

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ШАРИКОВ В СВЕТОВЫХ ПУЧКАХ С УГЛОВЫМИ ГАРМОНИКАМИ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

Р.В. Скиданов^{1,2}, С.Н. Хонина^{1,2}, В.В. Котляр^{1,2}, В.А. Соيفер^{1,2}

¹*Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия,*

²*Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П. Королева, Самара, Россия*

Аннотация

Экспериментально определена средняя линейная скорость вращения в воде полистироловых микрошариков диаметром 5 мкм в вихревых лазерных пучках. Показано, что при увеличении орбитального углового момента (ОУМ) пучка в 10 раз (с 3 до 30), радиус кольца вихревого пучка увеличивается в три раза, а скорость движения микрочастиц увеличивается только в два раза. Аналогичные эксперименты проведены также для пучков Бесселя разных порядков.

Введение

Развитие микромеханической техники, а также гибридных систем сочетающих в себе элементы микроэлектроники и микромеханики, делает актуальной задачу передачи момента вращения в микромеханические системы с характерными размерами в десятки микрометров. Существующие в настоящее время электродвигатели больше чем на порядок по размерам превышают необходимые, что делает микромеханическую систему на их основе слишком большой и тяжелой [1].

Для вращения микрообъектов в световых полях используется два основных подхода.

Во-первых, за счет спинового углового момента, который существует у полей с круговой поляризацией (при этом вращаются только двулучепреломляющие частицы, например, частицы из исландского шпата).

Во-вторых, за счет орбитального углового момента, возникающего из-за спиральной особенности фазы, например, пучки Гаусса-Лагерра и Бесселя высших порядков (передача орбитального углового момента происходит за счет частичного поглощения света в частице). Также можно использовать световые пучки, не являющиеся модами, но обладающие ненулевым орбитальным угловым моментом эти пучки называют оптическими вихрями. Оптические вихри обычно формируются с помощью спиральной фазовой пластинки (СФП) [2]. В [3] предложен интерферометрический способ формирования оптических вихрей с помощью призмы Воластона.

Несколько работ посвящены формированию оптических вихрей с помощью пространственных модуляторов света (ПМС) [4-8]. В [4] с помощью ПМС формировали оптические вихри для управления движением нейтральных атомов. С помощью ПМС показана возможность сжатия периферийных колец (боковых лепестков) в дифракционной картине оптического вихря [5]. В [6] ПМС использовался для формирования линейной комбинации сосных оптических вихрей. С помощью ПМС можно сформировать интерференционную картину, которая визуализирует фазу оптического поля с винтовой дислокацией [6]. Применение ПМС позволяет сформировать лазерные пучки Айнса-Гаусса [8]. В

[9] с помощью ПМС были сформированы новые лазерные моды – гипергеометрические, которые также обладают ОУМ.

В этой работе описано экспериментальное исследование влияния номера порядка оптического вихря на скорость движения микрочастиц. Описано формирование четырех порядкового вихревого пучка с распределением интенсивности в виде набора колец большого радиуса (ОУМ пропорционален номерам угловых гармоник $\pm 30, \pm 31$). При этом ДОЭ для формирования такого пучка создавался электронной литографией. А с помощью жидкокристаллического ПМС формировался ДОЭ для получения вихревого пучка с орбитальным угловым моментом 31-го порядка.

2. Вращение микрочастиц в световых пучках с орбитальным угловым моментом

В вышеперечисленных работах, как правило, основное внимание уделялось именно формированию оптического вихря безотносительно эффективности этого пучка в задачах микроманипуляции. В то же время, очевидно, что если рассматривать именно задачу эффективной передачи момента вращения микромеханическим системам необходимо исследовать как с изменением номера порядка оптического вихря будет изменяться доля энергии переданная от светового пучка к микрообъекту. На качественном уровне определено, что при увеличении номера порядка оптического вихря скорость движения микрочастиц увеличивается [10,11]. Но количественная оценка этой зависимости не была проведена. Для выполнения такого исследования дополнительно был проведен эксперимент по вращению полистироловых микрошариков в световых пучках с угловыми гармониками 30-го и 31-го порядков. Схема экспериментальной установки для микроманипулирования представлена на рис. 1.

В эксперименте был использован твердотельный лазер с длиной волны 532 нм и мощностью 500 мВт. В целях минимизации потерь мощности при отражениях на преломляющих поверхностях пучок не коллимируется, а нужный размер достигается увеличением расстояния между лазером и первым поворотным зеркалом. Поворотное зеркало М1

направляет световой пучок на ДОЭ, затем микрообъектив L_1 фокусирует пучок в рабочую область внутри кюветы V с микрочастицами, микрообъектив L_2 формирует изображение рабочей области, а зеркало M_2 поворачивает световой пучок в направлении горизонтально расположенной телекамеры. Лампа I и линза L_3 формируют фоновое освещение. В качестве микрочастиц использовались полистироловые микрошарики с диаметром 5 мкм.

Для формирования набора из 4-х оптических вихрей (с номерами порядков -31, -30, 30, 31) использовался ДОЭ, бинарная фаза которого представлена на рис. 2а. На рис. 2б представлена центральная часть микрорельефа. Бинарная фаза другого ДОЭ, который также формирует четыре оптических вихря, но с меньшими номерами порядков (± 3 , ± 7), показана на рис. 2г. Центральная часть рельефа этого ДОЭ представлена на рис. 2д. На рис. 2в и 2е показаны распределения интенсивности для каждого из элементов в зоне дифракции Фраунгофера.

В схему был установлен элемент, фаза которого представлена на рис. 2а. В оптическом вихре 30-го порядка было захвачено в итоге 14 микрочастиц.

Различные стадии движения этих микрочастиц через интервал в семь секунд представлены на рис. 3(а-г).

Точно такой же эксперимент был проведен для оптического вихря 31-го порядка, стадии движения представлены на рис. 3(д-з).

