

РАСЧЕТ ОТРАЖАТЕЛЯ, ФОРМИРУЮЩЕГО РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНУЮ ДИАГРАММУ НАПРАВЛЕННОСТИ

А.Ю. Дмитриев^{1,2}, С.И. Харитонов^{1,2}, В.К. Дюндик^{1,2}

¹Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия,

²Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П. Королева, Самара, Россия

Аннотация

Представлен итерационный метод расчета радиально-симметричного зеркала по заданной диаграмме направленности при точечном источнике света. Рассмотрен алгоритм трассировки лучей с учетом многократных отражений.

Введение

Задача расчета зеркала, формирующего заданную диаграмму направленности (ДН) излучения, является актуальной при расчете систем освещения, фар автомобилей, устройств подсветки LCD-мониторов и т.д. Известны аналитические методы расчета радиально-симметричных зеркал для формирования заданных ДН при точечном источнике света [1-3]. Эти методы сводят задачу к решению дифференциального уравнения первого порядка с последующим интегрированием [1-3]. Методы [1-3] не учитывают возможные многократные отражения луча от зеркала.

В данной статье рассмотрен итерационный метод расчета радиально-симметричного зеркала из условия формирования заданной ДН при точечном источнике. В отличие от [1-3], представленный метод учитывает многократные переотражения лучей. Поверхность зеркала определяется в виде полинома. Коэффициенты полинома вычисляются из условия минимума функции невязки, представляющей разницу расчетного и заданного распределений интенсивности. Для расчета интенсивности разработан алгоритм трассировки лучей с учетом многократных отражений.

2. Расчет диаграммы направленности от отражателя без учета многократных отражений

Пусть радиально-симметричное зеркало задано в виде $r(\beta)$ (рис. 1). Точечный источник находится в начале координат.

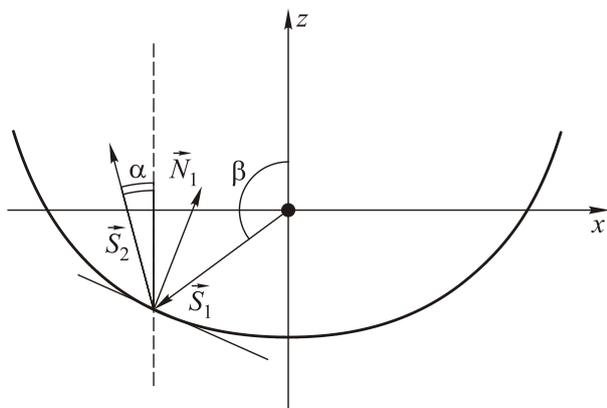


Рис. 1

Для расчета диаграммы направленности воспользуемся законом сохранения светового потока [1-3]:

$$|I_0 \sin(\beta) d\beta| = |I(\alpha) \sin(\alpha) d\alpha|, \quad (1)$$

где I_0 – интенсивность источника, β – угол, под которым луч выходит из источника, α – угол, под которым луч выходит из апертуры отражателя. Под апертурой отражателя будем понимать круговую область, проходящую через крайние точки зеркала. Из (1) получим:

$$I(\alpha) = I_0(\beta) \sin(\beta) / \left(\sin(\alpha(\beta)) \frac{d\beta}{d\alpha} \right) \quad (2)$$

Представление (2) неудобно для расчета, поскольку его нельзя использовать в области каустик. Воспользуемся интегральным представлением формулы (2):

$$I(\alpha) = \int \left| \frac{I_0(\beta) \sin(\beta)}{\sin(\alpha(\beta))} \right| \delta(\alpha - \alpha(\beta)) d\beta \quad (3)$$

Аппроксимируем дельта функцию в (3) иглообразной функцией Гаусса:

$$I(\alpha) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int \left| \frac{I_0(\beta) \sin(\beta)}{\sin(\alpha(\beta))} \right| \exp\left(-\frac{(\alpha - \alpha(\beta))^2}{a^2}\right) d\beta, \quad (4)$$

где a – параметр функции Гаусса.

В (4) неизвестна зависимость $\alpha(\beta)$. Данную зависимость найдем из закона отражения света [3]:

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_1 - \mathbf{N}_1(\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{S}_1), \quad (5)$$

где \mathbf{S}_1 – вектор луча выходящего из источника, $\mathbf{S}_2 = (s_x, s_z)$ – вектор отраженного луча, \mathbf{N}_1 – нормаль к поверхности зеркала в точке отражения.

