

ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ОГРАНИЧЕННОЙ СПИРАЛЬНОЙ ФАЗОВОЙ ПЛАСТИНКЕ: ПАРАКСИАЛЬНАЯ ВЕКТОРНАЯ ТЕОРИЯ

А.А. Ковалев^{1,2}, В.В. Котляр^{1,2}

¹Институт систем обработки изображений Российской академии наук, Самара, Россия,

²Самарский государственный аэрокосмический университет, Самара, Россия

Аннотация

Получены аналитические выражения, описывающие параксиальную векторную дифракцию ограниченной плоской волны на спиральной фазовой пластинке (СФП). Все три компоненты электрического поля представлены в виде конечных сумм функций Бесселя. Показано, что при плюс и минус первом порядке СФП продольная компонента электрического поля не равна нулю на оптической оси. Численно также показано, что в случае параксиальной дифракции продольная составляющая комплексной амплитуды может давать вклад величины в несколько процентов от поперечной.

Введение

В современных научных исследованиях большое внимание уделяется вихревым лазерным пучкам. Основные причины этого интереса заключаются в повышении точности изготовления оптических элементов, формирующих эти пучки, и в возможности решения с их помощью прикладных задач. В частности, одной из таких задач является манипуляция микрочастицами [1].

Вихревые лазерные пучки формируются при прохождении света через спиральные оптические элементы, простейшими из которых являются спиральная фазовая пластинка (СФП) и спиральный аксикон [2].

Существует множество работ, посвященных анализу дифракции света на спиральных оптических элементах, выполненных в рамках скалярной теории дифракции. В данной работе проводится анализ дифракции на СФП в рамках параксиальной векторной теории. В [3] численно показано, что в ряде случаев заметный вклад дает продольная составляющая электрического вектора, не учитываемая в скалярной теории. В данной работе получены аналитические выражения для продольной составляющей поля.

Для анализа распространения векторного электромагнитного поля вдоль оптической оси в большинстве случаев используются два подхода. Один заключается в вычислении дифракционного интеграла Рэлея [4, 5]. Другой заключается в разложении исходного поля по плоским волнам [6]. К числу менее распространенных подходов относится, например, использование функции Вигнера [7]. Из-за трудоемкости или даже невозможности аналитического вычисления интеграла Рэлея часто используют приближения. Например, широко употребляется параксиальное приближение, использованное и в данной работе.

1. Теория

Рассмотрим дифракционный интеграл Рэлея в цилиндрических координатах [4]:

$$E_x(\rho, \theta, z) = -\frac{1}{2\pi} \times \quad (1)$$

$$\times \iint_{R^2} E_x(r, \varphi, 0) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] r dr d\varphi,$$

$$E_y(\rho, \theta, z) = -\frac{1}{2\pi} \times \quad (2)$$

$$\times \iint_{R^2} E_y(r, \varphi, 0) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] r dr d\varphi,$$

$$E_z(\rho, \theta, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} \left\{ E_x(r, \varphi, 0) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] + \quad (3)$$

$$+ E_y(r, \varphi, 0) \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] \right\} r dr d\varphi,$$

где

$$L^2 = z^2 + \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta), \quad (4)$$

E_x , E_y и E_z – декартовы проекции вектора напряженности электрического поля электромагнитной волны, k – волновое число, (r, φ) и (ρ, θ) – полярные координаты в исходной ($z=0$) и текущей поперечных плоскостях, z – оптическая ось.

Пусть в плоскости $z=0$ сформировано электромагнитное поле с гармонической зависимостью от угловой полярной координаты, т.е.

$$E_x(r, \varphi, 0) = A_x(r) \exp(in\varphi), \quad (5)$$

$$E_y(r, \varphi, 0) = A_y(r) \exp(in\varphi), \quad (6)$$

где n – целое число (порядок СФП).

