

## ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА НА МНОГОУРОВНЕВОЙ (КВАНТОВАННОЙ) СПИРАЛЬНОЙ ФАЗОВОЙ ПЛАСТИНКЕ

А.А. Ковалев<sup>1,2</sup>, В.В. Котляр<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия,

<sup>2</sup>Самарский государственный аэрокосмический университет, Самара, Россия

### Аннотация

Получено аналитическое выражение в виде конечной суммы плоских волн, описывающее параксиальную скалярную дифракцию Фраунгофера ограниченной плоской волны на многоуровневой (квантованной) спиральной фазовой пластинке (СФП). Для нескольких номеров СФП численно получено минимальное количество секторов многоуровневой СФП, при котором среднеквадратичное отклонение картины дифракции Фраунгофера от картины дифракции для непрерывной СФП не превышает 2%.

### Введение

Спиральной фазовой пластинкой (СФП) называют оптический элемент, у которого фаза функции комплексного пропускания линейно зависит от угловой полярной координаты. Вихревым пучкам, формируемым таким оптическим элементом, в современных научных исследованиях уделяется большое внимание. Основные причины этого интереса заключаются в повышении точности изготовления оптических элементов, формирующих эти пучки, и в возможности решения с их помощью прикладных задач. Важнейшей из таких задач является манипуляция микрочастицами [1]. Кроме того, область применения оптических вихрей постоянно расширяется. В [2] предлагается их использовать для фотолитографии с разрешением  $\lambda/10$ ,  $\lambda$  – длина волны света. На основе СФП, помещенной в плоскость пространственного спектра  $4f$  – оптической системы ( $f$  – фокусное расстояние сферической линзы) в [3] предложен способ получения спиральных интерферограмм. С помощью спиральной интерферограммы легко различать выпуклые и вогнутые участки волнового фронта. СФП используется также в звездном коронографе [4], в котором свет от яркой звезды преобразуется в кольцо и диафрагмируется, а слабый свет от планет этой звезды проходит через диафрагму и регистрируется. В [5] СФП применяется для выполнения радиального преобразования Гильберта, с помощью которого можно подчеркивать контуры на оптических изображениях.

Существует множество способов изготовления СФП, например, путем многоступенчатого травления кремния [6] или с помощью абляции эксимерным лазером полиамидной подложки [7]. Микрорельеф формируемой СФП получается ступенчатым или квантованным.

Многоуровневые СФП исследовались в [8, 9]. В [8] теоретически посчитано, с какой эффективностью преобразует ступенчатая СФП Гауссов пучок в моду Лагерра-Гаусса  $(0, 1)$ , а также проведен эксперимент с 16-уровневой СФП, изготовленной по технологии фотолитографии.

В [9] теоретически найдены минимальные числа уровней фазы СФП (для номеров  $n < 8$ ), при кото-

рых конечно-уровневые СФП слабо отличаются от непрерывной СФП. С помощью конечно-уровневой СФП, реализованной на основе жидкокристаллической ячейки, в [9] сформированы вихревые лазерные пучки с номерами сингулярности до 6.

В [10, 11] рассматривается ахроматическая СФП, которая формирует почти одинаковые вихревые поля, если длина волны освещающего излучения меняется в достаточно широком диапазоне (140 нм). В этих работах [8-11] СФП анализируется с помощью разложения в ряд по угловым гармоникам:

$$\exp\left[i \operatorname{mod}\left(\frac{P\varphi}{2\pi}\right) \frac{2\pi n}{P}\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \exp(im\varphi), \quad (1)$$

где  $\operatorname{mod}(\dots)$  – целое число,  $P$  – общее число уровней фазы СФП,  $\varphi$  – азимутальный угол полярной системы координат,  $n$  – номер СФП,  $C_m$  – комплексные коэффициенты,  $\exp(im\varphi)$  – угловые гармоники, описывающие пропускание непрерывной СФП с номером  $m$ .