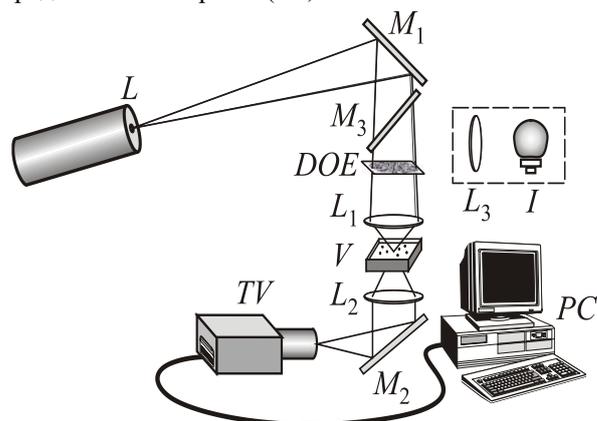


Рис. 1. Схема экспериментальной установки для манипуляции микрообъектами. L – твердотельный лазер, M_1 – поворотное зеркало, M_3 – полупрозрачное зеркало для освещения рабочей области, M_2 – второе поворотное зеркало, L_1 – фокусирующий микрообъектив(40 \times), L_2 – микрообъектив строящий изображение рабочей области(20 \times), L_3 – линза осветителя, I – лампа осветителя, V – кювета с микрочастицами, TV – видеокамера, PC – компьютер

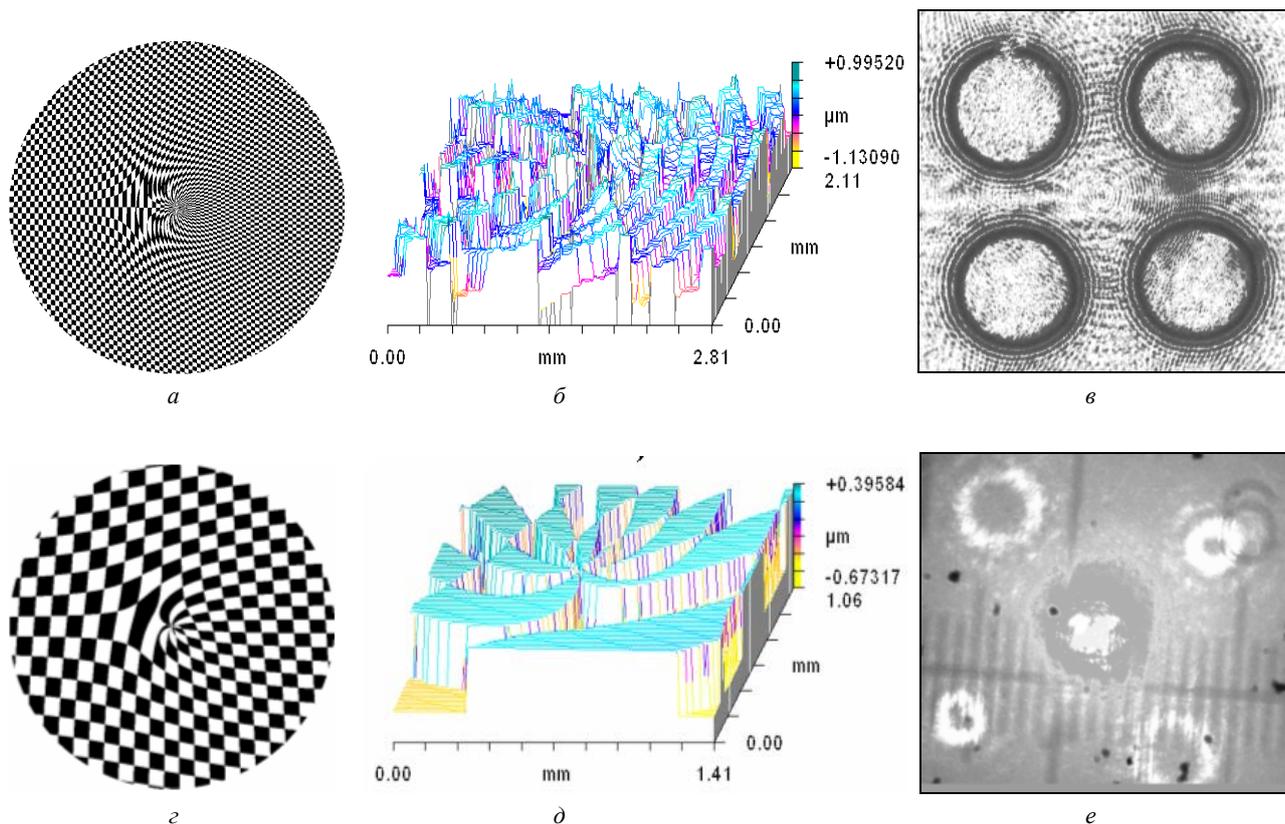


Рис. 2. Фаза ДОЭ для формирования оптических вихрей -31, -30, 30, 31 порядков (а), фаза ДОЭ для формирования оптических вихрей -7, -3, 3, 7 порядков (г), центральные части микрорельефа этих элементов (б, д), распределения интенсивности в картинах дифракции (в, е)

