

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА ДОО

Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, М.А. Моисеев, С.И. Харитонов  
Институт систем обработки изображений РАН,  
Самарский государственный аэрокосмический университет

### Аннотация

Представлен новый асимптотический метод решения задачи дифракции на дифракционных оптических элементах с зонной структурой. Метод включает строгое решение задачи дифракции на периодической структуре с периодом сравнимым с длиной волны и геометрико-оптический подход. Получено решение задачи дифракции на эталонной квазипериодической структуре, сочетающей в себе функции дифракционной решетки и дифракционной линзы. На основе решения эталонной задачи получена простая аппроксимация для поля непосредственно за дифракционным элементом.

### Введение

Рассмотрим дифракцию света на дифракционном оптическом элементе, обладающем зонной структурой. Свет представляет собой электромагнитные волны и поэтому строгое решение задачи дифракции должно быть основано на решении системы уравнений Максвелла с соответствующими граничными условиями. Однако на практике хорошо известно, что решение уравнений Максвелла в коротковолновой области весьма трудоемкая задача даже для современных компьютеров. Для оценки поведения решения системы уравнений Максвелла в коротковолновой области широко используются асимптотические методы. Наиболее известным асимптотическим методом является приближение геометрической оптики [1]. Приближение геометрической оптики хорошо работает в случае, когда свойства среды слабо меняются на расстояниях сравнимых с длиной волны освещающего пучка. Методы решения задач дифракции на периодических структурах, основанные на точном решении уравнений Максвелла, давно известны и рассмотрены в работе [2]. Если структура не является периодической, тогда в этом случае для решения задач дифракции используются конечно-разностные методы [3] или методы, основанные на решении соответствующих интегральных уравнений [4]. В данной работе рассматривается асимптотический подход к решению широкого класса задач дифракции. Подход основан на синтезе геометрико-оптического метода и решения задач дифракции на периодических структурах. Полученные формулы имеют прозрачный физический смысл. Для упрощения задачи на данном этапе будем рассматривать двумерную систему. Это позволит нам найти закономерности и разработать методы решения, которые впоследствии можно будет распространить на случай трех измерений для системы уравнений Максвелла.

### 1. Решение модельной задачи дифракции на квазипериодической структуре

Асимптотические методы в физике ассоциируются в основном с квазиклассическим приближением в квантовой механике, геометрической оптикой и вычислением интеграла Кирхгофа-Гюйенса [5] или Кирхгофа-Котлера [6] методом стационарной фазы

или методом перевала. С точки зрения физики геометрическая оптика основана на замене решения исходной задачи на решение задачи дифракции плоской волны на плоской границе раздела. Метод перевала и метод стационарной фазы [7] основаны на замене вычисляемого интеграла эталонным интегралом. Для того чтобы разработать асимптотические методы для решения задач дифракции на дифракционных оптических элементах, обладающих зонной структурой, необходимо найти и решить модельную задачу. В данной работе предложено построить целый класс асимптотических методов, основанных на решении задачи дифракции на структуре, отличной от дифракционной решетки (в пределе совпадающей с дифракционной решеткой). Модельный ДОО должен сочетать в себе функции расщепителя пучка (дифракционной решетки) и при этом обладать фокусирующими свойствами. В качестве модельного ДОО можно выбрать ДОО, расположенный перпендикулярно оси  $z$  в области  $0 < z < a$ , с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(x) = \sum_m \varepsilon_m \exp(ikmg(x)), \quad (1)$$

$$g(x) = g(x_0) + \alpha(x - x_0) + \frac{1}{2}\beta(x - x_0)^2, \quad (2)$$

где  $k$  – волновое число,  $g(x)$  – функция, описывающая зонную структуру,  $x_0$  – точка, в окрестности которой находится поле.

Для решения задачи дифракции необходимо найти поле в трех областях пространства:

- в области вне дифракционного оптического элемента со стороны источника волн;
- в области вне дифракционного оптического элемента со стороны, не содержащей источника волн;
- в области внутри дифракционного оптического элемента.

Распространение света в скалярном приближении во всех трех областях пространства описывается уравнением Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 E(x, z)}{\partial z^2} = HE(x, z), \quad (3)$$

где  $E(x, z)$  – электрическое поле, а оператор  $H$  в координатном представлении имеет вид:

$$H = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \varepsilon(x). \quad (4)$$

Представим решение уравнения и функцию диэлектрической проницаемости в виде

$$\varepsilon(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\omega, z) \exp(ik\omega(x - x_0)) d\omega, \quad (5)$$

$$E(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega, z) \exp(ik\omega(x - x_0)) d\omega, \quad (6)$$

где  $\omega$  – пространственная частота.

