

УСТОЙЧИВЫЙ МЕТОД РАСШИФРОВКИ ИНТЕРФЕРОГРАММ С ПОШАГОВЫМ СДВИГОМ

С.В. Двойнишников¹¹Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

Аннотация

Предложен метод расшифровки интерферограмм, обеспечивающий минимизацию ошибки определения разности фаз интерферирующих фронтов при наличии шумов на интерференционных картинах. Рассмотрен математический аппарат решения трансцендентных уравнений с произвольными пошаговыми сдвигами. Показано необходимое и достаточное условие для решения задачи предложенным методом в зависимости от значений вносимых фазовых сдвигов и их количества. Проведен сравнительный анализ работы предложенного метода и алгоритма расшифровки интерферограмм на основе векторного представления системы трансцендентных уравнений.

Введение

Задача определения параметров интерференционных волновых полей актуальна не только для интерферометрии [1-3], но и для других приложений, например? задач восстановления поверхности трехмерных объектов оптическим методом проекции полос [4-6].

При интерференции волновых фронтов зависимость разности фаз преобразуется в зависимость интенсивности освещения поверхности от координат, которая может быть измерена. Интенсивность интерференционной картины (интерферограммы) можно описать следующим выражением [7]:

$$I(x, y) = A(x, y)(1 + V(x, y) \cos(\varphi(x, y))), \quad (1)$$

где $I(x, y)$ – распределение интенсивности в интерференционной картине; $A(x, y)$ – распределение фоновой интенсивности; $V(x, y)$ – средняя видимость; $\varphi(x, y)$ – искомое распределение разности фаз волновых фронтов. То есть, в каждой точке интерференционной картины интенсивность освещения является функцией трех априори неизвестных параметров, а именно: фоновой интенсивности $A(x, y)$, средней видимости $V(x, y)$ и разности фаз между волновыми фронтами $\varphi(x, y)$ (параметр, который мы хотим измерить).

Существующие методы обработки интерферограмм можно разбить на две группы. К первой группе относятся методы, для применения которых достаточно иметь одну интерференционную картину. Как правило, эти методы основаны на алгоритмах пространственной фильтрации интерферограммы [1-3, 6]. Методы имеют довольно низкую точность, поэтому их применяют в задачах, где невозможно получить несколько интерференционных картин с различными сдвигами фазы между волновыми фронтами. Чаще всего это задачи исследования динамических объектов.

Ко второй группе относятся методы, основанные на методе «фазового сдвига». Здесь дополнительную информацию для определения разности фаз получают, последовательно вводя известный сдвиг фаз между двумя волновыми фронтами и каждый раз записывая получающиеся изображения. На основе полученных данных для каждой точки изображения

вычисляют три неизвестных параметра: фоновую интенсивность, среднюю видимость и искомое значение разности фаз волновых фронтов.

Задача определения разности фаз методом «фазового сдвига» сводится к решению системы трансцендентных уравнений вида [7]:

$$I_i(x, y) = A(x, y)(1 + V(x, y) \cos(\varphi(x, y) + \delta_i)), \quad (2)$$

$$i \in 0 \dots N-1,$$

где $I_i(x, y)$ – распределение интенсивности в i -й интерференционной картине; $A(x, y)$ – распределение фоновой интенсивности; $V(x, y)$ – средняя видимость; $\varphi(x, y)$ – искомое распределение разности фаз волновых фронтов; δ_i – вносимый сдвиг фазы между интерферирующими волновыми фронтами; N – число сдвигов. Система уравнений (2) имеет решение, если имеется как минимум 3 интерференционных картины с различными распределениями интенсивности $I_i(x, y)$ [7]. Далее для упрощения выражений обозначение (x, y) опустим, φ будем называть фазой интерферограммы, а символом δ_i будем обозначать i -й сдвиг интерферограммы.

