

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ КОНЕЧНОГО РАДИУСА НА СПИРАЛЬНОМ АКSIKОНЕ И СПИРАЛЬНОЙ ФАЗОВОЙ ПЛАСТИНКЕ: СРАВНЕНИЕ

В.В. Котляр, А.А. Ковалев, В.А. Соифер
 Институт систем обработки изображений Российской академии наук,
 Самарский государственный аэрокосмический университет

Д.А. Девис, С. Тувей, Д. Коттрел
 Государственный университет, Сан-Диего, Калифорния

Аннотация

Получены аналитические выражения, описывающие дифракцию Фраунгофера плоской волны конечного радиуса на спиральном аксиконе (СА) и спиральной фазовой пластинке (СФП). Решения получены в виде ряда из функций Бесселя для СА и в виде конечной суммы из функций Бесселя для СФП. Причем решение для СА переходит в решение для СФП, если параметр аксикона приравнять к нулю. На численных примерах показано, что добавление «слабого» аксикона к СФП приводит к снижению контраста концентрических колец в картине дифракции.

Введение

Впервые спиральный аксикон (СА) [1] и спиральная фазовая пластинка (СФП) [2] были изготовлены по технологии фотолитографии и экспериментально исследованы в 1992 году. СА используется для формирования бездифракционных лазерных пучков Бесселя, а СФП используется для формирования оптических вихрей и для оптического выполнения радиального преобразования Гильберта [2-4]. В последнее время возрос интерес к СА и СФП [5-19]. Это связано с тем, что улучшилось качество изготовления пространственных модуляторов света (ПМС), с помощью которых можно теперь формировать дифракционные оптические элементы, в том числе СА и СФП. Так, в [5] с помощью ПМС сформированы СФП высоких порядков ($n > 30$) и исследовались оптические вихри высоких порядков. С помощью ПМС можно сформировать составную СФП, которая будет генерировать лазерный пучок, состоящий из нескольких соосных оптических вихрей [6]. Также с помощью ПМС были сформированы бездифракционные пучки Бесселя [7, 8], эллиптические пучки Бесселя [9], пучки Гаусса-Айнса [10] и полые (трубчатые) пучки [11].

С другой стороны продолжают исследования СА и СФП, которые изготавливаются по традиционной технологии электронной литографии [12-15]. В [12, 13] экспериментально исследовалась дифракция плоской волны на СФП второго и третьего порядков. В [14] исследовался СА пятого порядка, а в [15] был изготовлен двойной аксикон, который формирует два конических световых пучка, интерферирующих между собой и образующих нулевую интенсивность на оптической оси.

Теоретическое исследование параксиальной дифракции Френеля и Фраунгофера на СФП было проведено для освещающих гауссова пучка [16], неограниченной плоской волны [2, 12], ограниченной плоской волны [5, 13], эллиптического пучка [17]. Теоретическое исследование дифракции на СА проводилось для неограниченной плоской волны

[14] и гауссова пучка [18]. Интерес к исследованию СА и СФП связан также с их применением для манипулирования микрочастицами [5, 14, 19].

В данной работе проведены теоретические исследования параксиальной дифракции Фраунгофера плоской волны конечного радиуса на СА и СФП. Получены новые аналитические выражения для комплексной амплитуды света в виде ряда из функций Бесселя (для СА) и в виде конечной суммы функций Бесселя (для СФП). Особенность этих выражений в том, что дифракционная картина Фраунгофера плоской волны конечного радиуса на СА описывается разными аналитическими выражениями внутри и вне светового кольца некоторого радиуса, который равен радиусу кольца с максимальной интенсивностью для СФП небольших порядков. Интересно также, что на картине дифракции расстояния между световыми кольцами, расположенными внутри светового кольца с максимальной интенсивностью, почти в два раза меньше, чем расстояния между кольцами, расположенными вне этого кольца. Дифракционная картина Фраунгофера плоской волны конечного радиуса на СФП описывается разными аналитическими выражениями для четных и нечетных номеров n . Также численно показано, что слабый аксикон, добавленный к СФП, существенно снижает контраст периферийных колец в картине дифракции.

2. Описание дифракции Фраунгофера на СА с помощью гипергеометрических функций

Рассмотрим скалярную параксиальную дифракцию плоской волны конечного радиуса R , комплексная амплитуда которой имеет вид

$$E_0(r) = \text{circ}\left(\frac{r}{R}\right) = \begin{cases} 1, & r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (1)$$

на спиральном аксиконе (СА), который, в приближении тонкого транспаранта, описывается функцией пропускания вида:

$$\tau_n(r, \varphi) = \exp(i\alpha r + in\varphi), \quad (2)$$

где (r, φ) - полярные координаты в плоскости СА при $z = 0$, z - оптическая ось, α - параметр аксикона, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ - номер спиральной фазовой пластинки (СФП).

Тогда комплексная амплитуда света $F_n(\rho, \theta)$ в фокальной плоскости идеальной сферической линзы с фокусным расстоянием f имеет вид (опустим несущественный множитель $\exp(ikz)$):

$$F_n(\rho, \theta) = -\frac{ik}{2\pi z} \times \int_0^{R/2} \int_0^{2\pi} \exp\left[i\alpha r + in\varphi - \frac{ik}{f} r\rho \cos(\varphi - \theta) \right] r dr d\varphi = (-i)^{n+1} \frac{k}{f} \exp(in\theta) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^m}{m!} \int_0^R r^{m+1} J_n\left(\frac{k}{f} \rho r\right) r dr, \quad (3)$$

где (ρ, θ) - полярные координаты в плоскости дифракции Фраунгофера, $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число, $J_n(x)$ - функция Бесселя.