В этом случае решение уравнения Гельмгольца сводится к решению интегродифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 E(\omega, z)}{\partial z^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (-k^2 \varepsilon(\omega - \eta) + k^2 \alpha^2 \delta(\omega - \eta)) \times \\ \times E(\eta, z) d\eta, \quad (7)$$

$$\varepsilon(\omega) = \sum_m \sqrt{\frac{ik}{2\pi m\beta}} \varepsilon_m \exp(ikmg(x_0)) \times \\ \times \exp\left(-ik \frac{(\omega - m\alpha)^2}{2m\beta}\right). \quad (8)$$

Подставим выражение (8) в уравнение (7)

$$\frac{\partial^2 E(\omega, z)}{\partial z^2} = k^2 \omega^2 E(\omega, z) - \\ -k^2 \sum_m \sqrt{\frac{k}{2\pi m\beta}} \varepsilon_m \exp(ikmg(x_0)) \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-ik \frac{(\omega - \eta - m\alpha)^2}{2m\beta}\right) E(\eta, z) d\eta. \quad (9)$$

Для решения интегродифференциального уравнения представим теперь волновое поле в окрестности точки  $x_0$  в виде

$$E(\omega, z) = \sum_s E^s(x_0, z) |F_s(\omega)\rangle, \quad (10)$$

где

$$|F_s(\omega)\rangle = \sqrt{\frac{ik}{2\pi s\beta}} \exp(iks g(x_0)) \times \\ \times \exp\left(-ik \frac{(\omega - s\alpha)^2}{2s\beta}\right). \quad (11)$$

Подставив выражение (10) в интегро-дифференциальное уравнение, получим

$$\sum_n \frac{d^2 E^n(z)}{dz^2} |F_n(\omega)\rangle = k^2 \omega^2 \sum_n E^n(z) |F_n(\omega)\rangle -$$

$$-k^2 \sum_{ns} \varepsilon_{n-s} E^s(x_0, z) |F_n(\omega)\rangle. \quad (12)$$

Выберем некоторый набор ортогональных функций  $G_m(\omega)$  и умножим уравнение (12) на каждый элемент этого множества

$$\sum A_n^m \frac{d^2 E^n(x_0, z)}{dz^2} = k^2 \sum_n B_n^m E^n(x_0, z) - \\ -k^2 \sum_{ns} A_n^m \varepsilon_{n-s} E^s(x_0, z), \quad (13)$$

где

$$A_n^m = \langle G_m(\omega) | F_n(\omega) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} G_m^*(\omega) F_n(\omega) d\omega, \quad (14)$$

$$B_{mn} = \langle G_m(\omega) | \omega^2 F_n(\omega) \rangle = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 G_m^*(\omega) F_n(\omega) d\omega. \quad (15)$$

В качестве примера получим асимптотики для этих матриц с помощью метода стационарной фазы

$$A_n^m = i \exp(iksg(x_0)) G_m(n\alpha), \quad (16)$$

$$B_{mn} = i \exp(iksg(x_0)) (G_m(n\alpha)(n\alpha)^2 + e), \quad (17)$$

где

$$e = \sqrt{\frac{ik}{2\pi n\beta}} (\omega^2 G_m^*(\omega))'_{\omega=n\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \exp\left(\frac{-ik\omega^2}{2n\beta}\right) d\omega + \\ + \frac{1}{2} (\omega_n^2 G_m^*(\omega))''_{\omega=n\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \exp\left(\frac{-ik\omega^2}{2s\beta}\right) d\omega. \quad (18)$$

При  $k \rightarrow \infty$ ,  $e \rightarrow 0$  система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\frac{d^2 E^n(x_0, z)}{dz^2} = k^2 (n\alpha)^2 E^n(x_0, z) - \\ -k^2 \sum_{ns} \varepsilon_{n-s} E^s(x_0, z). \quad (19)$$

Это в свою очередь совпадает с системой уравнений, полученной для периодической дифракционной решетки. Это выражение объясняет тот факт, что дифракцию на ДОО можно заменить дифракцией на локальной дифракционной решетке. В общем случае система уравнений выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2 E^n(x_0, z)}{dz^2} = -k^2 L_s^n E^s(x_0, z), \quad (20)$$

где  $L_s^n = \varepsilon_{n-s} - (A^{-1}B)_s^n$ .

Решение системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$E^n(x_0, z) = \\ = \sum (a^m \exp(ik\lambda_m z) + b^m \exp(-ik\lambda_m z)) E_m^n, \quad (21)$$

где  $\lambda_m$  – собственные числа оператора  $L$ .

