500 мВт. При этом бинарная фаза, получаемая на модуляторе, кодировалась двумя способами.

1. Бинарная фаза $S(r, \varphi)$ при добавлении линейной несущей, удовлетворяет уравнению:

$$S(r, \varphi) = \text{sgn} \left\{ \cos \left[\gamma \ln \frac{r}{w} + n\varphi + \alpha x \right] \right\} \quad (8)$$

где $\text{sgn}(x)$ – знаковая функция, α – пространственная несущая частота, x – декартова координата. Амплитуда r^{-1} функции (4) заменялась на постоянное значение.

Закодированный элемент формирует в плоскости дифракции Фраунгофера два симметричных порядка с гипергеометрическими модами.

2. При квадратичном радиальном кодировании бинарная фаза ДОЭ рассчитывается по формуле

$$S(r, \varphi) = \text{sgn} \left\{ \cos \left[\gamma \ln \frac{r}{w} + n\varphi + \frac{kr^2}{2f} \right] \right\} \quad (9)$$

где f – фокусное расстояние сферической линзы.

Это значит, что из-за фактического добавления линзы, гипергеометрические моды формируются в сходящемся пучке.

На рис.9 представлены фазы линейно кодированных ДОЭ и распределения интенсивности на расстоянии 2000мм от пространственного модулятора для различных n и γ .

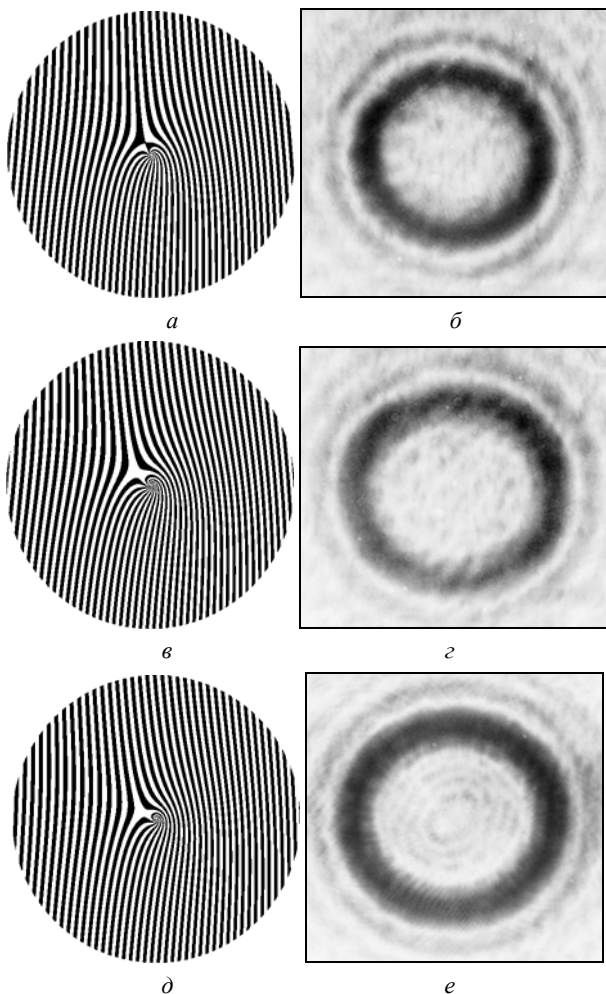


Рис. 9. Фаза сформированная на динамическом пространственном модуляторе света для $n=10, \gamma=5$ (а), $n=10, \gamma=10$ (в) и $n=5, \gamma=10$ (д) и соответствующие распределения интенсивности на расстоянии 2000 мм от модулятора (б), (г) и (е)

Так как при линейном кодировании энергия делится между двумя порядками, а дифракционная эффективность ДОО сформированного на модуляторе невысока полученные изображения обладают недостаточным контрастом. Для избавления от этого недостатка было использовано квадратичное кодирование (9).

На рис. 10 представлены виды фаз таких элементов (центральные части) формирующих гипергеометрические моды и распределения интенсивностей на расстоянии 700 мм от ДОО.

На рис. 11 представлено распределение интенсивности на разных расстояниях от ДОО.

Уменьшение размера гипергеометрической моды связано с тем, что фиксируемое изображение снималось в сходящемся пучке.

Как видно из рис. 11, структура распределения сохраняется, что доказывает модовый характер светового пучка.