Тогда в параксиальном приближении выражения (1)-(3) принимают вид:

$$E_x(\rho, \theta, z) = (-i)^{n+1} \frac{k}{z} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta + ikz\right) \times \quad (7)$$

$$\times \int_0^\infty A_x(r) \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_n\left(\frac{k\rho r}{z}\right) r dr,$$

$$E_y(\rho, \theta, z) = (-i)^{n+1} \frac{k}{z} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta + ikz\right) \times \quad (8)$$

$$\times \int_0^{\infty} A_y(r) \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_n\left(\frac{kpr}{z}\right) r dr,$$

$$E_z(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^n k}{2z^2} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta + ikz\right) \times$$

$$\times \left\{ \exp(i\theta) \int_0^{\infty} [A_x(r) - iA_y(r)] \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_{n+1} \times \right.$$

$$\times \left(\frac{kpr}{z}\right) r^2 dr - \exp(-i\theta) \int_0^{\infty} [A_x(r) + iA_y(r)] \times \quad (9)$$

$$\times \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_{n-1}\left(\frac{kpr}{z}\right) r^2 dr - 2ip \int_0^{\infty} [A_x(r) \cos \theta +$$

$$+ A_y(r) \sin \theta] \times \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_n\left(\frac{kpr}{z}\right) r dr \left. \right\},$$

где $J_n(x)$ – функция Бесселя первого рода n -го порядка.

В случае, когда в плоскости $z=0$ расположена спиральная фазовая пластинка (СФП) радиуса R n -го порядка и линза с фокусным расстоянием f , получим выражения:

$$A_x(r) \equiv A_x \operatorname{circ}\left(\frac{r}{R}\right) \exp\left(-\frac{ikr^2}{2f}\right), \quad (10)$$

$$A_y(r) \equiv A_y \operatorname{circ}\left(\frac{r}{R}\right) \exp\left(-\frac{ikr^2}{2f}\right), \quad (11)$$

где A_x и A_y – комплексные амплитуды плоской волны, падающей на СФП с линзой. Тогда на расстоянии z сформируется электромагнитное поле со следующими составляющими ($E_{x,y}$ – это либо E_x , либо E_y):

$$E_{x,y}(\rho, \theta, z) = (-i)^{n+1} \frac{kA_{x,y}}{z} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta + ikz\right) \times \quad (12)$$

$$\times \int_0^R \exp\left[\frac{ikr^2}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f}\right)\right] J_n\left(\frac{kpr}{z}\right) r dr,$$

$$E_z(\rho, \theta, z) = (-i)^n \frac{k}{2z^2} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta + ikz\right) \times$$

$$\times \left\{ (A_x - iA_y) \exp(i\theta) \int_0^R \exp\left[\frac{ikr^2}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f}\right)\right] J_{n+1} \times \right.$$

$$\times \left(\frac{kpr}{z}\right) r^2 dr - (A_x + iA_y) \exp(-i\theta) \times \quad (13)$$

$$\times \int_0^R \exp\left[\frac{ikr^2}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f}\right)\right] J_{n-1}\left(\frac{kpr}{z}\right) r^2 dr -$$

$$- 2ip(A_x \cos \theta + A_y \sin \theta) \times$$

$$\times \int_0^R \exp\left[\frac{ikr^2}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f}\right)\right] J_n\left(\frac{kpr}{z}\right) r dr \left. \right\}.$$

В геометрическом фокусе линзы, т. е. при $z = f$, полученные выражения упрощаются [8]:

$$E_{x,y}(\rho, \theta, z = f) = (-i)^{n+1} \frac{kA_{x,y}}{f} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2f} + in\theta + ikf\right) \int_0^R J_n\left(\frac{kpr}{f}\right) r dr =$$

$$= (-i)^{n+1} \frac{kA_{x,y}}{f} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2f} + in\theta + ikf\right) \times$$

$$\begin{cases} n \left[1 - J_0(y) - 2 \sum_{m=1}^{n/2-1} J_{2m}(y) \right] - y J_{n-1}(y), \\ n = 2p, \\ n \left[\int_0^y J_0(t) dt - 2 \sum_{m=1}^{(n-1)/2} J_{2m-1}(y) \right] - y J_{n-1}(y), \\ n = 2p + 1, \end{cases} \quad (14)$$

где $y = kR\rho/f$.