В случае, когда $\delta_i = (i-1) \cdot 2\pi / N$, решение системы уравнений (2) можно найти разложением в ряд Фурье [8, 9], либо с использованием ортогональных отношений тригонометрических функций [6]:

$$\varphi = \arctan \frac{\sum_{i=1}^N I_i \cos(i\delta_i)}{\sum_{i=1}^N I_i \sin(i\delta_i)}. \quad (3)$$

В экспериментах очень часто сдвиги δ_i оказываются произвольными. Например, из-за узкого динамического диапазона регистрирующего фотоприемника невозможно получить значение интенсивности I_i для всех сдвигов интерферограммы (рис.1). В этом случае приходится решать систему трансцендентных уравнений (2) непосредственно, что при большой серии сдвигов довольно сложно.

Известен обобщенный алгоритм расшифровки интерферограмм с произвольными пошаговыми сдвигами [10] на основе векторного представления

выражения (2). Алгоритм позволяет получать искомое распределение фазы, но не обеспечивает минимизации ошибки определения при наличии шумов на интерференционных картинах.

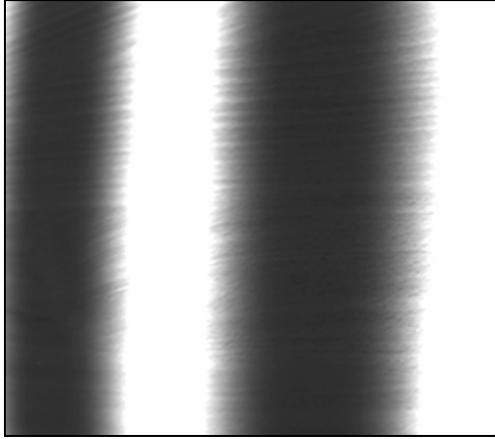


Рис. 1. Фрагмент интерферограммы, имеющий области недостоверных точек, обусловленные узким динамическим диапазоном камеры

Данная работа посвящена разработке метода расшифровки интерферограмм с произвольным пошаговым сдвигом, обеспечивающим минимизацию ошибки определения фазы при наличии шумов на интерференционных картинах.

1. Описание метода

Представим выражение (2) в виде:

$$I_i = A + B \cdot \sin(\delta_i) + C \cdot \cos(\delta_i), \quad (4)$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{B}{C}\right), \quad (5)$$

$$V = \frac{\sqrt{B^2 + C^2}}{A}. \quad (6)$$

Коэффициенты A , B , C будем определять из условия минимизации функционала невязки между экспериментальными и теоретическими данными $S(A, B, C)$:

$$S(A, B, C) = \sum_{i=1}^N (I_i - A - B \cdot \sin(\delta_i) - C \cdot \cos(\delta_i))^2. \quad (7)$$

Условие минимизации $S(A, B, C)$ – равенство нулю всех частных производных:

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial B} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial C} = 0 \quad (8)$$

В результате имеем систему из трех линейных уравнений:

$$\begin{cases} k_1 \cdot A + k_2 \cdot B + k_3 \cdot C = k_7 \\ k_2 \cdot A + k_4 \cdot B + k_5 \cdot C = k_8, \\ k_3 \cdot A + k_5 \cdot B + k_6 \cdot C = k_9 \end{cases} \quad (9)$$

где $k_1 \dots k_9$ определяются из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} k_1 &= N; \\ k_2 &= \sum_{i=1}^N \cos(\delta_i); \\ k_3 &= \sum_{i=1}^N \sin(\delta_i); \\ k_4 &= \sum_{i=1}^N \cos^2(\delta_i); \\ k_5 &= \sum_{i=1}^N \cos(\delta_i) \cdot \sin(\delta_i); \\ k_6 &= \sum_{i=1}^N \sin^2(\delta_i); \\ k_7 &= \sum_{i=1}^N I_i; \\ k_8 &= \sum_{i=1}^N I_i \cdot \cos(\delta_i); \\ k_9 &= \sum_{i=1}^N I_i \cdot \sin(\delta_i); \end{aligned} \quad (10)$$