Подставляя это выражение, получим представление общего решения в виде

$$E^{(2)}(\omega, z) = \sum_{sm} \sqrt{\frac{ik}{2\pi s\beta}} \times \\ \times \sum (a^m \exp(ik\lambda_m z) + b^m \exp(-ik\lambda_m z)) \times \\ \times E_m^s \exp(iksg(x_0)) \exp\left(-ik \frac{(\omega - s\alpha)^2}{2s\beta}\right). \quad (22)$$

Решение в области перед дифракционным оптическим элементом имеет вид

$$E^{(1)}(\omega, z) = \sum_s \sqrt{\frac{ik}{2\pi s\beta}} \times \\ \times \left( I^s \exp(ik\sqrt{1-\omega^2}z) + R^s \exp(-ik\sqrt{1-\omega^2}z) \right) \times \\ \times I^s \exp(iksg(x_0)) \exp\left(-ik \frac{(\omega - s\alpha)^2}{2s\beta}\right). \quad (23)$$

Решение в области за дифракционным оптическим элементом имеет вид

$$E^{(3)}(\omega, z) = \sum_s \sqrt{\frac{ik}{2\pi s\beta}} T^s \exp(ik\sqrt{1-\omega^2}z) \times \\ \times \exp(iksg(x_0)) \exp\left(-ik \frac{(\omega - s\alpha)^2}{2s\beta}\right). \quad (24)$$

Коэффициенты  $T^s$  и  $R^s$  находятся из условия сшивки на обеих границах области 2 [8].

## 2. Асимптотические методы для решения задач дифракции на ДОО

В данном пункте рассмотрим применение вышеизложенных методов для расчета поля в случае дифракции волны на дифракционных оптических элементах, которые обладают зонной структурой. В предыдущем пункте мы рассматривали дифракцию на модельном ДОО. Рассмотрим теперь диэлектрический слой с диэлектрической проницаемостью, которая описывается выражением (1), где  $g(x)$  – произвольная функция. Случай, когда функция  $g(x)$  является линейной, соответствует чисто периодической структуре (дифракционной решетке). Если функция  $g(x)$  не является линейной, получаем дифракционную структуру с изменяющимся периодом.

Для того, что бы воспользоваться результатами предыдущего пункта сделаем предположение о том что поле в данной точке зависит от распределения диэлектрической проницаемости в окрестности данной точки. Это предположение основано все на том же принципе локализации, который был рассмотрен

выше. Далее разложим функцию  $g(x)$  в окрестности точки  $x_0$  в ряд Тейлора с точностью до членов второго порядка

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} g''(x - x_0)^2 \quad (25)$$

и решим задачу дифракции в окрестности точки  $x_0$ . Рассмотрим только поле, прошедшее через дифракционный оптический элемент (случай поля, отраженного от оптического элемента рассматривается аналогичным образом). В пространственно-частотном представлении поле на выходе имеет вид

$$E^{(3)}(\omega) = \sum_s \sqrt{\frac{ik}{2\pi s\beta}} T^s(x_0) \times \\ \times \exp(iksg(x_0)) \exp\left(-ik \frac{(\omega - s\alpha)^2}{2s\beta}\right), \quad (26)$$

где  $\alpha = g'(x_0)$ ,  $\beta = g''(x_0)$ .

Обратимся теперь к координатному представлению. Координатное представление поля связано с пространственно-частотным представлением обычным образом с помощью преобразования Фурье

$$E^{(3)}(x, x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega) \exp(ik\omega(x - x_0)) d\omega. \quad (27)$$

Подставляем и получаем следующий вид для поля в окрестности в координатном представлении

$$E^{(3)}(x, x_0) = \sum_s T^s(x_0) \times \\ \times \exp\left(iks \left( g(x_0) + \alpha(x - x_0) + \frac{1}{2} \beta(x - x_0)^2 \right) \right). \quad (28)$$

Заменяя обратно разложение в ряд Тейлора на исходную функцию, получаем, что поле в окрестности точки  $x_0$

$$E^{(3)}(x, x_0) = \sum_s T^s(x_0) \exp(iksg(x)). \quad (29)$$

Полученное выражение по форме совпадает с выражением для поля на выходе дифракционного оптического элемента, полученного в рамках метода предсказания, рассмотренного в работе [9]. Оно также объясняет возможность использования приближения тонкого оптического элемента. Сравнивая два этих выражения, мы видим, что функция  $g(x)$  имеет смысл функции эйконала для геометрооптического фокусатора. Отличие состоит в том, что коэффициент  $T^s(x_0)$  имеет другой физический смысл. Напомним, что в методе предсказания  $T^s(x_0)$  совпадал с коэффициентом разложения в ряд Фурье функции предсказания. В нашем случае он определяется согласно методу, изложенному в предыдущем пункте настоящей работы.