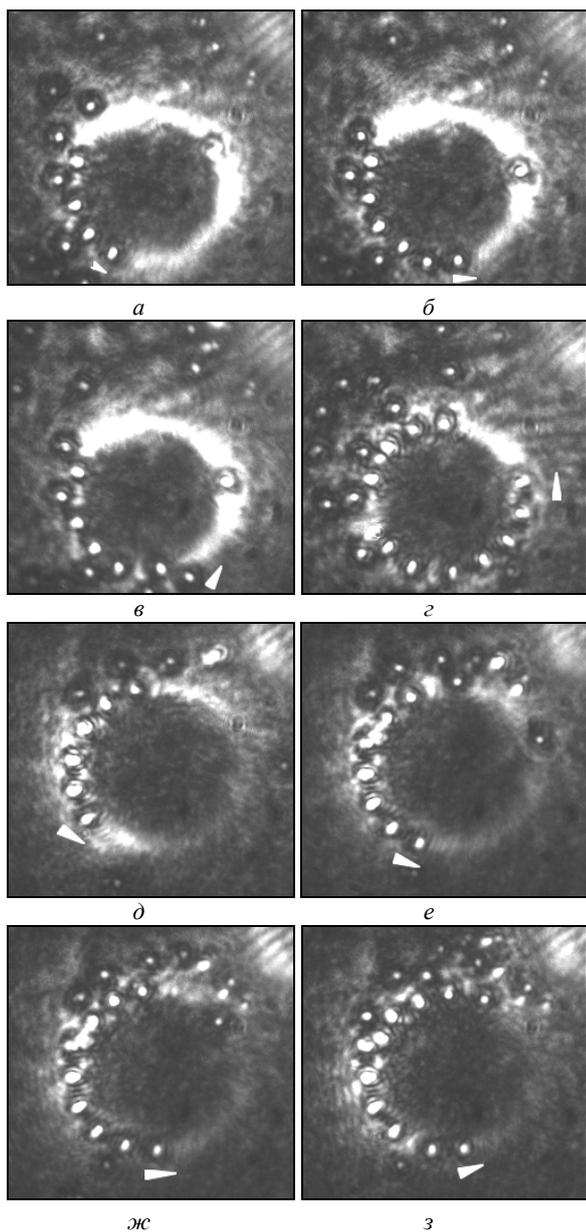


Рис. 3. Различные стадии движения микрочастиц в вихревых пучках, сформированных ДОЭ: оптический вихрь 30-го порядка (рис. 2а)(а-з), оптический вихрь 31-го порядка (рис. 2а)(д-з)

Для сравнения движения микрочастиц в различных световых пучках наиболее удобно использовать среднюю скорость движения. Для определения средней скорости было разработано специальное программное обеспечение позволяющее обрабатывать и выделять микрочастицы на последовательности изображений. На рис. 4 представлены обработанные картинки, на которых хорошо видны именно микрочастицы, и почти не видно пучка.

Для автоматического определения скорости вычислялась функция корреляции с одним из изображений частиц. После этого координаты частицы определялись по координатам максимума корреляционного пика. Средняя скорость определялась как по времени, так и по ансамблю микрочастиц. На

первом этапе определялась средняя линейная скорость каждой частицы в отдельности $\langle v_i \rangle$ по формуле:

$$\langle v_i \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t |\vec{v}_i(t)| dt \quad (1)$$

где t – время наблюдения, $\vec{v}_i(t)$ – скорость движения микрочастицы в зависимости от времени. Затем определялась средняя скорость V по ансамблю микрочастиц:

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle v_i \rangle \quad (2)$$

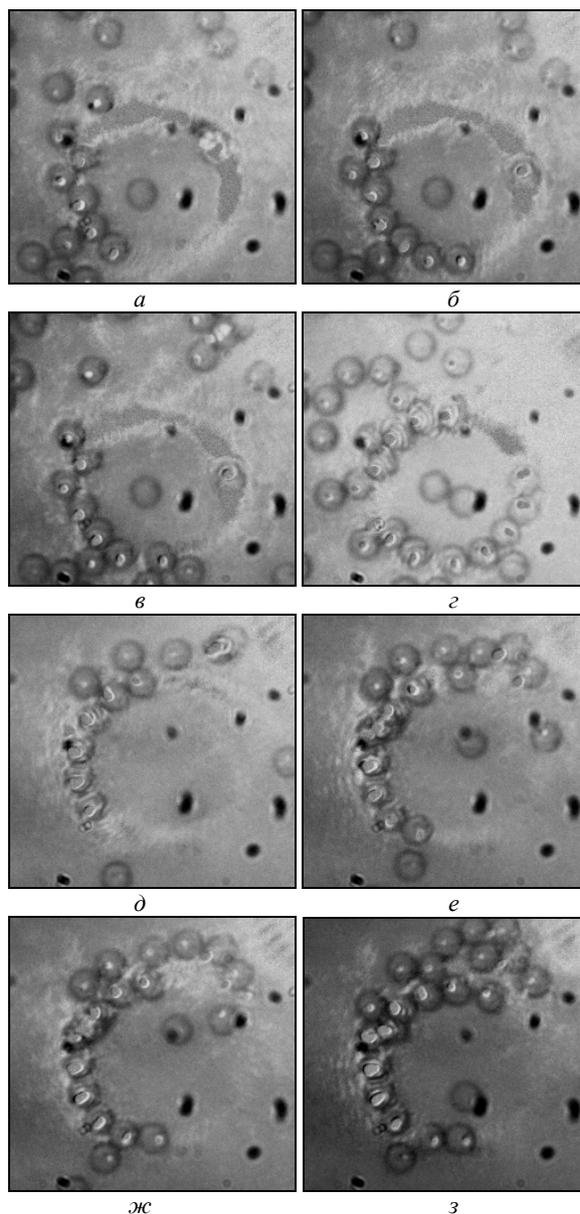


Рис. 4. Различные стадии движения микрочастиц в вихревых пучках, сформированных ДОЭ: (рис. 2а)(а-з) оптический вихрь 30-го порядка, (рис. 2а)(д-з) оптический вихрь 31-го порядка, после компьютерной обработки изображений

В данном эксперименте для определения средней скорости было использовано четырнадцать и одиннадцать микрочастиц (для 30-го и 31-го порядков соответственно) за время 19 с. Было обработано 76 изображений с последовательными стадиями движения для оптического вихря 30-го порядка. Средняя скорость составила $1,7 \pm 0,3$ мкм/с. Для оптического вихря 31-го порядка было обработано 175 изображений, т.е. общее время эксперимента составило 44 с. Средняя скорость составила $1,4 \pm 0,2$ мкм/с.

