БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ИНТЕГРАЛОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В.А. Кудинкин[1,2,3], Ю.Л. Ратис[1,2,3]
[1]Консорциум «Интегра-С», Самара, Россия,
[2]Самарский государственный аэрокосмический университет, Самара, Россия,
[3]Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия

Аннотация

В работе проведен сравнительный анализ вычислительной эффективности алгоритмов вычисления интегралов специального вида, необходимых для обработки сигналов, поступающих от оптикоэлектронных датчиков перемещений.

Введение

В работах [1, 2] было показано, что проблема нахождения функции отклика оптикоэлектронного датчика с учетом дифракционных поправок сводится к задаче вычисления интегралов специального вида $A_s(p,q)$ и $A_c(p,q)$.

$$A_s(p,q) \equiv \int_0^1 \frac{dt}{t} \sin(pt^2)\cos(qt), \tag{1}$$

$$A_c(p,q) \equiv \int_0^1 \frac{dt}{t} \cos(pt^2)\sin(qt). \tag{2}$$

Как показал последующий анализ, интегралы (1), (2) в общем случае не могут быть представлены в виде комбинации конечного числа элементарных и/или специальных функций. С формальной точки зрения численные значения интегралов специального вида $A_s(p,q)$ и $A_c(p,q)$ могут быть найдены на основе общеизвестных квадратурных формул. Однако фактически, вычисление этих интегралов по квадратурным формулам Симпсона, Гаусса и т. п. оправдано только при небольших значениях аргументов p и q.

В тех случаях, когда выполняются условия $p \gg 1$ и/или $q \gg 1$, подынтегральные выражения в формулах (1), (2) становятся быстроосциллирующими, и использование квадратурных формул для вычисления величин $A_s(p,q)$ и $A_c(p,q)$ становится некорректным, т. к. погрешность вычисления быстро растет с увеличением p и/или q.

В конечном счете, задача корректного расчета величин $A_s(p,q)$ и $A_c(p,q)$ численными методами сводится к необходимости избавиться от сложения большого числа знакопеременных слагаемых, имеющих одинаковый порядок величины. С точки зрения теории аналитических функций, общий подход к преодолению указанной проблемы основан на использовании идеи метода перевала [3]. Однако технически эта идея может быть реализована несколькими способами. А для использования датчиковой аппаратуры в реальном масштабе времени необходимы быстрые и устойчивые алгоритмы обработки сигналов, т. е., функции отклика.

В настоящей работе проделано сопоставление вычислительной эффективности различных алгоритмов расчета интегралов (1), (2) с целью выявления наиболее быстрого и устойчивого из них.

Хорошо известно, что абсолютное большинство «физических» функций (а интегралы (1) и (2) относятся к таковым) при малых значениях аргумента вычисляются посредством разложения в степенной ряд, при больших значениях аргумента – в асимптотический ряд, а при промежуточных значениях аргумента наиболее эффективны различные аппроксимации. Поэтому каждая комбинация параметров p и q требует отдельного рассмотрения. В соответствии с этим, описание алгоритмов вычисления аналитических функций двух аргументов $A_s(p,q)$ и $A_c(p,q)$ при различном соотношении величин p и q выделено в отдельные параграфы.

1. Случай $p \ll 1$ и $q \ll 1$

В соответствии с общей идеологией численных методов в этом случае алгоритм расчета интегралов специального вида строится на основе степенных рядов.