$$E_z(\rho, \theta, z = f) =$$

$$= \frac{(-i)^n k}{2f^2} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2f} + in\theta + ikf\right) \times$$

$$\left\{ (A_x - iA_y) \exp(i\theta) \int_0^R J_{n+1}\left(\frac{kpr}{f}\right) r^2 dr - \right.$$

$$- (A_x + iA_y) \exp(-i\theta) \int_0^R J_{n-1}\left(\frac{kpr}{f}\right) r^2 dr - \quad (15)$$

$$\left. - 2ip(A_x \cos \theta + A_y \sin \theta) \int_0^R J_n\left(\frac{kpr}{f}\right) r dr \right\}.$$

Последний интеграл в (15) вычисляется так же как в (14). Для первых двух интегралов также можно получить аналитические выражения для четных значений порядка СФП n , так как для $p = n \pm 1$

$$\int x^2 J_p(cx) dx =$$

$$= c^{-3} (1 - p^2) \left[J_0(cx) + 2 \sum_{q=1}^{(p-3)/2} J_{2q}(cx) \right] - \quad (16)$$

$$- c^{-1} x^2 J_{p-1}(x) - (p+1) c^{-2} x J_{p-2}(x).$$

При небольших порядках СФП получаются простые формулы. В частности, при $n = 2$:

$$E_{x,y}(\rho, \theta, z = f) = -\frac{2ifA_{x,y}}{k\rho^2} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2f} + i2\theta + ikf\right) \times \quad (17)$$

$$\times \left[J_0\left(\frac{kR\rho}{f}\right) + \frac{kR\rho}{2f} J_1\left(\frac{kR\rho}{f}\right) - 1 \right],$$

$$\begin{aligned}
 E_z(\rho, \theta, z=f) &= \\
 &= -\frac{1}{2k\rho} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2f} + i2\theta + ikf\right) \times \\
 &\left(-\frac{2kR^2}{f}(A_x \cos\theta + A_y \sin\theta) \times \right. \\
 &\times J_2\left(\frac{kR\rho}{f}\right) + \left[\frac{4}{\rho}(A_x - iA_y) \exp(i\theta) - \right. \\
 &\left. -\frac{2ik\rho}{f}(A_x \cos\theta + A_y \sin\theta)\right] \times \\
 &\times \left\{ \frac{f}{k\rho} \left[2 - 2J_0\left(\frac{kR\rho}{f}\right) \right] - RJ_1\left(\frac{kR\rho}{f}\right) \right\}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим два частных случая, соответствующих круговой поляризации поля в начальной плоскости.

При $A_y = -iA_x$:

$$\begin{aligned}
 E_z(\rho, \theta, z) &= \frac{iA_x R}{f\rho} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2f} + i\theta + ikf\right) \times \\
 &\times \left\{ \frac{f}{kR} \left[2 - 2J_0\left(\frac{kR\rho}{f}\right) \right] - \rho J_1\left(\frac{kR\rho}{f}\right) - \right. \\
 &\left. - iRJ_2\left(\frac{kR\rho}{f}\right) \right\}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

При $A_y = iA_x$:

$$\begin{aligned}
 E_z(\rho, \theta, z) &= \frac{iA_x R}{f\rho} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2f} + i3\theta + ikf\right) \times \\
 &\times \left(-iRJ_2\left(\frac{kR\rho}{f}\right) + \left(1 - \frac{4f}{ik\rho^2}\right) \times \right. \\
 &\times \left. \left\{ \frac{f}{kR} \left[2 - 2J_0\left(\frac{kR\rho}{f}\right) \right] - \rho J_1\left(\frac{kR\rho}{f}\right) \right\} \right). \quad (20)
 \end{aligned}$$

2. Численное моделирование

Вычисление амплитуды на оптической оси проводилось без использования параксиального приближения.

На оптической оси поперечные составляющие (14) при $n > 0$ равны нулю. Рассмотрим интеграл Рэлея для z-составляющей на оптической оси:

$$\begin{aligned}
 E_z(0, 0, z) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} \left\{ E_x(r, \varphi, 0) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] + \right. \\
 &+ E_y(r, \varphi, 0) \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] \left. \right\} dx dy, \quad (21)
 \end{aligned}$$

где $L = (r^2 + z^2)^{1/2}$.