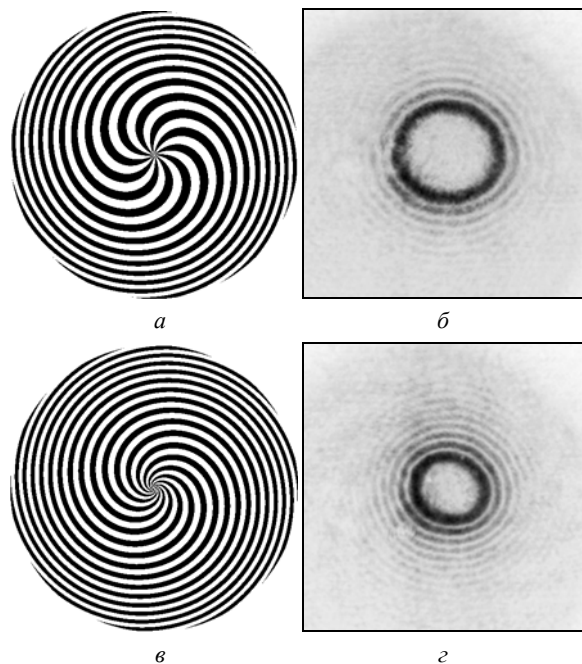


Рис. 10. (а) фаза ДОО для гипергеометрической моды с параметрами $n=10, \gamma=1$, (б) распределение интенсивности в зоне дифракции Френеля, (в) фаза ДОО для гипергеометрической моды с параметрами $n=10, \gamma=10$, (г) распределение интенсивности в зоне дифракции Френеля

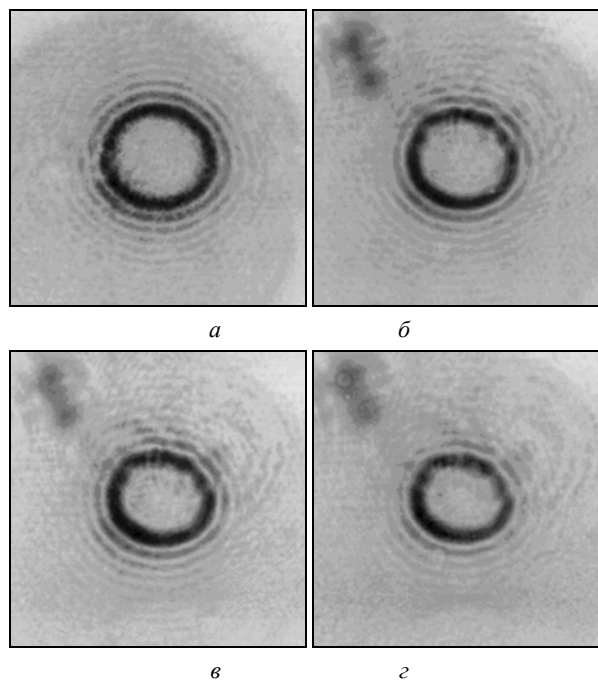


Рис. 11. Распространение пучка $n=10, \gamma=1$ (а) 700 мм, (б) 725 мм, (в) 750 мм, (г) 775 мм

Заключение

В работе впервые (по нашему мнению) рассмотрено теоретически и экспериментально новое семейство оптических вихрей, названных гипергеометрическими

модами. ГГ-моды удовлетворяют параксиальному уравнению типа Шредингера, образуют ортогональный базис функций, при распространении сохраняют свою структуру с точностью до масштаба и близки к известным модам Бесселя. Заметим, что при $\gamma = -i$ ГГ-моды переходят в однопараметрическое семейство чистых оптических вихрей [10].

Благодарности

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (CRDF Project SA-014-02), а также грантов РФФИ 05-08-50298, 05-01-96505.

Литература

1. Miller W., Jr. Symmetry and Separation of Variables, Addison-Wesley Pub. Com., MA, 1977.
2. Durnin J., Jr Miceli J.J., Eberly J.H., Diffraction-free beams, Phys. Rev. Lett., 1987. P. 1499–1501.
3. Sigman A.E., Lasers, University Science, Mill Valley, Calif, 1986.
4. Bandres M.A., Gutierrez-Vega J.C., Chavez-Cedra S., Parabolic nondiffracting optical wave fields, Opt. Lett., 2004. V. 29. №. 1. P. 44-46.
5. Gutierrez-Vega J.C., Bandres M.A., Helmholtz-Gauss waves, J. Opt. Soc. Am A, 2005. V. 22. №. 2. P. 289-298.
6. Bandres M.A., Gutierrez-Vega J.C., Chavez-Cedra S., Vector Helmholtz-Gauss and vector Laplace-Gauss beams, Opt. Lett., 2005. V. 30. №. 16. P. 2155-2157.
7. Bandres M.A., Gutierrez-Vega J.C. Ince-Gaussian beams, Opt. Lett., 2004. V. 29. №. 2. P. 144-146.
8. Bandres M.A., Gutierrez-Vega J.C., Elegant Ince-Gaussian beams, Opt. Lett., 2004. V. 29. №.15. P. 1724-1726.
9. Abramochkin E.G., Volostnikov V.G. Generalized Gaussian beams // J. Opt. A: Pure Appl. Opt., 2004. V. 6, P. 5157-5161, ()
10. Kotlyar V.V., Almazov A.A., Khonina S.N., Soifer V.A., Elfstrom H., Turunen J. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate, J. Opt. Soc. Am. A. 2005. V. 22. №. 5. P. 849-861.
11. Schwarz U.T., Bandres M.A., Gutierrez-Vega J., Observation of Ince-Gaussian modes in stable resonators, Opt. Lett.. 2004. V. 29. №. 16, P. 1870-1872.
12. Bentley J.B., Devis J.A., Bandres M.A., Gutierrez-Vega J.C. Generation of helical Ince-Gaussian beams with a liquid-crystal display, Opt. Lett.. 2006. V. 31, №. 5. P. 649-651.
13. Handbook of mathematical function, ed by M. Abramovitz, I.A. Stegun, NBS, Appl. Math. Ser. 55, 1964