В данной работе рассматривается конечно-уровневая СФП, ограниченная полиномиальной апертурой. Причем число уровней квантования фазы СФП равно числу сторон правильного многоугольника, ограничивающего апертуру СФП. В этом случае удалось получить аналитические выражения в виде конечной суммы плоских волн для комплексной амплитуды, описывающей дифракцию Фраунгофера плоской волны на конечно-уровневой СФП, ограниченной правильным многоугольником.

Заметим, что ранее уже рассматривалась возможность формирования вихревых полей с помощью неспиральных фазовых пластинок [12]. В нашем случае, в отличие от [12], при увеличении числа уровней квантования фазы (или числа сторон многоугольника), картина дифракции в дальней зоне стремится к картине дифракции, сформированной непрерывной СФП с круглой апертурой.

### 1. Уравнение полиномиальной апертуры

Пусть  $\Omega$  – многоугольник, заданный координатами своих вершин  $A_p(x_p, y_p)$ ,  $p = \overline{0, P-1}$ , где  $P$  – число вершин (рис. 1).

Пусть уравнение стороны многоугольника, соединяющей  $p$ -ю и  $(p+1)$ -ю вершины, имеет вид:

$$y = a_p x + b_p. \tag{2}$$

Пусть  $f(x, y)$  – функция двух переменных, определенная в  $R^2$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \exp[\pm i(x\xi + y\eta)] dx dy &= \sum_{p=1}^P \frac{a_p - a_{p-1}}{(\xi + \eta a_{p-1})(\xi + \eta a_p)} \exp[\pm i(\xi x_p + \eta y_p)] = \\ &= \sum_{p=1}^P \frac{(y_{p+1} - y_p)(x_p - x_{p-1}) - (y_p - y_{p-1})(x_{p+1} - x_p)}{[\xi(x_{p+1} - x_p) + \eta(y_{p+1} - y_p)][\xi(x_p - x_{p-1}) + \eta(y_p - y_{p-1})]} \exp[\pm i(\xi x_p + \eta y_p)], \end{aligned} \tag{4}$$

где под индексами  $p$  подразумеваются значения  $\text{mod}(p, P)$ , т. е.  $(x_p, y_p) = (x_0, y_0)$ ,  $(x_{-1}, y_{-1}) = (x_{P-1}, y_{P-1})$  и т. д.

Тогда комплексная амплитуда, описывающая дифракцию Фраунгофера на полиномиальной апертуре (рис. 1) плоской волны длиной  $\lambda$  при фокусном расстоянии сферической линзы, равном  $f$ , имеет вид:

$$E(\xi, \eta) = -\frac{if}{2\pi k} \sum_{p=1}^P \frac{(y_{p+1} - y_p)(x_p - x_{p-1}) - (y_p - y_{p-1})(x_{p+1} - x_p)}{[\xi(x_{p+1} - x_p) + \eta(y_{p+1} - y_p)][\xi(x_p - x_{p-1}) + \eta(y_p - y_{p-1})]} \exp\left[\pm i \frac{k}{f} (\xi x_p + \eta y_p)\right], \tag{5}$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число.

**2. Дифракция Фраунгофера плоской волны на ДОО с формой правильного многоугольника и кусочно-постоянным микрорельефом**

Рассмотрим дифракционный оптический элемент, имеющий форму правильного многоугольника  $\Omega = A_0 A_1 \dots A_{P-1}$ , вписанного в окружность радиуса  $R$  и содержащего начало координат  $O$ . Тогда  $\Omega = \bigcup_{p=0}^{P-1} \Omega_p$ , где  $\Omega_p$  – треугольники  $OA_p A_{p+1}$ , а каждая вершина  $A_p$  имеет координаты (рис. 2)

$$\begin{cases} x_p = R \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P}\right), \\ y_p = R \sin\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P}\right), \\ \varphi_p = \frac{2\pi}{P} p. \end{cases} \tag{6}$$

Пусть внутри каждого треугольника  $\Omega_p$  глубина микрорельефа имеет постоянное значение, тогда внутри  $\Omega_p$  и функция комплексного пропускания ДОО будет постоянна:

$$\tau(x, y) = \exp(i\Psi_p). \tag{7}$$

Пользуясь уравнением для полиномиальной апертуры, можно получить выражение для комплексной амплитуды, описывающей дифракцию Фраунгофера плоской волны длиной  $\lambda$  на таком ДОО (рис. 2):