Используя справочный интеграл [20]:

$$\int_0^R x^\lambda J_\nu(ax) dx = \frac{(aR)^{\nu+\lambda+1}}{a^{\lambda+1} 2^\nu (\nu+\lambda+1)\nu!} \times {}_1F_2\left[\frac{\nu+\lambda+1}{2}, \frac{\nu+\lambda+3}{2}, \nu+1, -\left(\frac{aR}{2}\right)^2 \right], \quad (4)$$

вместо выражения (3) получим:

$$F_n(\rho, \theta) = \frac{(-i)^{n+1} \exp(in\theta)}{n!} \left(\frac{kR^2}{f}\right) \left(\frac{kR\rho}{2f}\right)^n \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\alpha R)^m}{(m+n+2)m!} \times {}_1F_2\left[\frac{m+n+2}{2}, \frac{m+n+4}{2}, n+1, -\left(\frac{kR\rho}{2f}\right)^2 \right], \quad (5)$$

где ${}_1F_2(a, b, c, x)$ - гипергеометрическая функция:

$${}_1F_2(a, b, c, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m x^m}{(b)_m (c)_m m!}, \quad (6)$$

$(a)_m = \Gamma(a+m)/\Gamma(a)$, $(a)_0 = 1$, $\Gamma(x)$ - гамма-функция.

Из выражения (5) следует, что картина дифракции представляет собой набор концентрических колец. При $\rho = 0$ в центре картины дифракции при любом $n \neq 0$ будет нулевая интенсивность. Так как комплексная амплитуда (5) зависит от комбинации переменных $kR\rho/(2f)$, то радиусы ρ_l локальных максимумов и минимумов картины дифракции должны удовлетворять выражению:

$$\rho_l = \frac{\lambda f \gamma_l}{\pi R}, \quad (7)$$

где γ_l - постоянные, зависящие только от номера кольца $l = 1, 2, \dots$ картины дифракции.

Из уравнения (5) при $\alpha = 0$ (аксикон отсутствует) следует выражение для комплексной амплитуды дифракции Фраунгофера плоской волны конечного радиуса на СФП [13]:

$$E_n(\rho, \theta) = \frac{(-i)^{n+1} \exp(in\theta)}{(n+2)n!} \left(\frac{kR^2}{f}\right) \left(\frac{kR\rho}{2f}\right)^n \times {}_1F_2\left[\frac{n+2}{2}, \frac{n+4}{2}, n+1, -\left(\frac{kR\rho}{2f}\right)^2 \right]. \quad (8)$$

Интересно сравнить выражение (5) с выражением для комплексной амплитуды, описывающей дифракцию Френеля плоской волны конечного радиуса на СФП [13]:

$$E_n(\rho, \theta, z) = 2 \exp\left(\frac{iz_0 \bar{\rho}^2}{z} + in\theta\right) \frac{\bar{\rho}^n}{n!} \left(\frac{-iz_0}{z}\right)^{n+1} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{iz_0}{z}\right)^m}{(2m+n+2)m!} \times {}_1F_2\left[\frac{2m+n+2}{2}, \frac{2m+n+4}{2}, n+1, -\left(\frac{z_0 \bar{\rho}}{z}\right)^2 \right], \quad (9)$$

где $z_0 = kR^2/2$, $\bar{\rho} = \rho/R$.

Структура выражений (5) и (9) аналогична и описывает картины дифракции, состоящие из набора концентрических световых колец. Причем, как в выражении (5) при стремлении α к нулю из всей суммы остается только первое слагаемое, также в выражении (9) при стремлении z к бесконечности остается только одно слагаемое, равное (8) при $z=f$.

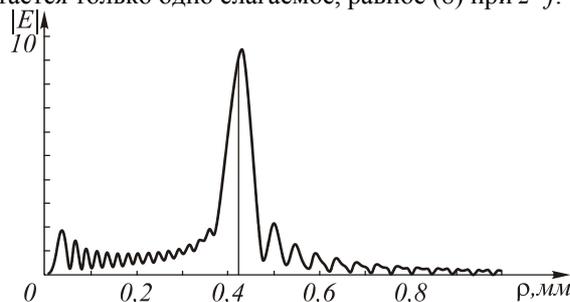


Рис. 1. Радиальное сечение модуля амплитуды $|F_n(\rho, \theta)|$ дифракции Фраунгофера плоской волны конечного радиуса на СА

На рис. 1 показан рассчитанный по формуле (5) модуль амплитуды $|F_n(\rho, \theta)|$ в относительных единицах в зависимости от радиальной переменной. Эта кривая показывает радиальное сечение картины дифракции Фраунгофера плоской волны радиуса $R = 2$ мм и длиной волны $\lambda = 633$ нм на СА с параметром $\alpha = 30 \text{ мм}^{-1}$ и $n = 4$. Фокусное расстояние линзы равно $f = 140$ мм.

3. Описание дифракции Фраунгофера на СА с помощью ряда из функций Бесселя

Вместо ряда (5), состоящего из гипергеометрических функций, можно получить для комплексной амплитуды, описывающей дифракцию Фраунгофера плоской волны радиуса R на СА, выражение в виде ряда из функций Бесселя:

$$F_n(\rho, \theta) = \frac{(-i)^{n+1} k \exp(in\theta)}{2\pi f} \times \left[(-i)^n \frac{\partial I_1^n}{\partial \alpha} - \exp(i\alpha R) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m \left(iRI_1^m + \frac{\partial I_1^m}{\partial \alpha} \right) J_{m+n}(R\bar{\rho}) \right], \quad (10)$$

где

$$I_1^n = \int_0^{2\pi} \frac{\exp(in\varphi) d\varphi}{\alpha + \bar{\rho} \cos \varphi}, \quad (11)$$

$\bar{\rho} = k\rho/f$, $J_{m+n}(x)$ - функция Бесселя. Выражения для интеграла I_1^n и производной $\partial I_1^n / \partial \alpha$ из уравнения (11) можно получить в явном виде:

$$I_1^n = \begin{cases} \frac{2\pi \operatorname{sgn} \alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \bar{\rho}^2}} \chi^{|\alpha|}, & 0 < \bar{\rho} < |\alpha|, \\ \frac{\pi i (\beta^{*|\alpha|} - \beta^{|\alpha|})}{\sqrt{\bar{\rho}^2 - \alpha^2}}, & \bar{\rho} > |\alpha|, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$\begin{cases} \beta = \frac{-\alpha + i\sqrt{\bar{\rho}^2 - \alpha^2}}{\bar{\rho}}, \\ \chi = \frac{-\alpha + \operatorname{sgn} \alpha \sqrt{\alpha^2 - \bar{\rho}^2}}{\bar{\rho}}, \end{cases} \quad (13)$$

$$\operatorname{sgn} \alpha = \begin{cases} 1, & \alpha > 0, \\ -1, & \alpha < 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial I_1^n}{\partial \alpha} = \begin{cases} -2\pi \chi^{|\alpha|} \cdot \frac{\alpha \operatorname{sgn} \alpha + |n| \sqrt{\alpha^2 - \bar{\rho}^2}}{(\alpha^2 - \bar{\rho}^2)^{3/2}}, & 0 < \bar{\rho} < |\alpha|, \\ \pi i \left[\frac{\alpha (\beta^{*|\alpha|} - \beta^{|\alpha|})}{(\bar{\rho}^2 - \alpha^2)^{3/2}} - \frac{i|n| (\beta^{*|\alpha|} + \beta^{|\alpha|})}{\bar{\rho}^2 - \alpha^2} \right], & \bar{\rho} > \alpha. \end{cases} \quad (14)$$