Аналогичным образом были обработаны результаты экспериментов [10,11]. На рис. 5 представлены обработанные для определения средней скорости изображения различных стадий движения ча-

стиц в оптических вихрях 3-го и 7-го порядков. В этом эксперименте для определения средней скорости было использовано восемь микрочастиц (для оптического вихря 3-го порядка) в течении 12 с., всего было обработано 48 изображений с последовательными стадиями движения. Средняя скорость составила $0,8 \pm 0,4$ мкм/с. Для определения средней скорости частиц в оптическом вихре 7-го порядка были использованы результаты нескольких экспериментов (не только с рис. 5). В совокупности было использовано 16 микрочастиц и обработано 203 изображения (общее время четырех экспериментов 51 с.). Средняя скорость составила $1,5 \pm 0,2$ мкм/с. На основании этих данных была составлена таблица 1.

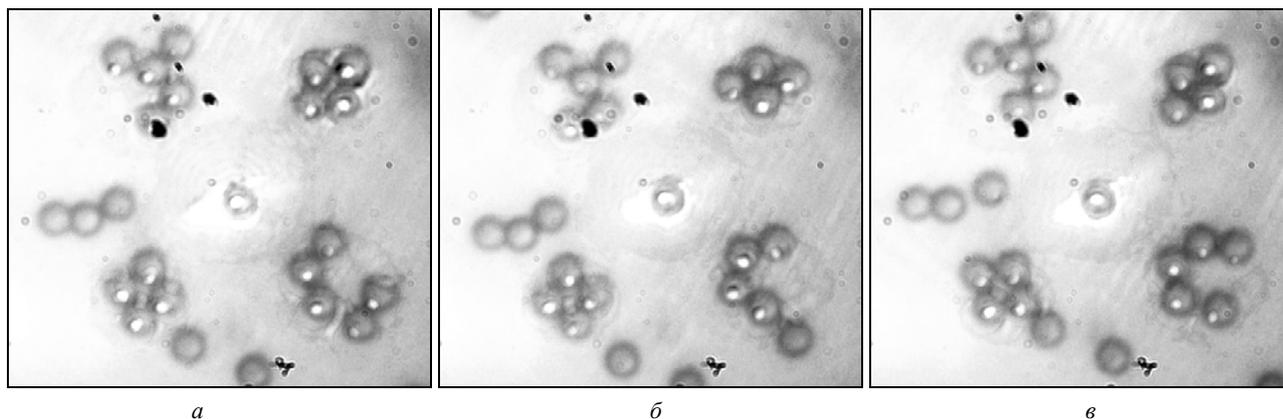


Рис. 5. Различные стадии движения микрочастиц в вихревых пучках, сформированных бинарным ДОЭ, фаза которого представлена на рис. 2г

Таблица 1. Сравнительные параметры экспериментов

Порядок оптического вихря	Мощность пучка в рабочей плоскости(мВт) (с учетом потерь)	Средняя интенсивность на самом ярком кольце $(Вт/м^2) \times 10^8$	Диаметр кольца (мкм)	Средняя скорость движения микро-частиц (мкм/с)
3	50	3,2	9	$0,8 \pm 0,4$
7	50	2,1	13	$1,5 \pm 0,2$
30	40	0,9	27	$1,7 \pm 0,3$
31	40	0,9	28	$1,4 \pm 0,2$

Как видно из таблицы 1, при увеличении номера порядка скорость движения микрочастиц в начале возрастает почти в два раза; при дальнейшем росте номера порядка скорость почти не изменяется (правда при этом сильно уменьшается интенсивность). Если считать что сила вязкого трения пропорциональна скорости микрочастиц, то при одинаковой энергии пучков сила, направленная вдоль кольца, в оптическом вихре должна возрастать с номером порядка. Надо, правда заметить, что при этом сложно учесть силу трения частиц о дно кюветы, которая возрастает с увеличением мощности пучка (из-за давления света в результате френелевского отражения от микро-частиц). Кроме того, как видно из рис. 3 и рис. 4, движение микрочастиц весьма неравномерно (есть кратковременные остановки), что указывает на неодно-

родности на дне кюветы. Также чрезвычайно тяжело точно определить мощность конкретного пучка, т.к. имеющиеся приборы позволяют определять интегральную мощность пучка (т.е. все четыре кольца одновременно вместе с нулевым порядком). Эту мощность затем приходится делить пропорционально яркости каждого изображения.

3. Микроманипуляция с использованием оптических вихрей сформированных динамическим модулятором света

При проведении экспериментов использовался бинарный жидко-кристаллический микродисплей CRL Opto SXGA H1 с разрешением 1280×1024 . В [5-7] пространственные модуляторы света формировали оптические вихри с относительно небольшим номе-

ром, поэтому в экспериментах использовали лазеры с мощностью более 1 Вт. Т.к. в нашем распоряжении лазер с мощностью всего 500 мВт решено было сформировать оптический вихрь высокого порядка. На рис. 6а показана бинарная фаза, предназначенная для формирования оптического вихря 31-го порядка. На рис. 6б результат дифракции, полученный в вычислительном эксперименте.

В оптической схеме на рис. 1 поворотное зеркало M_1 заменялось на пространственный модулятор, в целом схема оставалась неизменной. К сожа-

лению, измерение мощности пучка после фокусировки показало мощность в 18 мВт, что почти в три раза меньше, чем в эксперименте с обычным ДОЭ. Столь малая мощность сказалась на результате эксперимента. На рис. 7 показаны различные стадии движения через интервал в 20 с. Как видно из рис. 7, движение вдоль светового кольца почти не наблюдается, и хотя измеряющая скорость программа зафиксировала движение части микрочастиц со средней скоростью около 0,2 мкм/с, это скорее случайное движение.