Решая систему линейных уравнений (9), получаем следующие выражения для A , B , C :

$$\begin{aligned} A &= -(k_5^2 \cdot k_7 - k_4 \cdot k_6 \cdot k_7 - \\ &- k_3 \cdot k_5 \cdot k_8 + k_2 \cdot k_6 \cdot k_8 + \\ &+ k_3 \cdot k_4 \cdot k_9 - k_2 \cdot k_5 \cdot k_9) / (-k_3^2 \cdot k_4 + \\ &+ 2 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_5 - k_1 \cdot k_5^2 - k_2^2 \cdot k_6 + \\ &+ k_1 \cdot k_4 \cdot k_6), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} B &= -(k_3 \cdot k_5 \cdot k_7 - k_2 \cdot k_6 \cdot k_7 - \\ &- k_3^2 \cdot k_8 + k_1 \cdot k_6 \cdot k_8 + \\ &+ k_2 \cdot k_3 \cdot k_9 - k_1 \cdot k_5 \cdot k_9) / (k_3^2 \cdot k_4 - \\ &- 2 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_5 + k_1 \cdot k_5^2 + k_2^2 \cdot k_6 - \\ &- k_1 \cdot k_4 \cdot k_6), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} C &= -(-k_3 \cdot k_4 \cdot k_7 - k_2 \cdot k_5 \cdot k_7 - \\ &- k_2 \cdot k_3 \cdot k_8 + k_1 \cdot k_5 \cdot k_8 + k_2^2 \cdot k_9 - \\ &- k_1 \cdot k_4 \cdot k_9) / (k_3^2 \cdot k_4 - 2 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_5 + \\ &+ k_1 \cdot k_5^2 + k_2^2 \cdot k_6 - k_1 \cdot k_4 \cdot k_6). \end{aligned} \quad (13)$$

Откуда φ вычисляется из выражения (5). Среднеквадратичное отклонение измеренной интенсивности $S(A, B, C)$ и среднеквадратичное отклонение фазы интерферограммы $\sigma(A, B, C)$ оцениваются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} S(A, B, C) &= \\ &= \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (I_i - A - B \cdot \sin(\delta_i) - C \cdot \cos(\delta_i))^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\sigma(A, B, C) = \frac{1}{N} \times \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\arccos\left(\frac{I_i - A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) + \arctan\left(\frac{B}{C}\right) - \delta_i \right)^2} \quad (15)$$

В основе представляемого метода расшифровки интерферограмм лежит классический метод гармонической регрессии [11]. Метод гармонической регрессии является разновидностью метода наименьших квадратов (МНК). В основе МНК лежит процедура минимизации функционала невязки между экспериментальными и теоретическими данными путем вариации искомых параметров в ограниченном объеме их возможных значений. Поэтому предлагаемый метод расшифровки интерферограмм дает устойчивое решение системы уравнений (2), то есть гарантирует минимизацию ошибки определения фазы.

$$\text{rank} \begin{pmatrix} N & \sum_{i=1}^N \cos(\delta_i) & \sum_{i=1}^N \sin(\delta_i) \\ \sum_{i=1}^N \cos(\delta_i) & \sum_{i=1}^N \cos^2(\delta_i) & \sum_{i=1}^N \cos(\delta_i) \cdot \sin(\delta_i) \\ \sum_{i=1}^N \sin(\delta_i) & \sum_{i=1}^N \cos(\delta_i) \cdot \sin(\delta_i) & \sum_{i=1}^N \sin^2(\delta_i) \end{pmatrix} = 3. \quad (18)$$

Так как выражение (18) зависит только от δ_i и N , то оно определяет необходимые и достаточные условия нахождения решения системы уравнений (2) предложенным методом в зависимости от значений вносимых сдвигов δ_i и их количества N .

Алгоритмическая сложность предлагаемого метода расшифровки интерферограмм в зависимости от параметра N складывается из сложности всех шагов определения фазы интерференционной картины. Учитывая, что имеется линейная зависимость от N в формулах определения коэффициентов $k_1 \dots k_9$, то сложность всего метода можно оценить как $O(N)$.