При $R \rightarrow \infty$ выражение (10) приводит к уравнениям, описывающим дифракцию неограниченной плоской волны на СА, полученным в [14]. Из уравнений (12) и (14) также следует, что поле $F_n(\rho, \theta)$ описывается разными функциональными зависимостями при $0 < \bar{\rho} < |\alpha|$ и при $\bar{\rho} > |\alpha|$. Разный характер картины дифракции при изменении $\bar{\rho}$ от 0 до $|\alpha|$ и после $|\alpha|$ виден также из рис. 1. Интересно отметить, что пространственная частота картины дифракции на рис. 1 на интервале $0,1 < \rho < 0,3$ мм примерно в два раза больше, чем на интервале

$0,5 < \rho < 0,7$ мм. Заметим также, что глобальный максимум интенсивности $I_n(\rho, \theta) = |F_n(\rho, \theta)|^2$ возникает при $\bar{\rho} > |\alpha|$ (на рис. 1 точка $\bar{\rho} = |\alpha|$ отмечена вертикальной линией).

Для слабого СА ($\alpha R \ll 1$) имеет место эффект снижения контраста периферийных колец дифракционной картины. Действительно, при малом αR в ряду (5) можно оставить только первых два слагаемых:

$$F_n(\rho, \theta) \approx \frac{(-i)^{n+1} \exp(in\theta)}{n!} \left(\frac{kR^2}{f} \right) x^n \times \left[\frac{1}{n+2} {}_1F_2 \left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+4}{2}, n+1, -x^2 \right) + \frac{i\alpha R}{n+3} {}_1F_2 \left(\frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2}, n+1, -x^2 \right) + \dots \right], \quad (15)$$

где $x = kR\rho/(2f)$. Первое слагаемое в уравнении (15) совпадает с выражением (8) – оно действительное, второе слагаемое в уравнении (15) – только мнимое. Поэтому интенсивность $I_n(\rho, \theta)$ будет пропорциональна сумме квадратов этих двух слагаемых. Это означает, что нули интенсивности будут иметь место в тех точках ρ , в которых оба слагаемых в выражении (15) равны нулю. Это приведет к снижению контраста периферийных колец картины дифракции.

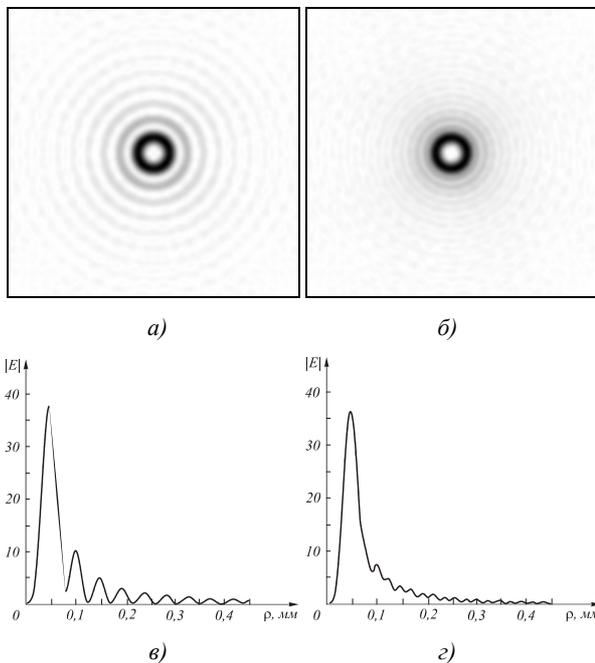


Рис. 2. Рассчитанные картины дифракции Фраунгофера $|F_n(\rho, \theta)|$ плоской волны конечного радиуса на СФП $n = 4$ (а) и на слабом СА ($n = 4$) (б) и соответствующие им радиальные сечения модулей амплитуды (в, з)

На рис. 2 показаны две рассчитанных картины дифракции Фраунгофера (2D модуль амплитуды $|E_n(\rho, \theta)|$, $f = 140$ мм) плоской волны конечного радиуса $R = 2$ мм с длиной волны $\lambda = 633$ нм на СФП ($\alpha = 0$, $n = 4$) (а) и СА ($\alpha = 1 \text{ мм}^{-1}$, $n = 4$) (б). Размер обеих картин дифракции $0,45 \times 0,45$ мм. На рис. 2вг приведены радиальные сечения модулей амплитуды картин дифракции, показанных на рис. 2аб.

Из рис. 2 видно, что если при $\alpha = 0$ число локальных максимумов (кроме главного) функции модуля амплитуды $|F_n(\rho, \theta)|$ в диапазоне $0 < \rho < 0,45$ мм равно 8, и большая часть минимумов равна нулю (рис. 2в), то при $\alpha = 1 \text{ мм}^{-1}$ увеличивается число локальных максимумов амплитуды примерно вдвое, почти все минимумы не равны нулю, и поэтому контраст картины дифракции в области боковых лепестков существенно снижается.