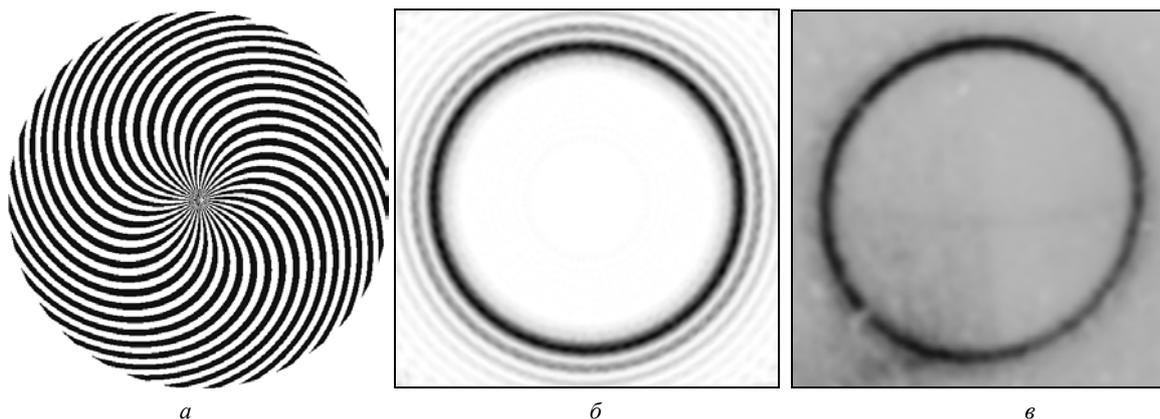


Рис. 6. Фаза ДОЭ формирующего оптический вихрь 31-го порядка (а), интенсивность в плоскости дифракции Френеля: теория (б), эксперимент (в)

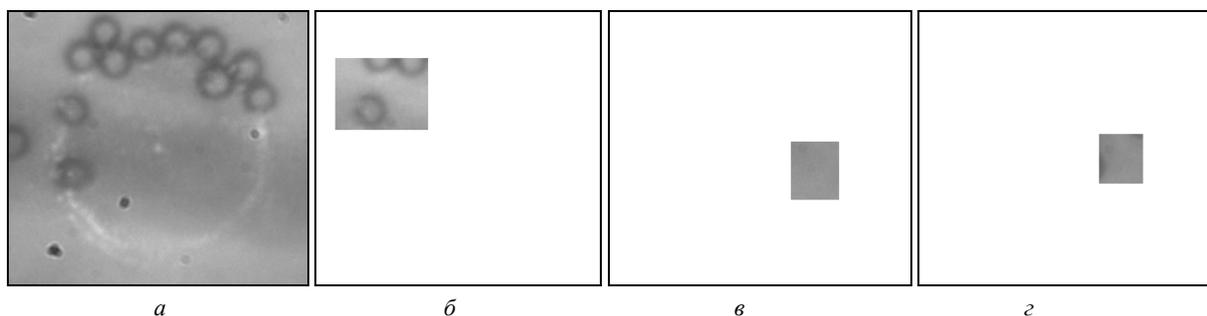


Рис. 7. Различные стадии захвата полистироловых микросфер в световом пучке с угловой гармоникой 31-го порядка

4. Дифракционные оптические элементы для формирования БП

Аналогичный эксперимент был проведен для пучков Бесселя (БП). Для формирования пучка Бесселя пятого порядка использовался ДОЭ [12], фаза которого представлена на рис.8 а, а функция пропускания имеет вид:

$$E_1(r, \varphi) = \text{sgn}(J_n(ar)) \exp(in\varphi), \quad (3)$$

где (r, φ) – полярные координаты в плоскости ДОЭ, $J_n(ar)$ – функция Бесселя n -го порядка ($n=5$), $\text{sgn}(x)$ – знаковая функция. Для формирования пучка Бесселя десятого порядка использовался бинарный спиральный аксикон, фаза которого представлена на рис. 8в, а функция пропускания имеет вид:

$$E_2(r, \varphi) = \text{sgn}\{\exp(in\varphi + iar + iyr \cos \varphi)\}, \quad (4)$$

где y – несущая пространственная частота, a – параметр аксикона, $n=10$ – порядок спирального аксикона.

На рис. 8б и 8г соответственно представлены центральные части микрорельефов поверхности элементов (3) и (4), изготовленных по технологии электронной литографии.

5. Вращение полистироловых микрошариков с помощью БП

Для минимизации влияния силы трения о дно кюветы БП позиционировались в одно и то же место с погрешностью не более 2 мкм. Это позволяет надеяться, что характер трения одно кюветы не менялся при смене пучков. Первоначально в схему был установлен ДОЭ, фаза которого представлена на рис. 8а. Он сформировал БП пятого порядка, в

самое яркое кольцо которого было захвачено в итоге 7 микрочастиц. Различные стадии движения этих микрочастиц через интервал в семь секунд в ПБ пятого порядка представлены на рис. 9.

Для сравнения движения микрочастиц в различных световых пучках наиболее удобно использовать среднюю скорость движения. Для опреде-

ления средней скорости было разработано специальное программное обеспечение, позволяющее обрабатывать и выделять микрочастицы на последовательности изображений. На рис. 10 представлены обработанные картинки, на которых хорошо видны именно микрочастицы, и почти полностью «убран» пучок.