В случае поля в плоскости $z = 0$, имеющего вид (5)-(6), и ограниченной апертуры радиуса R :

$$\begin{aligned}
 E_z(0, 0, z) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{R^2} [A_x(r) \cos\varphi + A_y(r) \sin\varphi] \times \\
 &\times \exp(in\varphi) \frac{\partial}{\partial L} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] \frac{r^2}{L} dr d\varphi = \\
 &= \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \exp(in\varphi) \cos\varphi d\varphi = \pi(\delta_{n+1} + \delta_{n-1}) \\ &\int_0^{2\pi} \exp(in\varphi) \sin\varphi d\varphi = -i\pi(\delta_{n+1} - \delta_{n-1}) \end{aligned} \right\} = \quad (22) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^R A_x(r) (\delta_{n+1} + \delta_{n-1}) \frac{\partial}{\partial L} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] \frac{r^2}{L} dr - \\
 &- \frac{i}{2} \int_0^R A_y(r) (\delta_{n+1} - \delta_{n-1}) \frac{\partial}{\partial L} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] \frac{r^2}{L} dr,
 \end{aligned}$$

где δ_n – символ Кронекера:

$$\delta_n = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Тогда при $n \neq \pm 1$ амплитуда z-составляющей равна нулю. При $n = \pm 1$ получается, что продольная составляющая электрического поля на оптической оси отлична от нуля:

$$\begin{aligned}
 E_z(0, 0, z) &= \frac{1}{2} \times \\
 &\times \int_0^R [A_x(r) + inA_y(r)] \left(\frac{ik}{L^2} - \frac{1}{L^3} \right) \exp(ikL) r^2 dr. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Если использовать вычисление дифракционного интеграла Рэлея методом прямоугольников или трапеций, то на малых расстояниях z значение продольной компоненты устремляется в бесконечность (рис. 1), что не имеет физического объяснения и является следствием неточных вычислений, так как при малых z значение L также становится малым, и подынтегральное выражение в (24) резко возрастает. Поэтому в данной работе использовался другой метод расчета интеграла (24) – численно-аналитический.

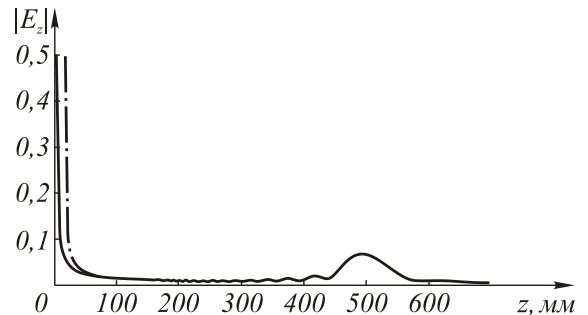


Рис. 1. Зависимость продольной составляющей E_z от расстояния z , рассчитанная с помощью метода прямоугольников (прерывистая линия) и численно-аналитическим методом (сплошная линия)

Разобьем интервал интегрирования $(0, R)$ на $(M - 1)$ частей точками $r_m = mR/(M - 1)$, $m = \overline{0, M - 1}$.

Пусть функция

$$g(r) = r[A_x(r) + inA_y(r)] \quad (25)$$

на интервале (r_m, r_{m+1}) аппроксимируется следующим выражением:

$$g(r) \approx a_m + b_m r^2. \quad (26)$$

Тогда

$$E_z(0, 0, z) \approx \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-2} \int_{r_m}^{r_{m+1}} (a_m + b_m r^2) \frac{\partial}{\partial L} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] \frac{r}{L} dr. \quad (27)$$

Рассмотрим два неопределенных интеграла.

$$I_1(r) = \int \frac{\partial}{\partial L} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] \frac{r}{L} dr = \frac{\exp(ikL)}{L}, \quad (28)$$

$$I_2(r) = \int r^2 \frac{\partial}{\partial L} \left[\frac{\exp(ikL)}{L} \right] \frac{r}{L} dr = [L - z^2/L + 2i/k] \exp(ikL). \quad (29)$$