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Известно, что преобразование Фурье от такой функции  $f(x, y)$  вычисляется с помощью уравнения полиномиальной апертуры [13]:

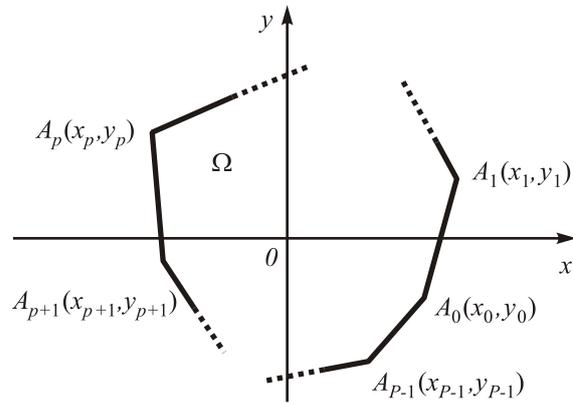


Рис. 1. ДОО с многоугольной апертурой

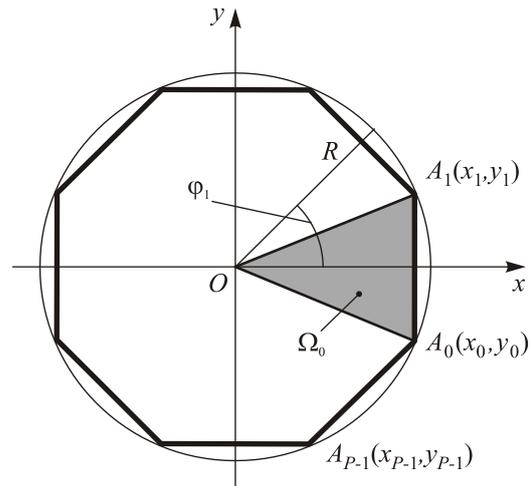


Рис. 2. ДОО с апертурой в виде правильного многоугольника

$$\begin{aligned}
 E(\xi, \eta) = & \frac{if}{2\pi k} R^2 \sin\left(\frac{2\pi}{P}\right) \sum_{p=0}^{P-1} \frac{\exp(i\Psi_p)}{(\xi x_{p+1} + \eta y_{p+1})(\xi x_p + \eta y_p)} - \\
 & - \frac{if}{2\pi k} R^2 \sin\left(\frac{2\pi}{P}\right) \sum_{p=0}^{P-1} \frac{\exp(i\Psi_p) \exp\left[-i\frac{k}{f}(\xi x_p + \eta y_p)\right]}{\left[\xi(x_{p+1} - x_p) + \eta(y_{p+1} - y_p)\right](\xi x_p + \eta y_p)} + \\
 & + \frac{if}{2\pi k} R^2 \sin\left(\frac{2\pi}{P}\right) \sum_{p=0}^{P-1} \frac{\exp(i\Psi_p) \exp\left[-i\frac{k}{f}(\xi x_{p+1} + \eta y_{p+1})\right]}{\left[\xi(x_{p+1} - x_p) + \eta(y_{p+1} - y_p)\right]}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

При переходе к полярным координатам вместо (8) получается следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 E(\rho, \theta) = & \frac{if}{2\pi k \rho^2} \sin\left(\frac{2\pi}{P}\right) \sum_{p=0}^{P-1} \frac{\exp(i\Psi_p)}{\cos\left(\varphi_p + \frac{\pi}{P} - \theta\right) \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} + \\
 & + \frac{if}{2\pi k \rho^2} \cos\frac{\pi}{P} \sum_{p=0}^{P-1} \left[ \frac{\exp(i\Psi_p)}{\sin(\varphi_p - \theta)} - \frac{\exp(i\Psi_{p-1})}{\sin(\varphi_{p-1} - \theta)} \right] \frac{\exp\left[-i\frac{kR\rho}{f} \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)\right]}{\cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