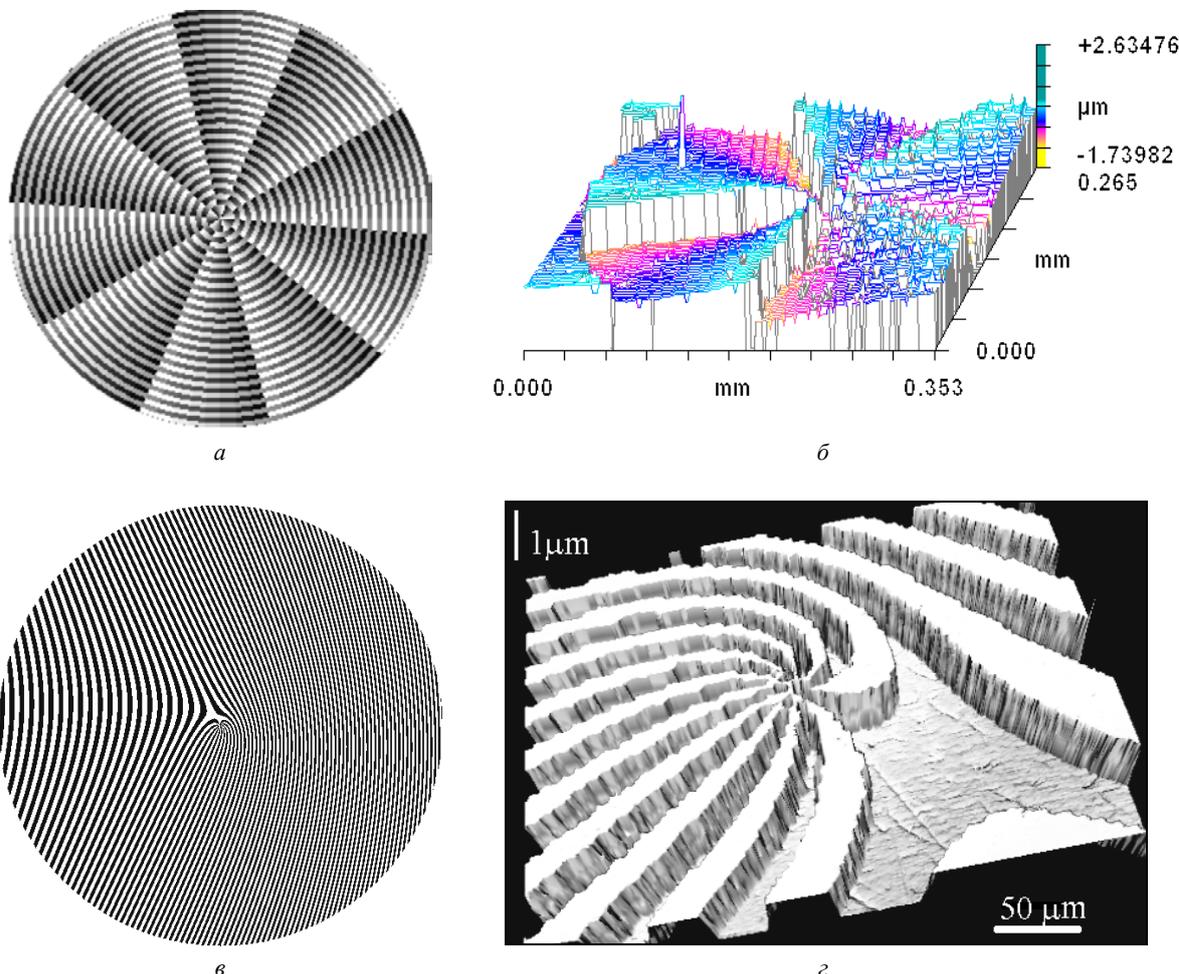


Рис. 8. Фаза аксикона для формирования ПБ пятого порядка (а), фаза бинарного аксикона для формирования пучка Бесселя десятого порядка использовался (в), центральные части микрорельефов поверхности этих элементов (б, д)

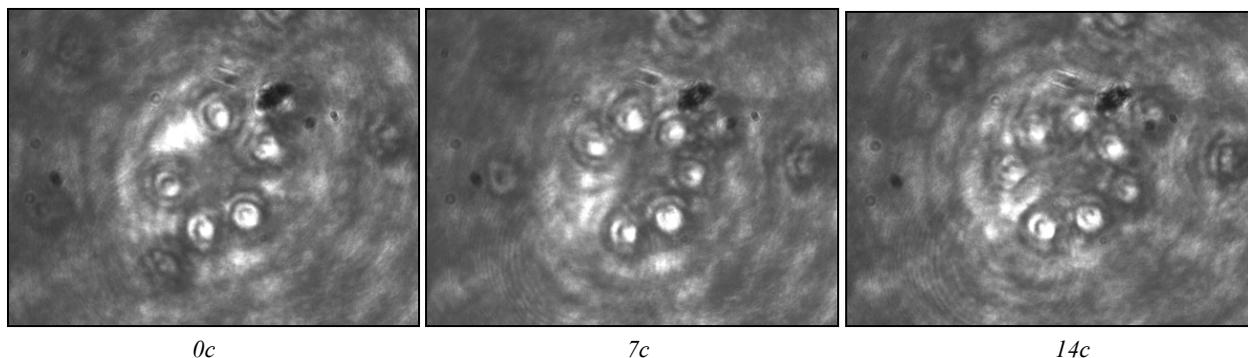


Рис. 9. Различные стадии движения полистироловых шариков в световом кольце пучка Бесселя, сформированном ДОЭ (спиральным аксиконом 5-го порядка) (рис. 2а)

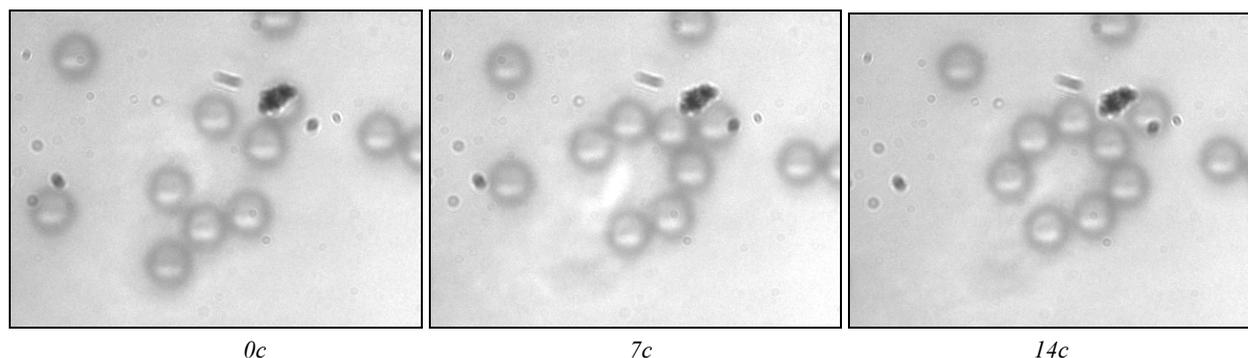


Рис. 10. Различные стадии движения микрочастиц в световом кольце, сформированном спиральным аксиконом 5-го порядка, после обработки с целью определения средней скорости

Средняя скорость определялась также, как в предыдущем случае.