4. Описание дифракции Фраунгофера на СФП с помощью конечных сумм функций Бесселя

Чтобы получить выражение для дифракции Фраунгофера плоской волны радиуса R на СФП с целым номером n в уравнениях (10)-(14) следует положить $\alpha = 0$. Тогда интегралы (12) и (14) существенно упростятся:

$$I_1^n = \begin{cases} 0, n = 2m, \\ -\frac{2\pi i^{|n|+1}}{\bar{\rho}}, n = 2m + 1; \end{cases} \quad (16)$$

$$\frac{\partial I_1^n}{\partial \alpha} = \begin{cases} \frac{2\pi i^{|n|} |n|}{\bar{\rho}^2}, n = 2m, \\ 0, n = 2m + 1. \end{cases} \quad (17)$$

Подставляя выражения (16), (17) в уравнение (10), получим выражение для комплексной амплитуды дифракции Фраунгофера плоской волны конечного радиуса на СФП:

$$E_n(\rho, \theta) = \frac{(-i)^{n+1} k \exp(in\theta)}{f \bar{\rho}^2} \times \begin{cases} n \left[1 - J_0(y) - 2 \sum_{m=1}^{(n-2)/2} J_{2m}(y) \right] - y J_{n-1}(y), n = 2m, \\ n \left[\int_0^y J_0(t) dt - 2 \sum_{m=1}^{(n-1)/2} J_{2m-1}(y) \right] - y J_{n-1}(y), n = 2m + 1, \end{cases} \quad (18)$$

где $y = R\bar{\rho} = kR\rho/f$,

$$\int_0^y J_0(t) dt = \frac{y}{2} \{ \pi J_1(y) H_0(y) + J_0(y) [2 - \pi H_1(y)] \}, \quad (19)$$

$H_{0,1}(y)$ - функции Струве нулевого и первого порядков.

Выражение (18) описывает дифракцию на СФП в виде конечных сумм функций Бесселя. Для четных и нечетных номеров СФП дифракционная картина описывается разными выражениями. Для пер-

вых трех номеров $n = 0, 1, 2$ из (18) следуют простые выражения:

$$E_0(\rho, \theta) = -\frac{ikR^2}{f} \cdot \frac{J_1(y)}{y}, \quad (20)$$

$$E_1(\rho, \theta) = -\frac{k \exp(i\theta)}{f \bar{\rho}^2} \left[\int_0^y J_0(t) dt - y J_0(y) \right], \quad (21)$$

$$E_2(\rho, \theta) = \frac{ik \exp(i2\theta)}{f \bar{\rho}^2} [2 - 2J_0(y) - yJ_1(y)]. \quad (22)$$

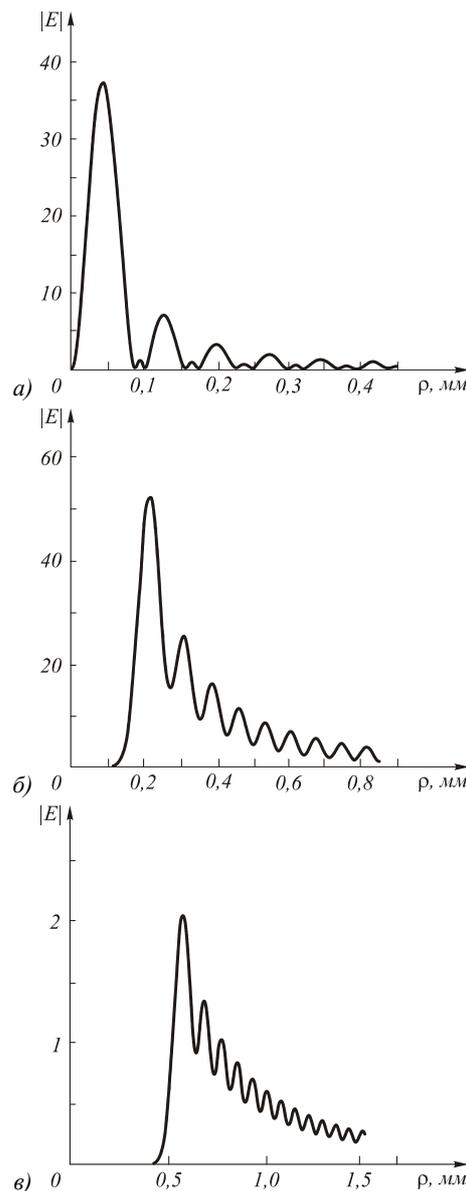


Рис. 3. Рассчитанные модули комплексной амплитуды $|E_n(\rho, \theta)|$ от радиальной координаты при разных номерах СФП: $n = 2$ (а), $n = 16$ (б), $n = 50$ (в)

Выражение (20) описывает обычную картину дифракции Фраунгофера плоской волны на круглой апертуре радиуса R . На рис. 3 показаны рассчитанные модули амплитуды $|E_n(\rho, \theta)|$ радиальных сече-

ний картин дифракции Фраунгофера ($f = 100$ мм) плоской волны радиуса $R = 1$ мм и с длиной волны $\lambda = 633$ нм на СФП с номерами $n = 2, 16, 50$.

Из рис. 3 видно, что с ростом n уменьшается контраст боковых лепестков модуля амплитуды. Минимумы модуля амплитуды боковых лепестков не равны нулю. Из уравнения (18) можно асимптотически оценить радиус первого кольца, на котором модуль амплитуды поля равен нулю. При $\rho \rightarrow \infty$ ($n = 2m$) из уравнения (18) следует приближенное равенство:

$$|E_n(\rho, \theta)| \approx \frac{k[n - y J_n(y)]}{f \rho^2} \approx \frac{k}{f \rho^2} \left[n - \sqrt{\frac{2y}{\pi}} \sin\left(y - \frac{n+1}{2} \pi\right) \right] \quad (23)$$

В уравнении (23) воспользовались асимптотическим представлением функции Бесселя при большом значении аргумента. Из уравнения (23) следует, что примерная зависимость радиуса ρ_0 , при котором имеет место первый нуль амплитуды $|E_n(\rho, \theta)|$, имеет вид ($n \gg 1$):

$$\rho_0 \approx \frac{\lambda f n^2}{4R} \quad (24)$$

Из уравнения (24) видно, что зависимость радиуса для первого нуля амплитуды от номера СФП квадратичная. Это согласуется с рис. 3, так как видно, что с ростом n растет значение ρ_0 , при котором имеет место первый нуль амплитуды.