В случае СФП, т. е.  $\Psi_p = n\varphi_p$ , из (9) получим:

$$\begin{aligned}
 E_n^p(\rho, \theta) = & \frac{if}{2\pi k \rho^2} \sin\left(\frac{2\pi}{P}\right) \times \\
 & \times \sum_{p=0}^{P-1} \frac{\exp(in\varphi_p)}{\cos\left(\varphi_p + \frac{\pi}{P} - \theta\right) \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)} + \\
 & + \frac{if}{2\pi k \rho^2} \cos\frac{\pi}{P} \times \\
 & \times \sum_{p=0}^{P-1} \left[ \frac{\exp(in\varphi_p)}{\sin(\varphi_p - \theta)} - \frac{\exp(in\varphi_{p-1})}{\sin(\varphi_{p-1} - \theta)} \right] \times \\
 & \times \frac{\exp\left[-i\frac{kR\rho}{f} \cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)\right]}{\cos\left(\varphi_p - \frac{\pi}{P} - \theta\right)}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

### 3. Численное моделирование

На рис. 3 показана картина дифракции Фраунгофера плоской волны на непрерывной СФП, ограниченной круглой диафрагмой, полученная по формуле конечных сумм функций Бесселя [14]:

$$\begin{aligned}
 E_n(\rho, \theta) = & \frac{(-i)^{n+1} k \exp(in\theta)}{f \bar{\rho}^2} \times \\
 & \left\{ n \left[ 1 - J_0(y) - 2 \sum_{m=1}^{(n-2)/2} J_{2m}(y) \right] - y J_{n-1}(y), n = 2m, \right. \\
 & \left. n \left[ \int_0^y J_0(t) dt - 2 \sum_{m=1}^{(n-1)/2} J_{2m-1}(y) \right] - y J_{n-1}(y), n = 2m + 1, \right.
 \end{aligned} \tag{11}$$

где  $y = R\bar{\rho} = kR\rho/f$ ,  $J_n(x)$  – функция Бесселя  $n$ -го порядка,

$$\begin{aligned}
 \int_0^y J_0(t) dt = \\
 = \frac{y}{2} \{ \pi J_1(y) H_0(y) + J_0(y) [2 - \pi H_1(y)] \},
 \end{aligned} \tag{12}$$

$H_{0,1}(y)$  – функции Струве нулевого и первого порядков.

При расчете использовались следующие значения параметров: длина волны – 633 нм, фокусное расстояние сферической линзы – 150 мм, радиус апертуры – 2 мм, порядок СФП 6.

На рис. 4 показаны картины дифракции Фраунгофера плоской волны на квантованной ограниченной СФП, полученные по формуле (10).

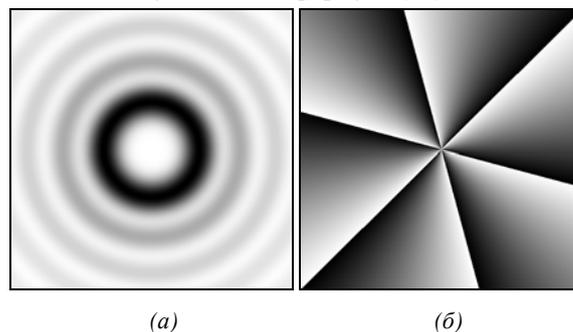


Рис. 3. Картина дифракции Фраунгофера плоской волны на непрерывной ограниченной СФП: амплитуда (а) и фаза (б)