2. Верификация метода

Выполним верификацию предложенного метода. Для этого сравним результат работы представленного метода расшифровки интерферограмм на основе гармонической регрессии и обобщенного алгоритма расшифровки интерферограмм на основе векторного представления выражения (2) [10]. Оценивать результат работы будем по величине отклонения измеренной величины фазы от исходной:

$$\varepsilon = \psi - \varphi, \quad (19)$$

где ε – величина отклонения измеренной величины фазы от исходной; ψ – величина фазы, полученная с применением соответствующего метода; φ – исходная фаза. Исходная фаза задается путем моделирования типичного распределения интенсивности на интерференционных картинах. Так как сравниваемые методы могут работать при произвольных δ_i ,

Так как в основе метода лежит МНК, то минимизация ошибки гарантирована при наличии шумов, имеющих нулевое математическое ожидание M и постоянную дисперсию D [12] в выборке, соответствующей определенным координатам (x, y) :

$$M(x, y) = M(\{I_i(x, y), i \in 1..N\}) = 0, \quad (16)$$

$$D(x, y) = D(\{I_i(x, y), i \in 1..N\}) = \text{const}. \quad (17)$$

Из выражения (5) следует, что фаза φ не зависит от распределения фоновой интенсивности A . Именно поэтому предложенный метод обеспечивает минимизацию ошибки определения φ при наличии шумов, имеющих постоянные математическое ожидание и дисперсию.

Необходимое и достаточное условие определения фазы φ – невырожденность системы линейных уравнений (9):

то сдвиги при генерировании интерференционных картин будем задавать в виде произвольного набора случайных величин с равномерным распределением на отрезке $[0, 2\pi)$. Интерференционные картины сформируем с фоновой интенсивностью $A=10$ и видимостью $V=0,5$. Распределение интенсивности в интерференционных картинах зададим согласно уравнению (1) с добавлением аддитивного шума (рис. 2). Шум представляет собой случайную величину с гауссовым распределением. Уровень шума будем характеризовать среднеквадратичным отклонением от величины фоновой интенсивности.

Проверим, зависит ли погрешность работы обоих методов от величины найденной фазы φ при постоянном шуме и одинаковом количестве интерференционных картин N . Для этого построим зависимость величины отклонения измеренной величины фазы от исходной ε от значения исходной фазы φ , которая принимает значения $[0, 2\pi)$. Количество интерференционных картин $N=50$. СКО шума равно 1% от величины фоновой интенсивности A в выражении (1).

Для уменьшения стохастического характера графиков использовались 200 различных наборов интерференционных картин и на графике фиксировались максимальные полученные отклонения измеренной фазы. Такая процедура применялась во всех далее описанных экспериментах.

На рис. 3 представлены полученные зависимости ε от φ . Видно, что предлагаемый устойчивый метод обеспечивает, как минимум, на порядок меньшее отклонение полученной фазы, не зависящее от измеряемой величины исходной фазы φ .

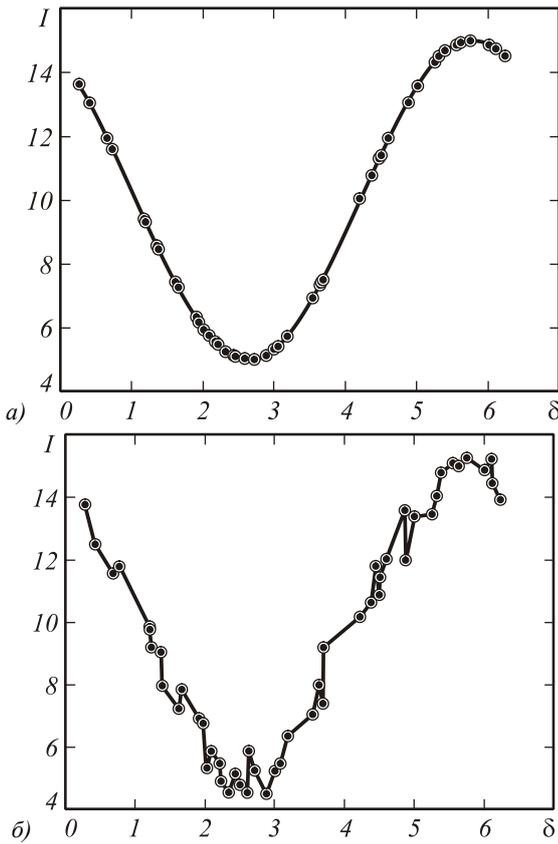


Рис. 2. Зависимость интенсивности в интерференционных картинах от фазового сдвига (а - без добавления шума, б - с добавлением аддитивного шума)

На практике интерференционные картины, как правило, содержат шумы аддитивного характера, накладываемые регистрирующим фотоприемником. Поэтому полезно оценить точность определения фазы в зависимости от уровня аддитивного шума фотоприемника на интерферограмме.