В данном эксперименте для определения средней скорости было использовано семь микрочастиц за время наблюдения 29 с. Всего было обработано 116 изображений с последовательными стадиями движения. Средняя скорость составила $1,3 \pm 0,1$ мкм/с.

Для сравнения был проведен аналогичный эксперимент с ПБ 10-го порядка. Различные стадии движения микрочастиц через интервал в одну секунду в ПБ десятого порядка представлены на рис. 11.

В этом эксперименте для определения средней скорости было использовано девять микрочастиц за время наблюдения 22 с. Всего было обработано 88 изображений с последовательными стадиями движения. Средняя скорость составила $2,9 \pm 0,3$ мкм/с. При этом надо учитывать, что использование бинарного аксикона (рис. 8в) вдвое уменьшает энергию пучка, т.к. энергия делится между двумя (плюс и минус первыми) порядками. В таблице 2 представлены для сравнения параметры обоих экспериментов.

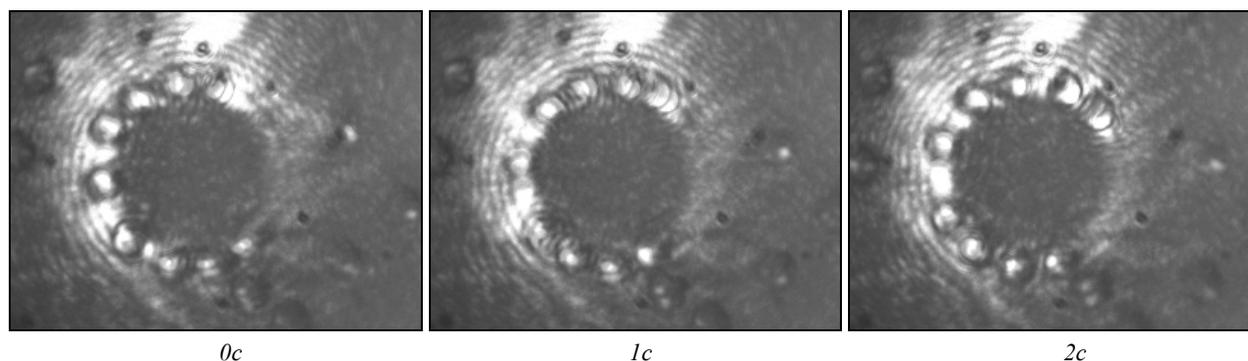


Рис. 11. Различные стадии движения микрочастиц в световом кольце, сформированном бинарным аксиконом 10-го порядка (рис. 2в)

Таблица 2. Сравнительные параметры экспериментов

Пучок	Мощность пучка в рабочей плоскости (мВт) (с учетом потерь)	Средняя интенсивность на самом ярком кольце ($\text{Вт}/\text{м}^2$)	Диаметр самого яркого кольца (мкм)	Средняя скорость движения микрочастиц (мкм/с)
БП 5-го порядка	230	$27 \cdot 10^7$	18	$1,3 \pm 0,1$
БП 10-го порядка	100	$8 \cdot 10^7$	37	$2,9 \pm 0,3$

Как видно из таблицы при использовании БП 10-го порядка скорость движения микрочастиц возрастает более, чем в два раза, при вдвое меньшей энергии пучка. Если считать что сила вязкого трения пропорционально скорости микрочастиц, то при

одинаковой энергии пучков сила, направленная вдоль кольца в БП 10-го порядка, будет превосходить ту же силу для БП 5-го порядка в четыре раза. Надо, правда, заметить, что при этом сложно учесть силу трения частиц о дно кюветы, которая возрастает

ет с увеличением мощности пучка (из-за давления света в результате френелевского отражения от микрочастиц). В частности, из-за этой силы в обоих экспериментах отмечалась в ряде стадий движения полная остановка некоторых микрочастиц (на короткое время).

Заключение

Описаны эксперименты по вращению групп полистироловых микрочастиц диаметром 5 мкм в световых пучках с угловыми гармониками 30-го и 31-го порядков. Проведено сравнение эффективности вращения микрочастиц в световых пучках с разным порядком орбитального углового момента. Описан эксперимент по захвату группы микрочастиц в световой пучок с угловой гармоникой 31-го порядка. Также описаны эксперименты по вращению групп полистироловых микрочастиц диаметром 5 мкм в БП 5-го и 10-го порядков. Проведено сравнение эффективности вращения микрочастиц в БП разных порядков.

Благодарности

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант CRDF RUX0-014-SA-06), а также грантов РФФИ 05-08-50298 и 07-07-97600 и при поддержке «Фонда содействия отечественной науке».