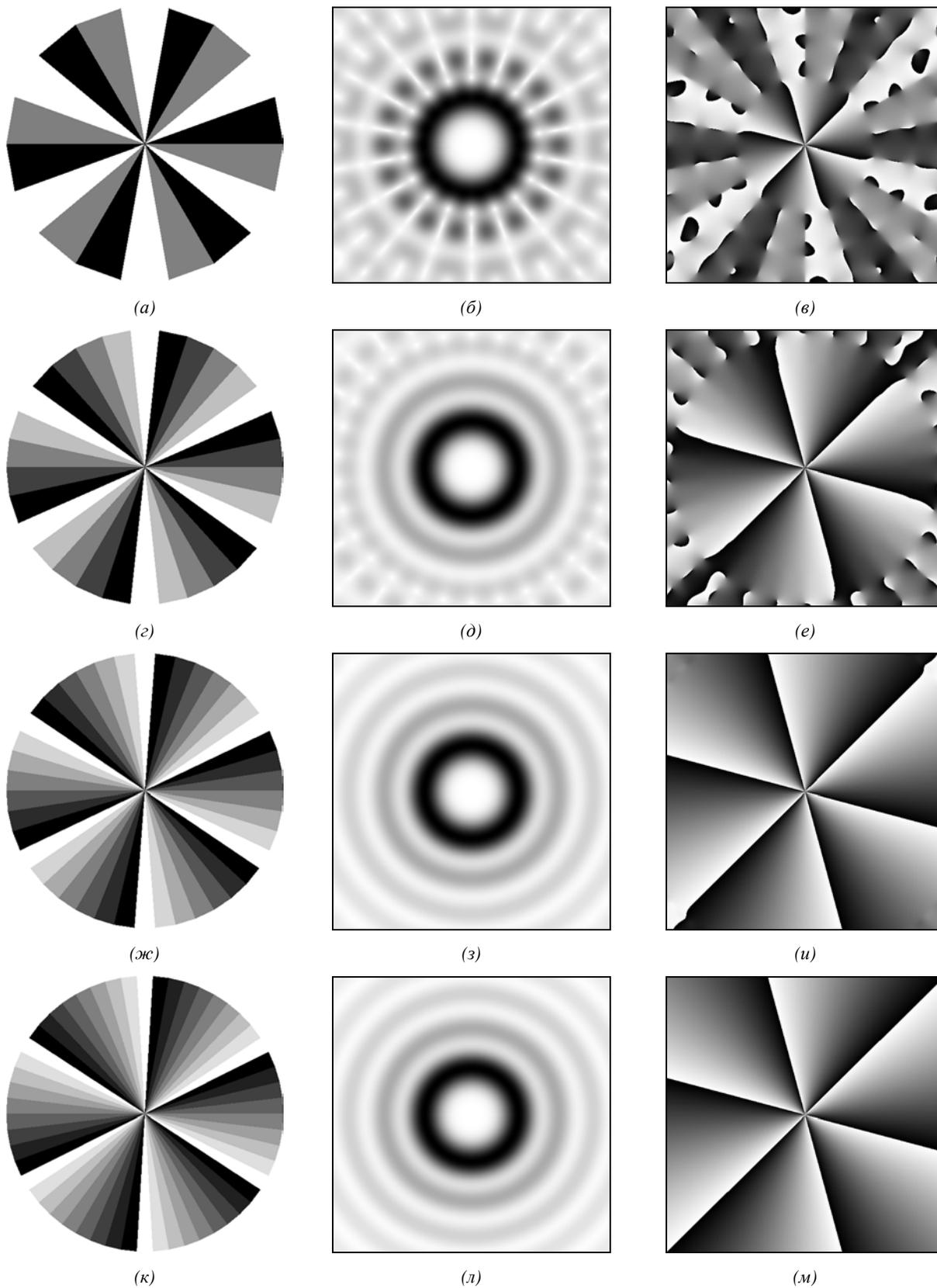


Рис. 4. Картины дифракции Фраунгофера плоской волны на квантованной ограниченной СФП: фаза ДОЭ (а, г, ж, к), амплитуда (б, д, з, л) и фаза (в, е, и, м) в зоне дифракции Фраунгофера. Число секторов: 18 (а-в), 30 (г-е), 42 (ж-и), 54 (к-м)

В таблице 1 показана зависимость среднеквадратичного отклонения картины дифракции Фраунгофера плоской волны на ограниченной квантованной спиральной фазовой пластинке от картины дифракции на ограниченной непрерывной СФП при меняющемся количестве секторов.