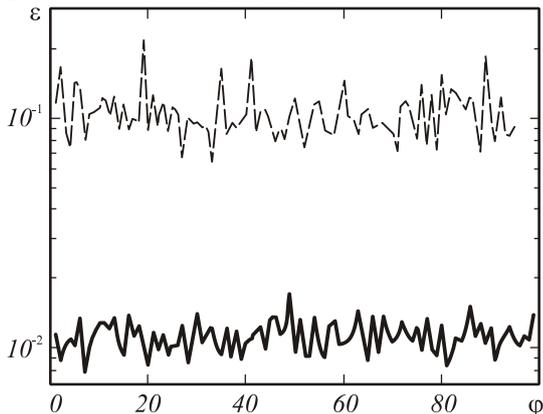


Рис. 3. Отклонение фазы измеренной методом обработки интерферограмм на основе векторного представления системы уравнений (пунктирная линия) и устойчивым методом обработки интерферограмм на основе гармонической регрессии (сплошная линия) при различных значениях фазы

Оценим отклонение измеренной величины фазы от исходной ϵ в зависимости от уровня шума,

накладываемого на распределение интенсивности в интерференционной картине при постоянном количестве сдвигов. Так как величина исходной фазы ϕ не влияет на ϵ , то она выбрана равной 0,5 радиан. Количество интерференционных картин $N=50$. СКО шума H , накладываемого на распределение интенсивности, принимает значения в интервале 0-100% от фоновой интенсивности A (выражение (1)).

Полученная зависимость отклонения измеренной фазы в зависимости от уровня шума представлена на рис. 4. Для метода обработки интерферограмм на основе векторного представления системы уравнений (2) ошибка превышает 100% при дисперсии шума более 10%. То есть метод обработки интерферограмм на основе векторного представления системы уравнений (2) дает недостоверные результаты при дисперсии шума более 10% от величины фоновой интенсивности. Предложенный метод обработки интерферограмм на основе гармонической регрессии обеспечивает погрешность менее 50% при дисперсии шума менее 20%.

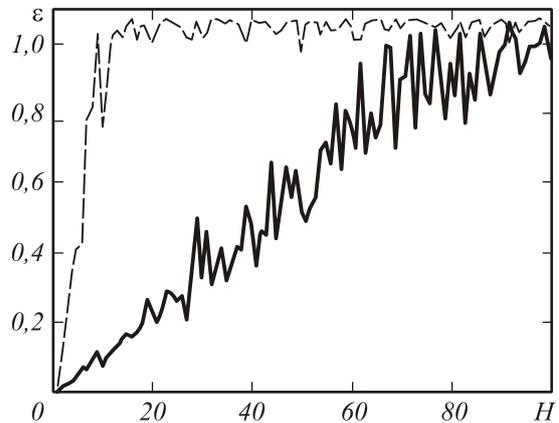


Рис. 4. Отклонение измеренной фазы от уровня шума в распределении интенсивности. Метод обработки интерферограмм на основе векторного представления системы уравнений (1) (пунктирная линия) [10] и описываемый устойчивый метод обработки интерферограмм на основе гармонической регрессии (сплошная линия)

В эксперименте количество реализаций интерферограмм N всегда ограничено. При этом важно знать оптимальное количество реализаций для расшифровки интерферограмм с заданной точностью. Проведем сравнительный анализ методов в случае восстановления фазы по ограниченному набору N реализаций интерферограмм. Будем анализировать точность определения фазы ψ в зависимости от количества N . Уровень аддитивного шума зададим постоянным, с СКО равным 5% от уровня фоновой интенсивности. Величина определяемой фазы неизменна и задана равной 0,5 радиан.

Результаты работы методов представлены на рис. 5. С увеличением N ошибка определения фазы алгоритмом на основе векторного представления системы трансцендентных уравнений качественно не уменьшается.