Очевидно, что подынтегральные выражения в формулах (1) и (2) имеют хорошие аналитические свойства, и в соответствии с этим величина $A_s(p,q)$ может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} A_s(p,q) &\equiv \int_0^1 \frac{dt}{t}\sin(pt^2)\cos(qt) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 \sin(pt^2) t^{2n-1} dt. \end{aligned} \tag{3}$$

Произведем замену переменных $x = t^2$. В результате приходим к выражению:

$$\begin{aligned} A_s(p,q) &= \frac{1}{2}\mathrm{Si}(p) + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 \sin(px) x^{n-1} dx, \end{aligned} \tag{4}$$

где $Si(z)$ – интегральный синус, а интеграл в формуле (4) является табличным

$$\int_0^1 \sin(px) x^{n-1} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k p^{2k+1}}{(n+2k+1)(2k+1)!}. \tag{5}$$

Из (3) и (5) следует, что интеграл $A_s(p,q)$ может быть представлен в виде двойного степенного ряда:

$$\begin{aligned}&A_s(p,q)=\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{2n}}{(2n)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k p^{2k+1}}{(n+2k+1)(2k+1)!}=\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Si}(p)+\\&+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{2n}}{(2n)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k p^{2k+1}}{(n+2k+1)(2k+1)!}.\end{aligned}\tag{6}$$

Совершенно аналогично вычисляется интеграл $A_c(p,q)$:

$$\begin{aligned}&A_c(p,q)=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k p^{2k}}{(4k+2n+1)(2k)!}=\\&=q\sqrt{\frac{\pi}{2p}}\cdot \mathrm{C}\left(\sqrt{\frac{2p}{\pi}}\right)+\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{2n+1}}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k p^{2k}}{(4k+2n+1)(2k)!}.\end{aligned}\tag{7}$$

В формулах (6) и (7) в явном виде выделены главные (нулевые) члены разложения, для которых имеются стандартные алгоритмы расчета.

Очевидно, что и внешний и внутренний ряды в формулах (6) и (7) имеют мажоранты, и, следовательно, являются сходящимися. Скорость сходимости этих рядов не хуже, чем у мажорирующих рядов, определяющих тригонометрические функции $\sin(x)$ и $\cos(x)$. Однако необходимость суммирования внутреннего ряда для расчетов коэффициентов при каждом члена внешнего ряда существенно замедляет процесс вычисления.

2. Случай $p\sim 5$ *и* $q\sim 5$

В случае умеренных значений аргументов ($p,q\sim 5$) степенные ряды (6) и (7) сходятся существенно медленнее, чем при $p\ll 1, q\ll 1$. Поэтому для указанного диапазона аргументов вычисление интегралов (1) и (2) производилось двумя способами 1) разложением в степенной ряд; 2) по квадратурным формулам. Прямым расчетом установлено, что при $p,q\sim 5$ наиболее эффективной является процедура вычисления интегралов $A_s(p,q)$ и $A_c(p,q)$ по квадратурным формулам Гаусса по $20\times k$ точкам, где $k=\max\{[p],[q]\}$. Относительная погрешность вычислений ε при этом не превосходит $\varepsilon<10^{-5}$, что вполне приемлемо для практических расчетов. Контроль вычислений с помощью квадратурной формулы Симпсона по 500 точкам подтвердил этот вывод.

3. Случай умеренных $p\le 5$ *и произвольных* $q\ge 5$

В соответствии изложенной выше общей идеологией построение эффективного алгоритма расчета интегралов (1) и (2) сводится к задаче их представления в виде быстро сходящихся рядов. Воспользуемся для этого методами теории аналитических функций и рассмотрим первый из анализируемых интегралов.

Представим выражение для интеграла $A_s(p,q)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}&A_s(p,q)\equiv \mathrm{Re}\left[\int_0^1\frac{dt}{t}\sin(pt^2)\exp(iqt)\right]=\\&=\mathrm{Re}\left[\sum_{n=0}^{\infty}i^n(2n+1)\,j_n(q)\varphi_n(p)\right].\end{aligned}\tag{8}$$

При переходе от (1) к (3) мы воспользовались соотношениями [4]:

$$\cos(yt)=\mathrm{Re}\big(\exp(iyt)\big).\tag{9}$$

и

$$\exp(iyt)=\sum_{n=0}^{\infty}i^n(2n+1)\,j_n(y)P_n(t).\tag{10}$$

Из (8) легко видеть, что

$$A_s(p,q)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4n+1)\,j_{2n}(q)\varphi_{2n}(p),\tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}&\varphi_{2n}(p)\equiv\int_0^1\frac{dt}{t}\sin(pt^2)P_{2n}(t)=\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k p^{2k+1}}{(2k+1)!}\int_0^1 dt\cdot t^{4k+1}\cdot P_{2n}(t).\end{aligned}\tag{12}$$