Согласно (5), функция $\alpha(\beta)$ имеет вид:

$$a(b) = \begin{cases} 2\pi - \arcsin(s_x), & \text{при } s_z \geq 0 \\ \pi + \arcsin(s_x), & \text{при } s_z < 0. \end{cases} \quad (6)$$

3. Расчет диаграммы направленности от зеркала с учетом многократных отражений

Если отраженный луч \mathbf{S}_2 в (5) не попадает в апертуру зеркала, то происходит переотражение (рис. 2).

Для определения факта переотражения найдем координаты точки пересечения отраженного луча с направлением \mathbf{S}_2 с прямой, проходящей через крайние точки зеркала. Если координата x точки пересечения по модулю больше, чем модуль коор-

динаты x крайней точки зеркала, то отраженный вектор не попадает в апертуру и происходит переотражение.

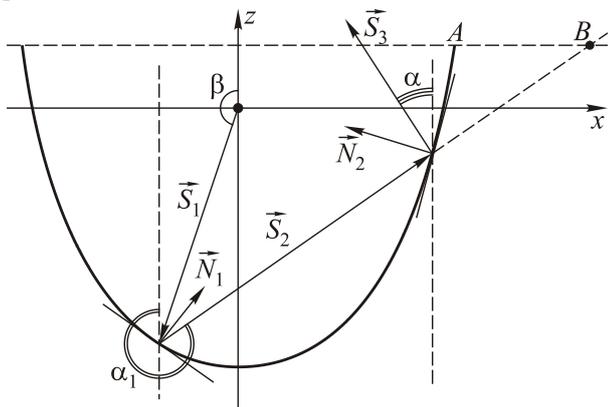


Рис. 2

Координата пересечения рассчитывалась следующим образом.

$$\frac{x - x_1}{s_x} = \frac{z - z_1}{s_z}, \tag{7}$$

– уравнение прямой, по которой движется луч.

$$z = r(\varphi_0) \cos(\varphi_0), \tag{8}$$

– уравнение прямой, проходящей через крайние точки зеркала.

$$x = \frac{s_x}{s_z} \cdot (r(\varphi_0) \cos(\varphi_0) - z_1) + x_1, \tag{9}$$

где φ_0 – угол крайней верхней точки зеркала, а (x_1, z_1) – точка первого отражения. Если переотражений не возникает, то производим расчет интеграла (4) с использованием выражения (6) для $\alpha(\beta)$.

Если же отраженный луч S_2 пересекает поверхность зеркала, то необходимо найти координаты точки пересечения отраженного луча и зеркала, т.е. точку второго отражения. Для этого определим разность функций зеркала и прямой, по которой движется луч [4]:

$$F(\varphi) = \frac{s_z x_1 - s_x z_1}{s_z \cos \varphi - s_x \sin \varphi} - r(\varphi), \tag{10}$$

где, (x_1, z_1) – точка первого отражения. Для нахождения точки найдем такой угол φ , при котором $F(\varphi) = 0$. Затем воспользуемся законом отражения:

$$S_3 = S_2 - N_2(N_2 \cdot S_2). \tag{11}$$

В результате получим S_3 – вектор направления луча после второго отражения. Будем повторять приведенные шаги до тех пор, пока луч S_i не попадет в апертуру зеркала. После этого воспользуемся формулой (6) для расчета $\alpha(\beta)$.

Итак, рассмотрим полный алгоритм трассировки лучей.

Введем сетку по углу β с шагом $\Delta\beta$. Количество лучей, испускаемых источником, будет равно количеству точек на сетке.

Для каждого луча вышедшего под углом β_k будем определять угол, под которым этот луч выйдет из апертуры зеркала, т.е. зависимость $\alpha(\beta_k)$. Если происходит только одно отражение, то используем формулу (5). Если происходят многократные отражения, то будем использовать способ расчета, описанный в данном пункте. Причем, если изначально энергия луча была i_0 , то при каждом отражении будем уменьшать ее согласно формуле:

$$i_{n+1} = i_n \cdot q, \tag{12}$$

где q – коэффициент отражения для зеркала.

После расчета всех $\alpha(\beta_k)$ и $i(\beta_k)$ будем считать интеграл (4) численно.