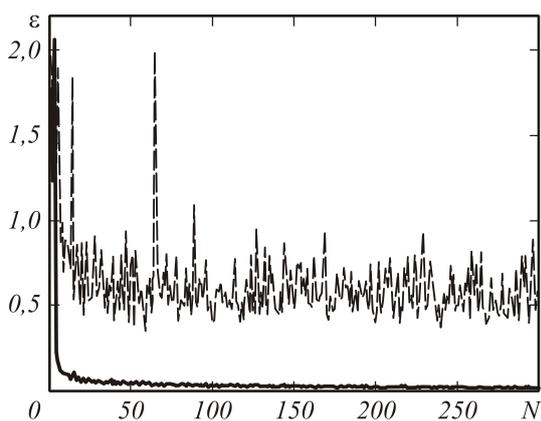


Рис. 5. Отклонение измеренной фазы от числа сдвигов. Метод обработки интерферограмм на основе векторного представления системы уравнений (1) (пунктирная линия) [10] и описываемый устойчивый метод обработки интерферограмм на основе гармонической регрессии (сплошная линия)

Даже при малых N (за исключением $N < 5$) погрешность метода расшифровки интерферограмм на основе векторного представления системы уравнений (2) в несколько раз выше, чем у представленного метода на основе гармонической регрессии. Результаты моделирования в целом демонстрируют устойчивость предложенного метода к шумам, его повышенную точность при работе с ограниченным набором интерферограмм и практическую ценность.

Заключение

Предложен устойчивый метод расшифровки интерферограмм с пошаговым сдвигом, обеспечивающий минимизацию ошибки определения разности фаз интерферирующих фронтов при наличии шумов на интерференционных картинах. Рассмотрен обобщенный алгоритм, позволяющий получать решение системы трансцендентных уравнений (2) при произвольных фазовых сдвигах.

Показана устойчивость метода при наличии шумов в серии измерений интенсивности интерференционных картин в одной точке, имеющих постоянную дисперсию и математическое ожидание. Приведена оценка среднеквадратичного отклонения полученной разности фаз интерферирующих фронтов, позволяющая оценивать достоверность результатов. Показано необходимое и достаточное условие для решения задачи предложенным методом. Оценена сложность алгоритма в зависимости от количества интерференционных картин с различными фазовыми сдвигами.

Проведен сравнительный анализ работы представленного в данной работе метода и обобщенного алгоритма расшифровки интерферограмм на основе векторного представления системы трансцендентных уравнений [10]. Результаты анализа продемонстрировали повышенную точность при работе с ограниченным набором интерферограмм и практическую ценность.

Благодарности

Автор благодарит д.т.н. В. Г. Меледина и Ю. А. Аникина за полезные обсуждения. Работа выполнялась при поддержке проекта РФФИ №04-01-00124.

Литература

1. Creath K. Phase-shifting speckle interferometry // *Appl. Opt.* 1985. – 24. – N 18. – P. 3053.
2. Меледин В.Г., Павлов В.А., Цвелодуб О.Ю., Яворский Н.И. Поверхностные волны в жидком диэлектрике. – Новосибирск: Изд-во Института теплофизики СО РАН, 2005. – 105 с.
3. Меледин В.Г., Павлов В.А., Цвелодуб О.Ю., Яворский Н.И. Поверхностные волны в жидком диэлектрике // *Доклады РАН*, 2005. – Т. 403. – N 6. – С. 764-767.
4. Двойнишников С.В., Аникин Ю.А., Главный В.Г., Меледин В.Г. Способ бесконтактного измерения линейных размеров трехмерных объектов. Заявка на патент РФ № 2006118624 от 14.06.2006.
5. Вишняков Г.Н., Левин Г.Г., Наумов А.А.: Измерение поверхности трехмерных объектов методом проекции интерференционных полос // *Оптика и спектроскопия*. 1998. – Т. 85. – №6. – С. 1015.
6. Сухоруков К.А.: Точность восстановления трехмерных поверхностей методом Фурье-синтеза // *Измерительная техника*, 2005. – №5. – С. 34-36.
7. Bruning J.H., Herriott D.R., Gallagher J.E., Rosenfeld D.P., White A.D., Brangaccio D.J. Digital wavefront measuring for testing optical surfaces and lenses // *Appl. Opt.* 1974. – 13. – P. 2693-2703.
8. Gruber M., Hausler G. Simple, robust and accurate phase-measuring triangulation // *Optik*. 1992. – № 3. – P. 118 – 122.
9. Surril Y. Design of algorithms for phase measurements by the use of phase stepping // *Appl. Opt.* 1996. – 35. – N 1. – P. 51.
10. Ильиных С.П., Гужов В.И. Обобщенный алгоритм расшифровки интерферограмм с пошаговым сдвигом // *Автоматрия*, 2002. – Т. 38. – №3. – С. 123-126.
11. Kottogoda N.T. *Stochastic Water Resources Technology* // Macmillan, New York, 1980.
12. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. – М.: Наука, 1986.