Таблица 1

Число секторов	СКО
18	19,1411
30	1,9003
42	0,1320
54	0,0479

В таблице 2 для нескольких номеров СФП показано минимальное количество секторов многоуровневой СФП, при котором среднеквадратичное отклонение картины дифракции Фраунгофера от картины дифракции для непрерывной СФП не превышает 2%.

Таблица 2

Номер СФП	Минимальное число секторов
2	19
4	25
6	29
8	35
10	39

### Заключение

В работе были получены аналитические выражения, описывающие параксиальную скалярную дифракцию Фраунгофера плоской волны на многоуровневой (квантованной) СФП, ограниченной апертурой в виде правильного многоугольника. Для нескольких номеров СФП численно получено минимальное количество секторов многоуровневой СФП, при котором среднеквадратичное отклонение картины дифракции Фраунгофера от картины дифракции для непрерывной СФП не превышает 2%.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке российско-американской программы «Фундаментальные ис-

следования и высшее образование» (грант CRDF RUX0-014-Sa-06), а также грантов РФФИ 05-08-50298 и 07-07-97600.

### Литература

1. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Skidanov R.V., Soifer V.A., Jefimovs K., Simonen J., Turunen J. Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements // J. Mod. Opt., 2004. - Vol. 51. - No.14. - P. 2167-2184.
2. Menon R., Smith H.I. Absorbance-modulation optical lithography // J. Opt. Soc. Am. A, 2006. - V. 23. -N 9. - Pp. 2290-2294.
3. Jesacher, S. Fühapter, S. Bernet, M. Ritsch-Marte, "Spiral interferogram analysis", J. Opt. Soc. Am. A, 2006. - V.23. - N.6. - Pp.1400-1409.
4. Palacios D.M., Hunyadi S.L. Low-order aberration sensitivity of an optical vortex coronagraph // Opt. Lett., 2006. - V. 31. N.20. - Pp.2981-2983.
5. Guo C., Han Y., Xu J., Ding J. Radial Hilbert transform with Laguerre-Gaussian spatial filters // Opt. Lett., 2006. - V.31. - N.10. - Pp.1394-1396.
6. Oron R., Davidson N., Friesem A.A., Hasman E. Efficient formation of pure helical laser beams // Opt. Commun., 2000. - V.182. - P.205-208.
7. Peele A.G., McMahon P.J., Paterson D., Tran C.Q., Mancuso A.P., Nugent K.A., Hayes J.P., Harvey E., Lai B., McNulty I. Observation of an x-ray vortex // Opt. Lett. 2002. - 27. - 1752-1754
8. Sueda K., Miyaji G., Miyanaga N., Nakatsuka M. Laguerre-Gaussian beam generated with a multilevel spiral phase plate for high intensity laser pulses // Opt. Express, 2004. - V.12. - No.15. - P. 3548-3553.
9. Wang Q., Sun X.W., Shum P., Yin X.J. Dynamic switching of optical vortices with dynamic gamma-correction liquid crystal spiral phase plate // Opt. Express, 2005. - V.13. - No.25. - P. 10285-10291.
10. G.A. Swartzlander, Jr., "Broadband nulling of a vortex phase mask", Opt. Lett. 2005. - V.30. - No.21. - P. 2876-2878.
11. Swartzlander G.A., Jr. Achromatic optical vortex lens Opt. Lett. 2006. - V.31. - No.13. - P. 2042-2044.
12. Kim G.-H., Jeon J.-H., Ko K.-H., Moon H.-J., Lee J.-H., Chang J.-S. Optical vortices produced with a nonspiral phase plate // Appl. Opt. 1997. - V. 36. - No. 33. - P. 8614-8621.
13. Saga N. New line integral expressions for Fraunhofer diffraction, Optics Communications, 1987. - V. 64. - No.1. - P. 4-8.
14. Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Skidanov R.V., Moiseev O.Y., Soifer V.A. Diffraction of a finite-radius plane wave and a Gaussian beam by a helical axicon and a spiral phase plate // J. Opt. Soc. Am. A. 2007. - V. 24. - 1955-1964.