Тогда

$$E_z(0, 0, z) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-2} [a_m I_1(r)|_{r=r_m}^{r_{m+1}} + b_m I_2(r)|_{r=r_m}^{r_{m+1}}]. \quad (30)$$

Коэффициенты a_m и b_m выбираются по критерию наименьшего среднеквадратичного отклонения от кусочно-линейной функции:

$$\varepsilon = \int_{r_m}^{r_{m+1}} \left\{ (a_m + b_m r^2) - \left[g_m + \frac{g_{m+1} - g_m}{r_{m+1} - r_m} (r - r_m) \right] \right\}^2 dr \rightarrow \min, \quad (31)$$

где $g_m = g(r_m)$.

Приравнивая нулю производные по a_m и b_m , получим:

$$\int_{r_m}^{r_{m+1}} \left\{ (a_m + b_m r^2) - [g_m + \Delta g_m (r - r_m)] \right\} dr = 0, \quad (32)$$

$$\int_{r_m}^{r_{m+1}} \left\{ (a_m + b_m r^2) - [g_m + \Delta g_m (r - r_m)] \right\} r^2 dr = 0, \quad (33)$$

где $\Delta g_m = (g_{m+1} - g_m)/(r_{m+1} - r_m)$.

Тогда

$$a_m \Delta_m^1 r + b_m \Delta_m^3 r = (g_m - \Delta g_m r_m) \Delta_m^1 r + \Delta g_m \Delta_m^2 r, \quad (34)$$

$$a_m \Delta_m^3 r + b_m \Delta_m^5 r = (g_m - \Delta g_m r_m) \Delta_m^3 r + \Delta g_m \Delta_m^4 r, \quad (35)$$

где $\Delta_m^k r = (r_{m+1}^k - r_m^k)/k$.

Далее коэффициенты могут быть легко определены например с помощью правила Крамера.

На рис. 2 показано распределение амплитуды z-составляющей электромагнитного поля вдоль оптической оси. Параметры расчета: длина волны: $\lambda = 514,5$ нм, радиус апертуры: $R = 2$ мм, порядок СФП: $n = 1$.

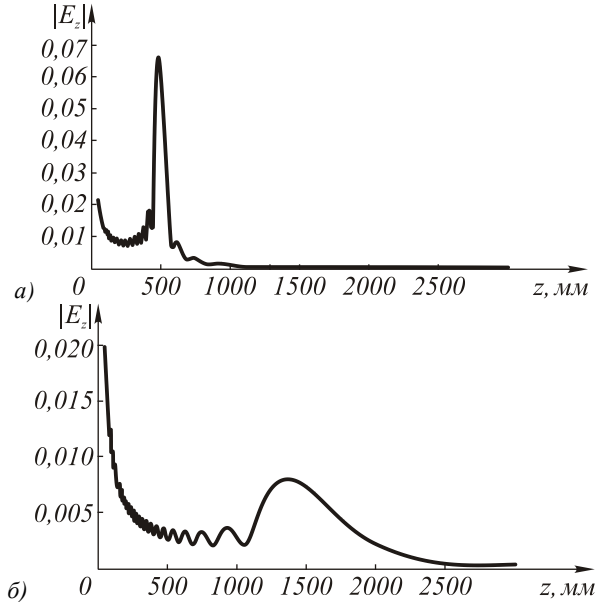


Рис. 2. Значение модуля z-компоненты на оптической оси, рассчитанное для $f = 500$ мм (а) и $f = 1500$ мм (б)

На рис. 3 и 4 показаны распределение амплитуды x- и z-составляющих электромагнитного поля вдоль радиальной координаты. Параметры расчета: длина волны – $\lambda = 514,5$ нм, фокусное расстояние линзы – $f = 500$ мм, порядок СФП – $n = 1$.