A STABLE DECODING METHOD FOR INTERFEROGRAMS WITH STEP-BY-STEP SHIFTING

S.V. Dvoinishnikov¹

¹ *Institute of Thermophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia*

Abstract

A new interferogram's decoding method that minimizes an estimate error in phase shifting of interfering fronts in noise environment at interference fringe patterns is proposed. A mathematical technique is considered to solve transcendental equations with step-by-step arbitrary shifting. A necessary and sufficient criterion is shown to solve this problem using the proposed method in accordance with the values of the induced phase shifts and their quantities. A comparative analysis of the proposed method and the interferogram's decoding algorithm is performed based on vector representation of a set of transcendental equations.

Keywords: interferogram's decoding method, transcendental equations, phase shifts

Citation: Dvoinishnikov SV. A stable decoding method for interferograms patterns with step-by-step shifting [In Russian]. *Computer Optics* 2007; 31(2): 21-25.

Acknowledgements: The author is deeply indebted to D.Eng.Sc. V.G. Meledin and Yu.A. Anikin for their fruitful discussions. The research was partly supported by the RFBR Project No. 04-01-00124.

References:

- [1] Creath K. Phase-shifting speckle interferometry. *Appl. Opt.* 1985; 24(18): 3053.
- [2] Meledin VG, Pavlov VA, Tselodub OYu, Yavorsky NI. Surface waves in liquid dielectric [In Russian]. Novosibirsk: Institute of Thermophysics SB RAS Publisher, 2005; 105 p.
- [3] Meledin VG, Pavlov VA, Tselodub OYu, Yavorsky NI. Surface waves in liquid dielectric [In Russian]. *Doklady Physics* 2005; 403(6): 764-767.
- [4] Dvoinishnikov SV, Anikin YuA, Glavnyi VG, Meledin VG. A noncontact measuring method for linear dimensions of three-dimensional objects. RF Patent Application No. 2006118624. Date: June 14, 2006.
- [5] Vishnyakov GN, Levin GG, Naumov AA. Measurement of the surface of three-dimensional objects by the method of projection of interference fringes [In Russian]. *Optics and Spectroscopy* 1998; 85(6): 1015.
- [6] Sukhorukov KA. Accuracy of 3D surface reconstruction by the Fourier synthesis method [In Russian]. *Measurement Techniques* 2005; 5: 34-36.
- [7] Bruning JH, Herriott DR, Gallagher JE, Rosenfeld DP, White AD, Brangaccio DJ. Digital wavefront measuring for testing optical surfaces and lenses. *Appl. Opt.* 1974; 13: 2693-2703.
- [8] Gruber M, Hausler G. Simple, robust and accurate phase-measuring triangulation. *Optik* 1992; 3: 118-122.
- [9] Surrel Y. Design of algorithms for phase measurements by the use of phase stepping. *Appl. Opt.* 1996; 35(1): 51.
- [10] Ilinykh SP, Guzhov VI. Generic interferogram's decoding algorithm with step-by-step shifting [In Russian]. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing* 2002; 38(3): 123-126.
- [11] Kottogoda NT. *Stochastic Water Resources Technology*. Macmillan, New York, 1980.
- [12] Lawson Ch, Hanson R. *Solving least squares problems* [in Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher, 1986.