### **Заключение**

В данной работе разработан асимптотический метод решения задач дифракции на ДОЭ, который сочетает в себе решение задачи дифракции на периодической структуре с периодом сравнимым с длиной волны и геометрикооптический подход. Решена задача дифракции на эталонной квазипериодической структуре, сочетающей в себе функции расщепителя пучка и дифракционной линзы. На основе решения эталонной задачи получено простое выражение для поля в плоскости непосредственно прилегающей к ДОЭ. Полученное выражение позволяет оценить распределение поля на выходе ДОЭ, не прибегая к сложным вычислительным методам.

### **Благодарности**

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 04-01-96517, гранта CRDF RUE1-005064-SA-05, а также при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (“BRHE”) и гранта INTAS 04-77-7198.

### **Литература**

1. Кравцов В.В., Орлов А.А. Геометрическая оптика неоднородных сред // М.: Наука, 1979.
2. Moharam M.G., Gaylord T.K. Rigorous coupled-wave analysis of metallic surface-relief gratings // JOSA A. 1986. Vol. 3. Issue 11. P. 1780.
3. Taflove A., Hagness S. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. – Artech House Publishers, Boston, 2nd ed., 2000. P. 852.
4. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. // М.: Высшая школа, 1991.
5. Борн М., Вольф Э. Основы Оптики // Pergamon Press, 1986.
6. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн // М.: Наука, 1976.
7. Федорюк М.В. Асимптотики, интегралы и ряды // М.: Наука, 1987.
8. Electromagnetic Theory on Gratings / Ed. by R.Petit. Springer-Verlag, 1980.
9. Golub M.A., Doskilovich L.L., Kazansky N.L., Soifer V.A., Kharitonov S.I. Computer Generated Diffractive Multi-focal Lens // Journal of modern optics 1992. Vol. 39(6). P. 1245.

# Asymptotic methods for solving the problems of diffraction on DOE

L.L. Doskolovich<sup>1,2</sup>, N.L. Kazanskiy<sup>1,2</sup>, M.A. Moiseev<sup>1,2</sup>, S.I. Kharitonov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Image Processing Systems Institute of the RAS,

<sup>2</sup>Samara State Aerospace University (SSAU)

## Abstract

The study presents a new asymptotic method for solving the problem of diffraction on diffractive optical elements with band structure. The method includes a rigorous solution of the diffraction task on a periodic structure with a period comparable to the wavelength, and a geometrical optical approach. The solution of the diffraction task was developed on a reference quasi-periodic structure combining the functions of a diffraction grating and a diffraction lens. Based on the solution of the reference task, a simple approximation is developed for the field immediately behind the diffraction element.

**Keywords:** field near the microrelief, Helmholtz equation, integro-differential equation, reference structure of DOE, generalization of the reference solution, geometrical optical approach.

**Citation:** Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Moiseev MA, Kharitonov SI. Asymptotic methods for solving the problems of diffraction on DOE. *Computer Optics* 2006; 30: 49-52.

**Acknowledgements:** This work was supported by the RFBR grant 04-01-96517, the grant CRDF RUE1-005064-SA-05, as well as the support of the Russian-American program "Basic Research and Higher Education" ("BRHE") and the grant INTAS 04-77-7198 .

## References

- [1] Kravtsov YuA, Orlov YuI. Geometrical optics of inhomogeneous media. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 1990. ISBN: 978-3-642-84033-3.
- [2] Moharam MG, Gaylord TK. Rigorous coupled-wave analysis of metallic surface-relief gratings. *J Opt Soc Am A* 1986; 3(11): 1780-1787. DOI: 10.1364/JOSAA.3.001780.
- [3] Taflove A, Hagness S. Computational electrodynamics: The finite-difference time-domain method. 2<sup>nd</sup> ed. Boston: Artech House Publishers; 2000. ISBN: 978-1-58053-076-7.
- [4] Ilinski AS, Kravtsov VV, Sveshnikov AG. Mathematical modelling in electrodynamics [In Russian]. Moscow: "Vyschaya Shkola" Publisher; 1991.
- [5] Born M, Wolf E. Principles of optics: Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. 6<sup>th</sup>ed. New York: Pergamon Press, 1980. ISBN: 978-0-08-026482-0.
- [6] Vinogradova MB, Rudenko OV, Sukhorukov AP. The theory of waves. Moscow: "Nauka" Publisher; 1990.
- [7] Fedoruk MV. Asymptotics, integrals and series [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher; 1987.
- [8] Petit R, ed. Electromagnetic theory on gratings. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1980. ISBN: 978-3-642-81502-7.
- [9] Golub MA, Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Soifer VA, Kharitonov SI. Computer generated diffractive multi-focal lens. *J Mod Opt* 1992; 39(6): 1245-1251. DOI: 10.1080/713823549.