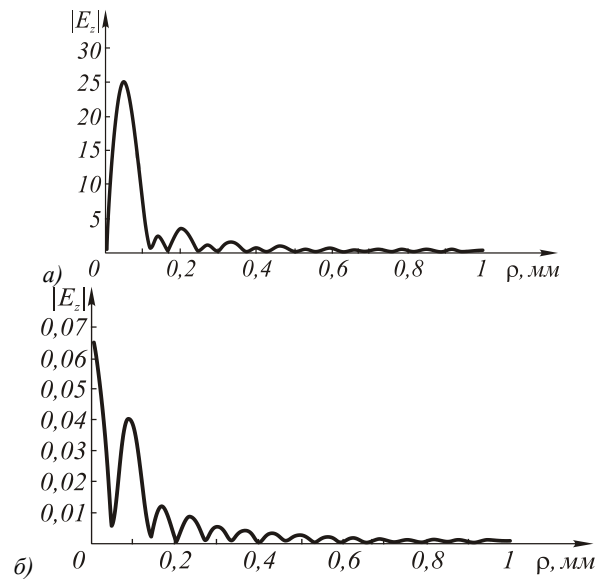


Рис. 3. Значение модуля амплитуды в плоскости $z = 500$ мм при радиусе апертуры 2 мм: x-составляющая (а) и z-составляющая (б)

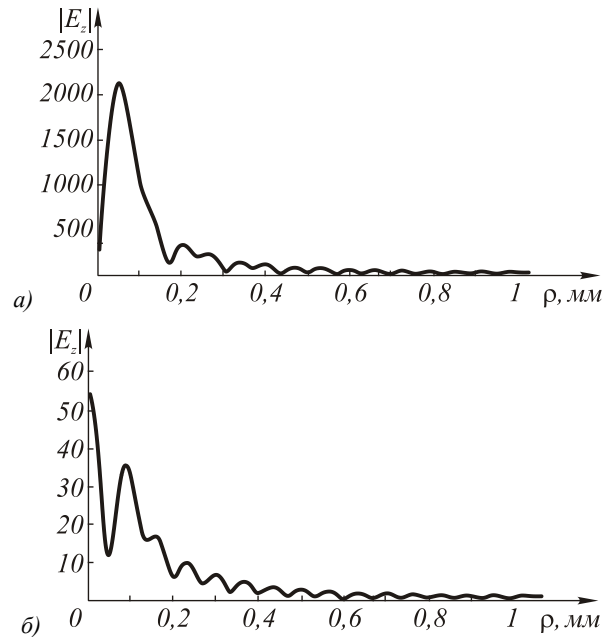


Рис. 4. Значение модуля амплитуды в плоскости $z = 500$ мм при радиусе апертуры 20 мм: x -составляющая (а) и z -составляющая (б)

Из рис. 4 видно, что z -составляющая амплитуды может составлять несколько процентов, поэтому в ряде случаев имеет смысл учитывать ее наличие, даже в параксиальном случае.

Заключение

В работе были получены аналитические выражения, описывающие параксиальную векторную дифракцию ограниченной плоской волны на СФП. Все три компоненты электрического поля E_x , E_y и E_z представлены в виде конечных сумм функций Бесселя. Показано, что при $n = \pm 1$ продольная компонента электрического поля E_x не равна нулю на оптической оси.

DIFFRACTION OF A PLANE WAVE BY A LIMITED SPIRAL PHASE PLATE: THE PARAXIAL VECTOR THEORY

A.A. Kovalev^{1,2}, V.V. Kotlyar^{1,2}

¹Image Processing Systems Institute of the RAS, Samara, Russia,

²Samara State Aerospace University (SSAU), Samara, Russia

Abstract:

Analytic expressions describing vector paraxial diffraction of a limited plane wave by a spiral phase plate (SPP) are obtained. All three components of the electrical field are presented in the form of total amounts of Bessel functions. It is shown that at the plus-and-minus first order of SPPs a longitudinal component of the electrical field is not zero on the optical axis. It is also numerically shown that in case of paraxial diffraction, the longitudinal component of the complex amplitude can provide a contribution of a few percent of a transverse component.