Литература

1. Пятыхев Е.Н., Лурье М.С., Попова И.В., Казакин А.Н. Специфика технологии микромеханических устройств. – Микросистемная техника, 2001. №6. С.32-34.
2. Moh K.J., Yuan X.C., Cheong W.C., Zhang L.S., Lin J., Ahluwalia B.P.S, Wang H. High-power efficient multiple optical vortices in a single beam generated by a kinoform-type spiral phase plate // Appl. Opt., Vol.45. No.6. P.1153-1161 (2006).
3. Kurzynowski P., Woźniak W.A., Frączek E. Optical vortices generation using the Wollaston prism // Appl. Opt., Vol.45. No.30. P.7898-7903 (2006).
4. Chattrapiban N., Rogers E.A., Arakelyan I.V., Roy R., Hill W.T. Laser beams with embedded vortices: tools for atom optics // J. Opt. Soc. Am. B. V.23. No.1. P. 94-103 (2006).
5. Lin J., Yuan X.-C., Tao S.H., Burge R.E. Variable-radius focused optical vortex with suppressed sidelobes // Opt. Lett., Vol.31, No.11. P.1600-1602 (2006).
6. Lin J., Yuan X., Tao S.H., Burge R.E. // Synthesis of multiple collinear helical modes generated by a phase-only element // J. Opt. Soc. Am. A, Vol.23. No.5. P. 1214-1218 (2006).
7. Bentley J.B., Davis J.A., Albero J., Moreno I. Self-interferometric technique for visualization of phase patterns encoded onto a liquid-crystal display // Appl. Opt., Vol.45. No.30. P. 7791-7794 (2006).
8. Bentley J.B., Davis J.A., Bandres M.A., Gutiérrez-Vega J.C. Generation of helical Ince-Gaussian beams with a liquid-crystal display // Opt. Lett., Vol.31. No.5. P. 649-651 (2006).
9. Kotlyar V.V., Skidanov R.V., Khonina S.N., Soifer V.A. Hipergeometric modes // Opt. Lett., Vol.32. No. 7 (2007) (in press).
10. Khonina S. N., Skidanov R. V., Kotlyar V. V., Kovalev A. A., Soifer V. A. Optical micromanipulation using DOEs matched with optical vortices // Proc. SPIE, Vol. 6187. 61871F (2006).
11. Soifer V. A., Kotlyar V. V., Khonina S. N., Skidanov R. V. Remarkable laser beams formed by computer-generated optical elements: properties and applications // Proc. SPIE, Vol. 6252. 62521B (2006).
12. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Lautanen J., Honkanen M., Turunen J. Generating a couple of rotating nondiffracting beams using a binary-phase DOE // Optik, 110 (3). P. 137-144 (1999)

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF DIELECTRIC SPHERES MOVING IN LIGHT BEAMS WITH HIGH ORDER ANGULAR HARMONICS

R.V. Skidanov^{1,2}, S.N. Khonina^{1,2}, V.V. Kotlyar^{1,2}, V.A. Soifer^{1,2}
¹Image Processing Systems Institute of the RAS, Samara, Russia,
²Samara State Aerospace University (SSAU), Samara, Russia

Abstract

We experimentally determine an average liner water-rotation rate of polystyrene microspheres, 5 microns in diameter, in vortex laser beams. It is shown that if orbital angular momentum (OAM) of a beam has a tenfold increase (from 3 to 30), the radius of vortex beam rotation has a threefold increase, whereas the speed of microparticles - only twofold increase. We also performed similar experiments for Bessel beams of different orders.

Keywords: vortex beam, orbital angular momentum, high order Bessel beams, optical microparticles rotation

Citation: Skidanov RV, Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA. Experimental investigation of dielectric spheres moving in light beams with high order angular harmonics [In Russian]. *Computer Optics* 2007; 31(1): 14-21.

Acknowledgements: The research was partly supported by the Russian-American Basic Research and Higher Education Program (grant CRDF RUX0-014-SA-06), by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR) grants Nos. 05-08-50298 and 07-07-97600 and by the Russian Science Support Foundation.

References:

- [1] Pyatyshev EN, Lurie MS, Popova IV, Kazakin AN. The peculiarities of the technology of micromechanical devices [In Russian]. *Nano- and Microsystems Technology* 2001; 6: 32-34.
- [2] Moh KJ, Yuan XC, Cheong WC, Zhang LS, Lin J, Ahluwalia BPS, Wang H. High-power efficient multiple optical vortices in a single beam generated by a kinoform-type spiral phase plate. *Appl. Opt.* 2006; 45(6): 1153-1161.
- [3] Kurzynowski P, Woźniak WA, Frączek E. Optical vortices generation using the Wollaston prism. *Appl. Opt.* 2006; 45(30): 7898-7903.
- [4] Chattrapiban N, Rogers EA, Arakelyan IV, Roy R, Hill WT. Laser beams with embedded vortices: tools for atom optics. *J. Opt. Soc. Am. B* 2006; 23(1): 94-103.
- [5] Lin J, Yuan X-C, Tao SH, Burge RE. Variable-radius focused optical vortex with suppressed sidelobes. *Opt. Lett.* 2006; 31(11): 1600-1602.
- [6] Lin J, Yuan X, Tao SH, Burge RE. Synthesis of multiple collinear helical modes generated by a phaseonly element. *J. Opt. Soc. Am. A* 2006; 23(5): 1214-1218.
- [7] Bentley JB, Davis JA, Albero J, Moreno I. Selfinterferometric technique for visualization of phase patterns encoded onto a liquid-crystal display. *Appl. Opt.* 2006; 45(30): 7791-7794.
- [8] Bentley JB, Davis JA, Bandres MA, Gutiérrez-Vega JC. Generation of helical Ince-Gaussian beams with a liquidcrystal display. *Opt. Lett.* 2006; 31(5): 649-651.
- [9] Kotlyar VV, Skidanov RV, Khonina SN, Soifer VA. Hypergeometric modes. *Opt. Lett.* 2007; 32(7): 742-744.
- [10] Khonina SN, Skidanov RV, Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA. Optical micromanipulation using DOEs matched with optical vortices. *Proc. SPIE* 2006; 6187: 61871F.
- [11] Soifer VA, Kotlyar VV, Khonina SN, Skidanov RV. Remarkable laser beams formed by computer-generated optical elements: properties and applications. *Proc. SPIE* 2006; 6252: 62521B.
- [12] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Lautanen J, Honkanen M, Turunen J. Generating a couple of rotating nondiffracting beams using a binary-phase DOE. *Optik* 1999; 110(3): 137-144.