# FRAUNHOFER DIFFRACTION ON THE MULTILEVEL (QUANTIZED) SPIRAL PHASE PLATE

A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>, V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Image Processing Systems Institute of the RAS, Samara, Russia,

<sup>2</sup>Samara State Aerospace University (SSAU), Samara, Russia

## Abstract:

We obtain an analytical expression in the form of a finite sum of plane waves that describes the paraxial scalar Fraunhofer diffraction of a limited plane wave by a multilevel (quantized) spiral phase plate (SPP). For several numbers of SPP, we numerically obtain the minimal number of sectors of the multilevel SPP whereby the root-mean-square deviation between the Fraunhofer diffraction patterns for multilevel and continuous SPP does not exceed 2%.

**Keywords:** multilevel spiral phase plate, Fraunhofer diffraction, plane wave

**Citation:** Kovalev AA, Kotlyar VV. Fraunhofer diffraction on the multilevel (quantized) spiral phase plate [In Russian]. Computer Optics 2007; 31(3): 9-13.

**Acknowledgements:** The work was partly supported by the Russian-American Basic Research and Higher Education Program (grant CRDF RUX0-014-Sa-06) and by the RFBR grants Nos. 05-08- 50298 and 07-07-97600.

## References:

- [1] Khonina SN, Kotlyar VV, Skidanov RV, Soifer VA, Jefimovs K, Simonen J, Turunen J. Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements. J. Mod. Opt. 2004; 51(14): 2167-2184.
- [2] Menon R, Smith HI. Absorbance-modulation optical lithography. J. Opt. Soc. Am. A 2006; 23(9): 2290-2294.
- [3] Jesacher S, Fühapter S, Bernet M, Ritsch Marte. Spiral interferogram analysis. J. Opt. Soc. Am. A 2006; 23(6): 1400-1409.
- [4] Palacios DM, Hunyadi SL. Low-order aberration sensitivity of an optical vortex coronagraph. Opt. Lett. 2006; 31(20): 2981-2983.
- [5] Guo C, Han Y, Xu J, Ding J. Radial Hilbert transform with Laguerre-Gaussian spatial filters. Opt. Lett. 2006; 31(10): 1394-1396.
- [6] Oron R, Davidson N, Friesem AA, Hasman E. Efficient formation of pure helical laser beams. Opt. Commun. 2000; 182: 205-208.
- [7] Peele AG, McMahon PJ, Paterson D, Tran CQ, Mancuso AP, Nugent KA, Hayes JP, Harvey E, Lai B, McNulty I. Observation of an X-ray vortex. Opt. Lett. 2002; 27: 1752-1754.
- [8] Sueda K, Miyaji G, Miyayama N, Nakatsuka M. Laguerre-Gaussian beam generated with a multilevel spiral phase plate for high intensity laser pulses. Opt. Express 2004; 12(15): 3548-3553.
- [9] Wang Q, Sun XW, Shum P, Yin XJ. Dynamic switching of optical vortices with dynamic gamma-correction liquid crystal spiral phase plate. Opt. Express 2005; 13(25): 10285-10291.
- [10] Swartzlander GA Jr. Broadband nulling of a vortex phase mask. Opt. Lett. 2005; 30(21): 2876- 2878.
- [11] Swartzlander GA Jr. Achromatic optical vortex lens. Opt. Lett. 2006; 31(13): 2042-2044.
- [12] Kim G-H, Jeon J-H, Ko K-H, Moon H-J, Lee J-H, Chang J-S. Optical vortices produced with a nonspiral phase plate. Appl. Opt. 1997; 36(33): 8614-8621.
- [13] Saga N. New line integral expressions for Fraunhofer diffraction. Optics Communications 1987; 64(1): 4-8.
- [14] Kotlyar VV, Kovalev AA, Skidanov RV, Moiseev OY, Soifer VA. Diffraction of a finite-radius plane wave and a Gaussian beam by a helical axicon and a spiral phase plate. J. Opt. Soc. Am. A 2007; 24: 1955-1964.