Из уравнения (18) можно получить рекуррентное соотношение, с помощью которого быстро и удобно рассчитывать комплексные амплитуды при разных n :

$$E_{n+2}(\rho, \theta) = -\frac{n+2}{n} \exp(i2\theta) E_n(\rho, \theta) + 2(-i)^{n+1} \frac{R}{\rho} \frac{n+1}{n} \exp[i(n+2)\theta] J_{n+1}\left(\frac{k}{f} R \rho\right) \quad (25)$$

Уравнение (25) верно для всех целых n . Из уравнения (25) можно получить уравнение, которому должны удовлетворять координаты ρ_m точек, в которых амплитуда поля $|E_{n+2}(\rho, \theta)|$ равна нулю ($n > 0$):

$$|E_n(\rho_m, \theta)| = 2 \frac{R}{\rho_m} \left(\frac{n+1}{n+2}\right) J_{n+1}\left(\frac{kR\rho_m}{f}\right) \quad (26)$$

Из рис. 4 видно, что максимумы модуля амплитуды $|E_n(\rho, \theta)|$ почти совпадают с максимумами функции $2R/\rho \cdot (n+1)/(n+2) \cdot J_{n+1}(kR\rho/f)$, и наименьшая координата ρ_0 , при которой максимумы этих двух функций совпадут точно, и будет первым нулем амплитуды $E_{n+2}(\rho, \theta)$. Из сравнения рис. 4а и рис. 4б видно, что с ростом номера n увеличивается значение ρ_0 .

Интересно сравнить уравнение (26) с уравнением [13], которому должны удовлетворять координаты ρ_s минимумов и максимумов амплитуды поля $E_n(\rho, \theta)$:

$$|E_n(\rho, \theta)| = \left(\frac{kR^2}{2f}\right) J_n\left(\frac{kR\rho_s}{f}\right) \quad (27)$$

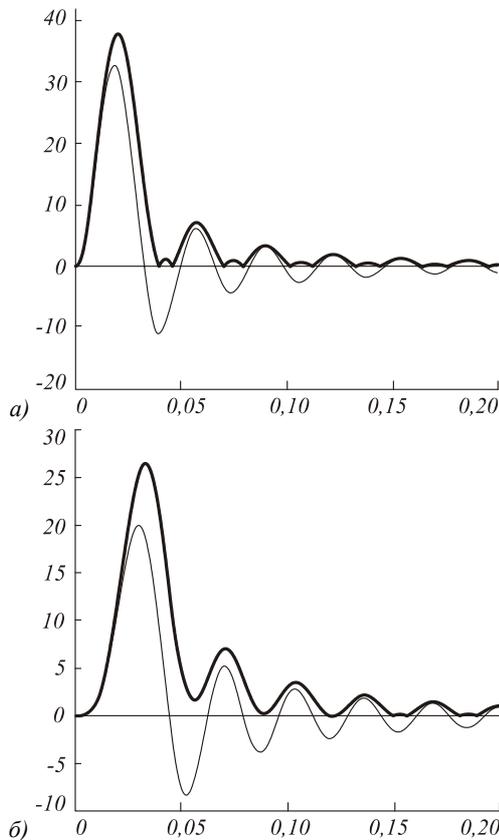


Рис. 4. Графики функций ($n=2$ (а) и $n=4$ (б)) из левой и правой частей в уравнении (26): толстая кривая – график функции $|E_n(\rho, \theta)|$, тонкая кривая – график функции $2R/\rho \cdot (n+1)/(n+2) \cdot J_{n+1}(kR\rho/f)$. Параметры расчета: $R=1$ мм, $f=100$ мм, $\lambda=633$ нм

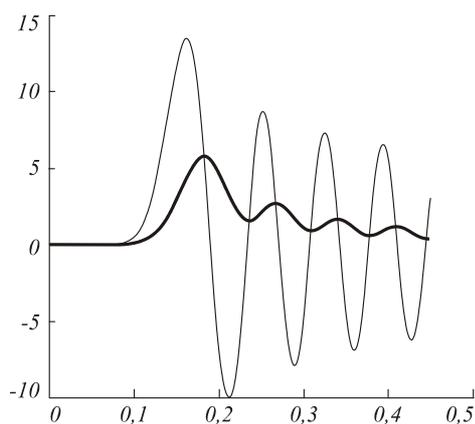


Рис. 5. Графики функций из левой и правой частей в уравнении (27): толстая кривая – график функции $|E_n(\rho, \theta)|$, тонкая кривая – график функции $(kR^2)/(2f) \cdot J_n(kR\rho/f)$. Параметры расчета: $n=14$, $R=1$ мм, $f=100$ мм, $\lambda=633$ нм

Из уравнения (27) видно, что для интенсивности основного (первого) максимума картины дифракции Фраунгофера имеет место неравенство:

$$|E_n(\rho_s, \theta)|^2 \leq \left(\frac{kR^2}{2f}\right) J_{0n}, \tag{28}$$

где $J_{0n} = \max |J_n(y)|^2$.

На рис. 5 показаны два графика функций из левой и правой частей уравнения (27) при следующих параметрах: $n=14$, $R=1$ мм, $f=100$ мм, $\lambda=633$ нм. Видно, что графики пересекаются в точках, в которых амплитуда $|E_n(\rho_s, \theta)|$ имеет экстремумы.

Из рис. 5 видно также, что координата ρ_v первого максимума амплитуды $|E_n(\rho_s, \theta)|$ (радиус воронки) находится между первым нулем производной функции Бесселя n -го порядка и между первым нулем самой функции Бесселя n -го порядка:

$$\frac{f\gamma'_{n,1}}{kR} < \rho_v < \frac{f\gamma_{n,1}}{kR}, \tag{29}$$

где $\gamma_{n,1}$ и $\gamma'_{n,1}$ - первые корни функции Бесселя n -го порядка и ее производной: $J_n(\gamma_{n,1}) = J'_n(\gamma'_{n,1}) = 0$. Из неравенств (29) можно получить приближенное ра-

венство для определения радиуса первого максимума амплитуды $|E_n(\rho_s, \theta)|$:

$$\rho_v \approx \frac{\bar{\gamma}_n f}{kR}, \quad \bar{\gamma}_n = \frac{\gamma_{n,1} + \gamma'_{n,1}}{2}. \tag{30}$$

Интересно сравнить выражение (30) с аналогичным выражением для радиуса воронки, полученным в [13]:

$$\rho_v = \frac{\gamma_{n-1,1} f}{kR}, \tag{31}$$

где $\gamma_{n-1,1}$ - корень функции Бесселя $(n-1)$ -го порядка: $J_{n-1}(\gamma_{n-1,1}) = 0$. В таблице показаны значения радиусов максимальной амплитуды (радиусов воронок) для n от 1 до 8, вычисленных с помощью уравнений (18) (первая строка), (30) (вторая строка) и (31) (третья строка). Радиус максимальной амплитуды с помощью уравнения (18) находился численными методами и считается более точным, а выражения (30) и (31) дают приближенное значение этого радиуса. Из Таблицы видно, что оба выражения дают примерно одинаковую оценку радиуса воронки (при $R=1$ мм, $f=100$ мм, $\lambda=633$ нм) с максимальной относительной ошибкой 4% ($n>1$), хотя выражение (31) немного точнее (максимальная ошибка 3%).