Hypergeometric Modes

V.V. Kotlyar^{1,2}, R.V. Skidanov^{1,2}, S.N. Khonina^{1,2}, S.A. Balalaev^{1,2}

¹Image Processing Systems Institute of the RAS,

²Samara State Aerospace University (SSAU)

Abstract

The paper analyzes a new family of paraxial laser beams forming an orthogonal basis. When propagating in homogeneous space, these beams retain their structure with the accuracy of the scale. The intensity distribution in the cross section of such beams is similar to the intensity distribution for Bessel modes and is represented as a set of concentric alternating light and dark rings. The complex amplitude of such beams is proportional to the degenerate (confluent) hypergeometric function, and therefore we called such beams hypergeometric modes. We formed such modes using a liquid crystal microdisplay.

Keywords: paraxial laser beams, modes of homogeneous space, hypergeometric function.

Citation: V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, S.N. Khonina, S.A. Balalaev. Hypergeometric Modes. *Computer Optics* 2006; 30: 16-22.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian-American program “Basic Research and Higher Education” (CRDF Project SA-014-02), as well as grants from the RFBR 05-08-50298, 05-01-96505.

References

- [1] Miller W, Jr. Symmetry and separation of variables. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company; 1977. ISBN: 978-0-201-13503-9.
- [2] Durnin J Jr, Miceli JJ, Eberly JH. Diffraction-free beams. *Phys Rev Lett* 1987; 58(15): 1499-1501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.58.1499.
- [3] Siegman AE. Lasers. Sausalito, CA: University Science Book; 1986. ISBN: 0-935702-11-3.
- [4] Bandres MA, Gutiérrez-Vega JC, Chávez-Cerda S. Parabolic nondiffracting optical wave fields. *Opt Lett* 2004; 29(1): 44-46. DOI: 10.1364/OL.29.000044.
- [5] Gutiérrez-Vega JC, Bandres MA. Helmholtz-Gauss waves. *J Opt Soc Am A* 2005; 22(2): 289-298. DOI: 10.1364/JOSAA.22.000289.
- [6] Bandres MA, Gutiérrez-Vega JC, Chávez-Cerda S. Vector Helmholtz-Gauss and vector Laplace-Gauss beams. *Opt Lett* 2005; 30(16): 2155-2157. DOI: 10.1364/OL.30.002155.
- [7] Bandres MA, Gutiérrez-Vega JC. Ince-Gaussian beams. *Opt Lett* 2004; 29(2): 144-146. DOI: 10.1364/OL.29.000144.
- [8] Bandres MA, Gutiérrez-Vega JC. Elegant Ince-Gaussian beams. *Opt Lett* 2004; 29(15): 1724-1726. DOI: 10.1364/OL.29.001724.
- [9] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Generalized Gaussian beams. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2004; 6(5): S157. DOI: 10.1088/1464-4258/6/5/001.
- [10] Kotlyar VV, Almazov AA, Khonina SN, Soifer VA, Elfstrom H, Turunen J. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate. *J Opt Soc Am A* 2005; 22(5): 849-861. DOI: 10.1364/JOSAA.22.000849.
- [11] Schwarz UT, Bandres MA, Gutiérrez-Vega J. Observation of Ince-Gaussian modes in stable resonators. *Opt Lett* 2004; 29(16): 1870-1872. DOI: 10.1364/OL.29.001870.
- [12] Bentley JB, Devis JA, Bandres MA, Gutiérrez-Vega JC. Generation of helical Ince-Gaussian beams with a liquid-crystal display. *Opt Lett* 2006; 31(5): 649-651. DOI: 10.1364/OL.31.000649.
- [13] Abramovitz M, Stegun IA, eds. Handbook of mathematical functions: With formulas, graphs, and mathematical tables. New York: Dover Publications, Inc; 1964.