Keywords: spiral phase plate, paraxial approximation, vector theory

Citation: Kovalev AA, Kotlyar VV. Diffraction of a plane wave by a limited spiral phase plate: the paraxial vector theory [In Russian]. Computer Optics 2007; 31(2): 4-8.

Acknowledgements: The research was partly supported by the Russian-American Basic Research and Higher Education Program (grant CRDF RUX0- 014-Sa-06) and the RFBR grants Nos. 05-08-50298, 07-07-97601 and 07-07-97600.

Численно также показано, что в случае параксиальной дифракции продольная составляющая электрического вектора электромагнитной волны может давать вклад величиной в несколько процентов от поперечной.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (грант CRDF RUX0-014-Sa-06), а также грантов РФФИ 05-08-50298, 07-07-97601 и 07-07-97600.

Литература

1. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Skidanov R.V., Soifer V.A., Jefimovs K., Simonen J., Turunen J. Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements // J. Mod. Opt., 2004. – Vol.51. – No.14. – Pp.2167-2184.
 2. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Shinkarev M.V., Soifer V.A., Uspleniev G.V. The rotor phase filter // J. Mod. Opt., 1992. – Vol. 39. – No. 5. – P. 1147-1154.
 3. Ganic D., Gan X., Gu M. Focusing of doughnut laser beams by a high numerical-aperture objective in free space // Opt. Express, 2003. – Vol. 11. – Pp. 2747-2752.
 4. Zhang Y., Wang L., Zheng C. Vector propagation of radially polarized Gaussian beams diffracted by an axicon // J. Opt. Soc. Am. A, 2005. – Vol. 22. – Pp. 2542-2546.
 5. Deng D. Nonparaxial propagation of radially polarized light beams // J. Opt. Soc. Am. B, 2006. – Vol. 23. – Pp. 1228-1234.
 6. Agrawal G.P., Pattanayak D.N. Gaussian beam propagation beyond the paraxial approximation // J. Opt. Soc. Am, 1979. – Vol. 69. – P.575-578.
 7. Duan K., Lu B. Application of the Wigner distribution function to complex-argument Hermite-and Laguerre-Gaussian beams beyond the paraxial approximation // Opt. Las. Tech, 2007. – Vol.39. – Pp.110-115.
- Котляр В.В., Ковалев А.А., Соифер В.А., Девис Д.А., Тувей С., Коттрел Д. Дифракция плоской волны конечного радиуса на спиральном аксиконе и спиральной фазовой пластинке: сравнение // Компьютерная оптика, 2006. – Т. 30. – С. 36-43.

References:

- [1] Khonina SN, Kotlyar VV, Skidanov RV, Soifer VA, Jefimovs K, Simonen J, Turunen J. Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements. *J. Mod. Opt.* 2004; 51(14): 2167-2184.
- [2] Khonina SN, Kotlyar VV, Shinkarev MV, Soifer VA, Uspleniev GV. The rotor phase filter. *J. Mod. Opt.* 1992; 39(5): 1147-1154.
- [3] Ganic D, Gan X, Gu M. Focusing of doughnut laser beams by a high numerical-aperture objective in free space. *Opt. Express* 2003; 11: 2747-2752.
- [4] Zhang Y, Wang L, Zheng C. Vector propagation of radially polarized Gaussian beams diffracted by an axicon. *J. Opt. Soc. Am. A* 2005; 22: 2542-2546.
- [5] Deng D. Nonparaxial propagation of radially polarized light beams. *J. Opt. Soc. Am. B* 2006; 23: 1228-1234.
- [6] Agrawal GP, Pattanayak DN. Gaussian beam propagation beyond the paraxial approximation. *J. Opt. Soc. Am* 1979; 69: 575-578.
- [7] Duan K, Lu B. Application of the Winer distribution function to complex-argument Hermite- and Laguerre Gaussian beams beyond the paraxial approximation. *Opt. Las. Tech* 2007; 39: 110-115.
- [8] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA, Davis JA, Tuvey CS, Cottrell D. Diffraction of a plane, finite-radius wave by a helical axicon and a spiral phase plate: in comparison [In Russian]. *Computer Optics* 2006; 30: 36-43.