Добавив прямой свет, получим искомую диаграмму направленности.

4. Расчет зеркала заданной диаграмме направленности

Для расчета зеркала $r(\beta)$ был применен итерационный метод, состоящий в градиентной минимизации функционала невязки $\varepsilon(r)$, представляющего различие расчетного и требуемого распределений интенсивности. Минимизация функционала невязки (обратная задача) предполагает многократное решение прямой задачи, т.е. расчета ДН от заданного зеркала. Решение этой задачи описано в пунктах 2 и 3 данной статьи.

Функция зеркала задавалась в виде полинома в полярных координатах:

$$r(\beta) = \sum_i c_i \cos^{i-1}(\beta), \tag{13}$$

В качестве функционала невязки использовалась квадратичная функция

$$\varepsilon(\mathbf{c}) = \int (I(\alpha, \mathbf{c}) - \tilde{I}(\alpha))^2 d\alpha, \tag{14}$$

где \mathbf{c} – вектор коэффициентов полинома, а $\tilde{I}(\alpha)$ – эталонная диаграмма направленности. Минимизация функционала (14) происходила относительно коэффициентов полинома (13).

В этом случае градиентный метод расчета функции $r(\beta)$ состоит в итерационной коррекции вектора коэффициентов \mathbf{c} по правилу:

$$\mathbf{c}_n = \mathbf{c}_{n-1} - h \nabla \varepsilon(\mathbf{c}_{n-1}), \tag{15}$$

где $\nabla \varepsilon(\mathbf{c})$ – градиент функции невязки, а h – шаг метода. Определение вектора градиента осуществляется численно с использованием разностных формул для расчета производных. В работе для минимизации функционала невязки (14) и реализации градиентного метода (15) были использованы java-класс `Uncmin_f77` и java-интерфейс

Unconstrained_minimization из пакета оптимизации AN UNCONSTRAINED NONLINEAR OPTIMIZATION SOLVER.

Для характеристики качества решений, получаемых в результате работы итерационного алгоритма, введем значение среднеквадратической ошибки:

$$\delta = \frac{1}{\pi} \left[\int \frac{(I(\alpha, \mathbf{c}) - \tilde{I}(\alpha))^2}{(\tilde{I}(\alpha))^2} d\alpha \right]^{1/2}. \quad (16)$$

Теперь рассмотрим способ выбора начального приближения.

Выбор начального приближения является важной частью процесса решения обратной задачи, поскольку целевая функция может иметь несколько локальных минимумов.

По заданной ДН $I(\alpha)$ определялась функция $\alpha(\beta)$ из решения дифференциального уравнения (1). Данная зависимость однозначно определяет зеркало $r(\beta)$:

$$r(\beta_i) = r_0 \exp \int_0^{\beta_i} \operatorname{tg} \left(\frac{-\alpha(\beta) + \beta + \pi}{2} \right) d\beta. \quad (17)$$

Численно рассчитав интеграл (17), получим набор $r(\beta_i)$. По методу наименьших квадратов подберем коэффициенты полинома (13). Полученные коэффициенты используются в качестве начального приближения.

5. Результаты расчета

Представленный алгоритм был использован для расчета зеркала для формирования ДН, изображенной на рис. 3.

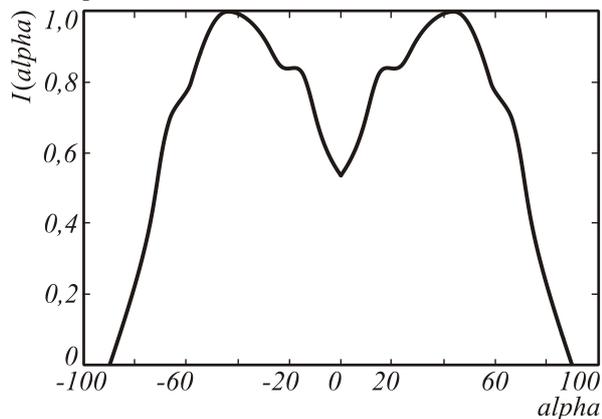


Рис. 3. Эталонная диаграмма направленности

Зеркало было задано в виде полинома (13) шестой степени. В результате расчетов было получено зеркало, представленное на рис. 4. Результирующая ДН приведена на рис. 5. На ней, как и на эталонной диаграмме, наблюдается максимальное значение интенсивности примерно на 45° , а значение интенсивности, составляющее половину от максимального, на 70° .