Таблица. Приближенные значения радиуса ρ_v максимальной амплитуды $|E_n(\rho, \theta)|$

| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|--------------------------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|
| ρ_v (мкм), ур. (18) | 24,6 | 39,6 | 53,0 | 65,8 | 78,2 | 90,4 | 102,4 | 114,0 |
| ρ_v (мкм), ур. (30) | 28,6 | 41,2 | 53,3 | 64,9 | 76,5 | 87,8 | 99,1 | 110,2 |
| ρ_v (мкм), ур. (31) | 24,2 | 38,6 | 51,7 | 64,3 | 76,4 | 88,4 | 100,0 | 111,7 |

5. Сравнение теории и эксперимента

Эксперименты по дифракции Фраунгофера плоской волны конечного радиуса на СФП проводились с помощью программируемого фазового жидко-кристаллического пространственного модулятора света (ПМС). Свет от аргонового лазера с длиной волны 514 нм коллимировался и падал на поверхность ПМС. Электрически управляемый нематический ПМС фирмы Seiko Epson с разрешением 640x480 пикселей имеет размер по диагонали 3,3 см. Пропускание ПМС было пропорционально функции (2) СФП с номером $n=10$ и $\alpha=0$ мм⁻¹, а также СА с номером $n=10$ и $\alpha=11$ мм⁻¹. На рис. 6 показаны картины дифракции Фраунгофера плоской волны на СФП ($n=10$) (а) и ее вертикальное сечение (б) и на СА ($n=10$, $\alpha=11$ мм⁻¹) (в), ее вертикальное сечение (г), зарегистрированные ССД-камерой в фокальной плоскости сферической линзы с фокусным расстоянием $f=100$ мм.

Сравнивая рисунки бб и бг можно сделать вывод, что добавление слабого аксикона к СФП приводит к снижению примерно в 2 раза интенсивности пери-

ферийных колец картины дифракции. Зарегистрированные интенсивности в вертикальном сечении обеих картин дифракции хорошо согласуются с теоретическими кривыми интенсивности.

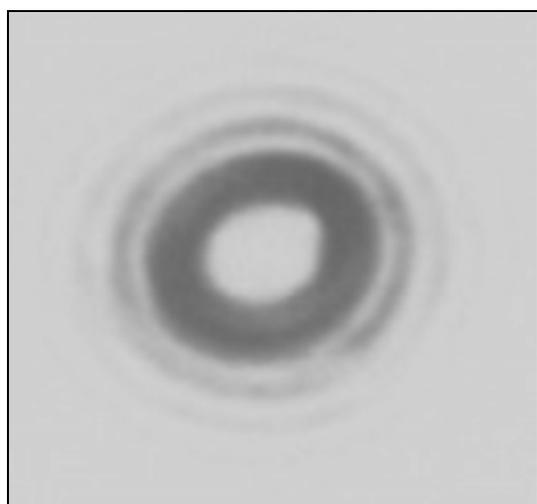
Заключение

В работе получены аналитические выражения для параксиальной дифракции Фраунгофера плоской волны конечного радиуса на СА и СФП с произвольным целым n . Для СА комплексная амплитуда описывается либо рядом из гипергеометрических функций (уравнение (5)), либо рядом из функций Бесселя (уравнение (10)), а для СФП – конечной суммой из функций Бесселя (уравнение (18)). Причем комплексные амплитуды картины дифракции для СА описываются разными аналитическими выражениями внутри и вне некоторого радиуса (уравнения (12), (14)). Картина дифракции для СФП также описывается разными суммами для четных и нечетных номеров n . Численно показано, что при добавлении слабого аксикона к СФП контраст периферийных колец картины дифракции Фраунгофера существенно снижается.

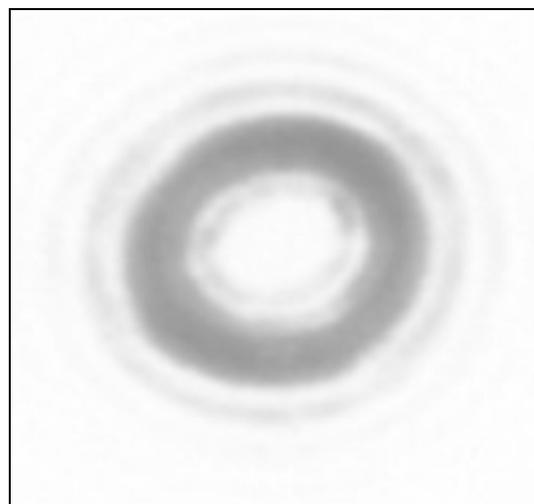
Благодарности

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные ис-

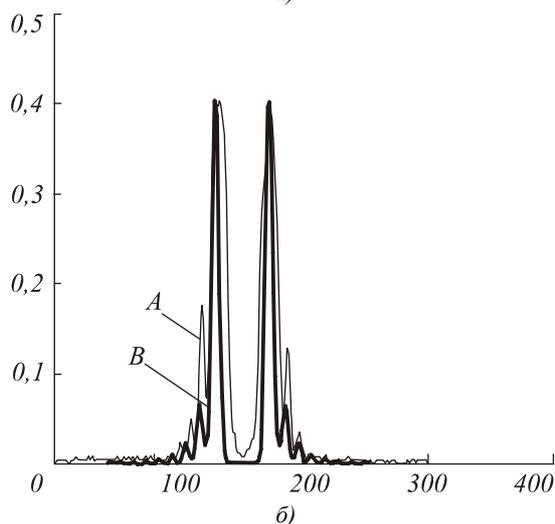
следования и высшее образование» (грант CRDF REC SA-014-02), а также гранта РФФИ 05-08-50298.



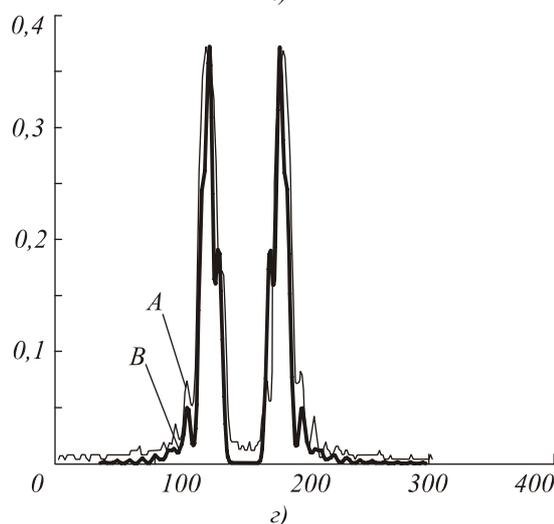
а)



е)



б)



з)

Рис. 6. Картины дифракции Фраунгофера плоской волны на СФП ($n=10$) и ее вертикальное сечение (б) и на СА ($n=10$, $\alpha=11\text{мм}^{-1}$) (е), ее вертикальное сечение (з), зарегистрированные ССD-камерой в фокальной плоскости сферической линзы с фокусным расстоянием $f=100$ мм.

A – эксперимент, *B* – теория. По горизонтальной оси – число пикселей ПМС, по вертикальной оси – относительные значения интенсивности

Литература

1. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Shinkaryev M.V., Uspleniev G.V. Trochoston // *Opt. Commun.*, V.91. No.3-4. Pp.158-162 (1992).
2. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Shinkarev M.V., Soifer V.A., Uspleniev G.V. The phase rotor filter // *J. Mod. Opt.*, V.39. No.5. P. 1147-1154 (1992).
3. Davis J.A., McNamara E., Cottrell D.M., Campos J., Image processing with the radial Hilbert transform: theory and experiments // *Opt. Lett.*, V. 25. No.2. P. 99-101 (2000).
4. Guo C., Han Y., Xu J., Ding J.
5. Radial Hilbert transform with Laguerre-Gaussian spatial filters // *Opt. Lett.*, V.31. No.10. Pp.1394-1396 (2006).
6. Curtis J.E., Grier D.G. Structure of optical vortices // *Phys. Rev. Lett.*, V.90, No.13, P. 1.33901-1-3 (2003).
7. Lin J., Yuan X., Tao S.H., Burge R.E. Synthesis of multiple collinear helical modes generated by a phase-only element. *J. Opt. Soc. Am. A.*, V.23. No.5. P. 1214-1218 (2006).
8. Chattaripiban N., Rogers E.A., Cofield D., Hill W.T., R. Roy Generation of non-diffracting Bessel beams by use of a spatial light modulator, *Opt. Lett.*, V.28. No.22. P. 2183-2185 (2003).
9. Hakola A., Shevchenko A., Buchter S.C., Kaivola M., Tabiryana N.V. Creation of a narrow Bessel-like laser beam using a nematic liquid crystal // *J. Opt. Soc. Am. B*, V.23, No.4, P. 637-641 (2006).

10. Chakraborty R., Ghosh A. Generation of an elliptic Bessel beam // *Opt. Lett.*, V.31. No.1. P. 38-40 (2006).
11. Bentley J.B., Davis J.A., Bandres M.A., Gutiérrez-Vega J.C. Generation of helical Ince-Gaussian beams with a liquid-crystal display // *Opt. Lett.*, V.31, No.5, Pp.649-651 (2006).
12. Fatemi F.K., Bashkansky M. Generation of hollow beams by using a binary spatial light modulator // *Opt. Lett.*, V.31. No. 7. P.864-866 (2006).
13. Kotlyar V.V., Almazov A.A., Khonina S.N., Soifer V.A., Elfstrom H., Turunen J. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate // *J. Opt. Soc. Am. A.*, V.22, No.5, Pp.849-861 (2005).
14. Kotlyar V.V., Khonina S.N., Kovalev A.A., Soifer V.A., Elfstrom H., Turunen J. Diffraction of a plane, finite-radius wave by a spiral phase plate // *Opt. Lett.*, V.31, No.11, Pp.1597-1599 (2006).
15. Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Khonina S.N., Skidanov R.V., Soifer V.A., Elfstrom H., Tossavainen N., Turunen J. Diffraction of conic and Gaussian beams by a spiral phase plate // *Appl. Opt.*, V.45, No.12, Pp.2656-2665 (2006).
16. Ahluwalia B.P.S., Cheong W.C., Yuan X.-C., Zhang L.-S., Tao S.-H., Bu J., Wang H. Design and fabrication of a double-axicon for generation of tailorable self-imaged three-dimensional intensity voids // *Opt. Lett.*, V.31. No.7. P. 987-989 (2006).
17. Rozas D., Law C.T., Swartzlander G.A. Propagation dynamics of optical vortices // *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol.14, No.11, Pp.3054-3065 (1997).
18. Dennis M.R. Rows of optical vortices from elliptically perturbing a high-order beam, *Opt. Lett.*, V.31, No.9, Pp.1325-1327 (2006).
19. Ling D., J. Li, J. Chen Analysis of eigenfields in the axicon-based Bessel-Gauss resonator by the transfer-matrix method // *J. Opt. Soc. Am. A.*, V.23, No.4, Pp.912-918 (2006).
20. Cheong W.C., Lee W.M., Yuan X.-C., Zhang L.-S., Dholakia K., Wang H. Direct electron-beam writing of continuous spiral phase plates in negative resist with high power efficiency for optical manipulation // *Appl. Phys. Lett.*, V. 85. No.23. P. 5784-5786 (2004).
21. Prudnikov A.P., Brichkov Y.A., Marichev O.I. Integrals and Series // *Special Functions*. Moscow, Nauka.1983.