Расчетные коэффициенты полинома имеют вид:

$$\begin{aligned} c_1 &= 57,96268; c_2 = 9,401274; c_3 = -5,276586 \\ c_4 &= -12,200411; c_5 = 0,867428; c_6 = 14,009340 \\ c_7 &= 8,330860. \end{aligned}$$

Среднеквадратическая ошибка $\delta \approx 2,62\%$.

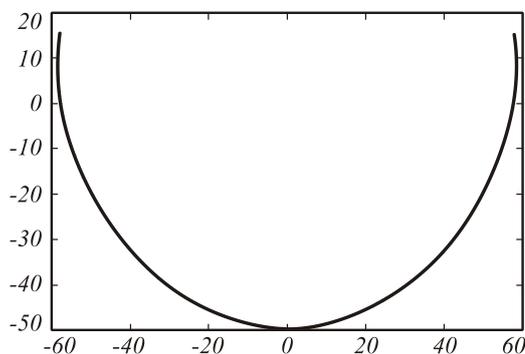


Рис. 4. Сечение полученного зеркала

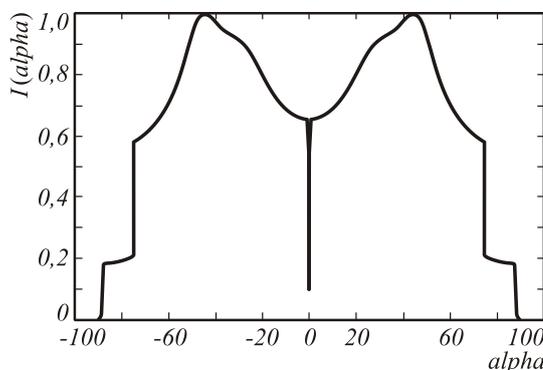


Рис. 5. Полученная диаграмма направленности

Заключение

Описанный градиентный метод расчета зеркала по заданной радиально-симметричной диаграмме направленности является эффективным, так как при зеркале, заданном в виде полинома шестой степени, дает ошибку порядка 3%.

Данный метод может быть применен для расчета радиально-симметричных световых приборов проекторного типа.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №07-07-97601-р_офи, 07-01-96602-р_поволжье_a, 07-07-91580-АСП_a, а также при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант CRDF RUX0-014-SA-06).

Литература

1. Elmer W.B. The Optical Design of Reflectors // [M]. TLA Lighting Consultants. 1989.
2. Elmer W.B. Optical design of reflectors // Applied Optics, 1978. Part 2, Volume 17, Issue 7, April 1, Pp. 977-979.
3. Куц О.К. Оптический расчет световых и облучательных приборов на ЭВМ. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 152 с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1970.

CALCULATION OF A REFLECTOR GENERATING A RADIALY SYMMETRICAL PATTERN BEAM

A.Yu. Dmitriev^{1,2}, S.I. Kharitonov^{1,2}, V.K. Dyundik^{1,2}

¹Image Processing Systems Institute of the RAS, Samara, Russia,

²Samara State Aerospace University (SSAU) Samara, Russia

Abstract

We present an iterative method for calculation of a radially symmetrical reflective mirror by the defined pattern beam with a point light source. We consider a ray tracing algorithm by taking into account multiple reflections.

Keywords: reflector, radially symmetrical pattern beam, ray tracing

Citation: Dmitriev AYu, Kharitonov SI, Dyundik VK. Calculation of a reflector generating a radially symmetrical pattern beam. *Computer Optics* 2007; 31(1): 39-41.

Acknowledgements: The work was performed within a framework of the RFBR grants Nos. 07-07-97601-r_ofi, 07-01-96602-r_povoljje_a, 07-07-91580-ASP_A, and was supported by the Russian-American Basic Research and Higher Education Program (grant CRDF RUX0-014-SA-06).

References:

- [1] Elmer WB. The Optical Design of Reflectors. TLA Lighting Consultants, 1989.
- [2] Elmer WB. Optical design of reflectors. *Applied Optics* 1978; 17(7): 977-979.
- [3] Kusch OK. Computer-aided optical design of illuminating and irradiating devices [In Russian]. Moscow: Energoatomizdat, 1991; 152.
- [4] Korn G, Korn T. Mathematical Handbook [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher, 1970.