Diffraction of a plane wave of a finite radius on a spiral axicon and a spiral phase plate: comparison

V.V. Kotlyar^{1,2}, A.A. Kovalev^{1,2}, V.A. Soifer^{1,2}, J.A. Davis³, C. Tuvey³, D. Cottrell³

¹Image Processing Systems Institute of the RAS,

²Samara State Aerospace University (SSAU)

³San Diego State University, California

Abstract

Analytical expressions were obtained that describe the Fraunhofer diffraction of a plane wave of a finite radius on a spiral axicon (SA) and a spiral phase plate (SPP). The solutions are obtained in the form of a series of Bessel functions for SA and as a finite sum of the Bessel functions for SPT. Moreover, the solution for SA turns into the solution for SPP if the axicon parameter is set to zero. Numerical examples show that the addition of a “weak” axicon to a SPP leads to a decrease in the contrast of concentric rings in the diffraction pattern.

Keywords: Spiral Axicon, Spiral Phase Plate, Fraunhofer diffraction, Bessel functions.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA, Davis JA, Tuvey C, Cottrell D. Diffraction of a Plane Wave of a Finite Radius on a Spiral Axicon and a Spiral Phase Plate: Comparison. *Computer Optics* 2006; 30: 36-43. DOI: 10.1080/09500349214551151.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian-American program “Basic Research and Higher Education” (grant CRDF REC SA-014-02), as well as a grant from the RFBR 05-08-50298.

References

- [1] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Shinkaryev MV, Uspleniev GV. Trochoson. *Opt Commun* 1992; 91(3-4): 158-162. DOI: 10.1016/0030-4018(92)90430-Y.
- [2] Khonina SN, Kotlyar VV, Shinkarev MV, Soifer VA, Uspleniev GV. The phase rotor filter. *J Mod Opt* 1992; 39(5): 1147-1154. DOI: 10.1080/09500349214551151.
- [3] Davis JA, McNamara DE, Cottrell DM, Campos J. Image processing with the radial Hilbert transform: theory and experiments. *Opt Lett* 2000; 25(2): 99-101. DOI: 10.1364/OL.25.000099.
- [4] Guo C, Han Y, Xu J, Ding J. Radial Hilbert transform with Laguerre-Gaussian spatial filters. *Opt Lett* 2006; 31(10): 1394-1396. DOI: 10.1364/OL.31.001394.
- [5] Curtis JE, Grier DG. Structure of optical vortices. *Phys Rev Lett* 2003; 90(13): 133901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.90.133901.
- [6] Lin J, Yuan X, Tao SH, Burge RE. Synthesis of multiple collinear helical modes generated by a phase-only element. *J Opt Soc Am A* 2006; 23(5): 1214-1218. DOI: 10.1364/JOSAA.23.001214.
- [7] Chattrapiban N, Rogers EA, Cofield D, Hill WT, Roy R. Generation of non-diffracting Bessel beams by use of a spatial light modulator. *Opt Lett* 2003; 28(22): 2183-2185. DOI: 10.1364/OL.28.002183.
- [8] Hakola A, Shevchenko A, Buchter SC, Kaivola M, Tabiryan NV. Creation of a narrow Bessel-like laser beam using a nematic liquid crystal. *J Opt Soc Am B* 2006; 23(4): 637-641. DOI: 10.1364/JOSAB.23.000637.
- [9] Chakraborty R, Ghosh A. Generation of an elliptic Bessel beam. *Opt Lett* 2006; 31(1): 38-40. DOI: 10.1364/OL.31.000038.
- [10] Bentley JB, Davis JA, Bandres MA, Gutiérrez-Vega JC. Generation of helical Ince-Gaussian beams with a liquid-crystal display. *Opt Lett* 2006; 31(5): 649-651. DOI: 10.1364/OL.31.000649.
- [11] Fatemi FK, Bashkansky M. Generation of hollow beams by using a binary spatial light modulator. *Opt Lett* 2006; 31(7): 864-866. DOI: 10.1364/OL.31.000864.
- [12] Kotlyar VV, Almazov AA, Khonina SN, Soifer VA, Elfstrom H, Turunen J. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate. *J Opt Soc Am A* 2005; 22(5): 849-861. DOI: 10.1364/JOSAA.22.000849.
- [13] Kotlyar VV, Khonina SN, Kovalev AA, Soifer VA, Elfstrom H, Turunen J. Diffraction of a plane, finite-radius wave by a spiral phase plate. *Opt Lett* 2006; 31(11): 1597-1599. DOI: 10.1364/OL.31.001597.
- [14] Kotlyar VV, Kovalev AA, Khonina SN, Skidanov RV, Soifer VA, Elfstrom H, Tossavainen N, Turunen J. Diffraction of conic and Gaussian beams by a spiral phase plate. *Appl Opt* 2006; 45(12): 2656-2665. DOI: 10.1364/AO.45.002656.
- [15] Ahluwalia BPS, Cheong WC, Yuan X-C, Zhang L-S, Tao S-H, Bu J, Wang H. Design and fabrication of a double-axicon for generation of tailorable self-imaged three-dimensional intensity voids. *Opt Lett* 2006; 31(7): 987-989. DOI: 10.1364/OL.31.000987.
- [16] Rozas D, Law CT, Swartzlander GA. Propagation dynamics of optical vortices. *J Opt Soc Am B* 1997; 14(11): 3054-3065. DOI: 10.1364/JOSAB.14.003054.
- [17] Dennis MR. Rows of optical vortices from elliptically perturbing a high-order beam. *Opt Lett* 2006; 31(9): 1325-1327. DOI: 10.1364/OL.31.001325.
- [18] Ling D, Li J, Chen J. Analysis of eigenfields in the axicon-based Bessel-Gauss resonator by the transfer-matrix method. *J Opt Soc Am A* 2006; 23(4): 912-918. DOI: 10.1364/JOSAA.23.000912.
- [19] Cheong WC, Lee W, Yuan X-C, Zhang L-S, Dholakia K, Wang H. Direct electron-beam writing of continuous spiral phase plates in negative resist with high power efficiency for optical manipulation. *Appl Phys Lett* 2004; 85(23): 5784-5786. DOI: 10.1063/1.1830678.
- [20] Prudnikov AP, Brichkov YA, Marichev OI. Integrals and series. Volume 2: Special functions. CRC Press; 1986. ISBN: 978-2-88124-090-4.