Содержащийся в формуле (12) интеграл является табличным [4, 5]

$$\begin{aligned}&\int_0^1 dt\cdot t^{4k+1}\cdot P_{2n}(t)=\\&=\frac{(-1)^n\Gamma(n-2k-1/2)\Gamma(2k+1)}{2\Gamma(-2k-1/2)\Gamma(n+2k+2)},\end{aligned}\tag{13}$$

откуда вытекает окончательное выражение для коэффициентов разложения (12):

$$\varphi_{2n}(p)=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k p^{2k+1}}{2k+1}\cdot\frac{(4k+1)_n}{(n+2k+1)!},\tag{14}$$

где $(a)_n$ – символ Похгаммера (см. Приложение).

Совершенно аналогично вычисляется интеграл $A_c(p,q)$:

$$A_c(p,q)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4n+3)\cdot j_{2n+1}(q)\cdot\varphi_{2n+1}(p),\tag{15}$$

где

$$\varphi_{2n+1}(p) \equiv \int_0^1 \frac{dt}{t}\cos(pt^2)\cdot P_{2n+1}(t) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k p^{2k}}{(2k)!}\int_0^1 dt\cdot t^{4k-1}\cdot P_{2n+1}(t). \qquad (16)$$

Коэффициент $\varphi_{2n+1}(p)$ также выражается через табличный интеграл [4, 5]:

$$\int_0^1 dt\cdot t^{4k-1}\cdot P_{2n+1}(t) = \frac{(2k-1)_n}{2(2k+1/2)_{n+1}}. \qquad (17)$$

Таким образом, окончательное выражение для коэффициентов $\varphi_{2n+1}(p)$ имеет вид:

$$\varphi_{2n+1}(p) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k p^{2k}}{(2k)!}\frac{(2k-1)_n}{(2k+1/2)_{n+1}}. \qquad (18)$$

Соотношения (11), (14), (15) и (18) полностью решают задачу вычисления интегралов (1), (2) в случае умеренных значений аргумента $p \le 5$ при произвольных значениях аргумента q. В дополнение к сказанному отметим, что ряды (11) и (15) сходятся быстро, а сферические функции Бесселя вычисляются с помощью вычислительно эффективного и устойчивого алгоритма, построенного и исследованного в работах [6, 7, 8].

4. Случай умеренных $q \le 5$ *и произвольных* $p \ge 5$

Описанный в предыдущем разделе алгоритм представляется весьма изящным, однако ряды (11) и (15) имеют достаточно сложную структуру коэффициентов разложения и содержат специальные функции математической физики (сферические функции Бесселя). Все вышесказанное ориентирует на поиск гибридных алгоритмов, в рамках которых изначально выделены «главные члены» разложения интегралов специального вида $A_s(p,q)$ и $A_c(p,q)$ по той или иной комбинации параметров.

Из соотношения (4) следует, что

$$A_s(p,q) = \frac{1}{2}\mathrm{Si}(p) + \\ +\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{2n}}{(2n)!}\mathrm{Im}\int_0^1 \exp(ipx)x^{n-1}dx. \qquad (19)$$

Выражение (19) удобно представить в виде:

$$A_s(p,q) = \frac{1}{2}\mathrm{Si}(p) + \\ +\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{2n}}{(2n)!}\mathrm{Im}\frac{\partial^{n-1}}{\partial(ip)^{n-1}}\int_0^1 \exp(ipx)dx, \qquad (20)$$

Откуда немедленно следует, что

$$A_s(p,q) = \frac{1}{2}\mathrm{Si}(p) - \frac{q^2}{2}\times \\ \times\mathrm{Im}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{2n}}{(2n+2)!}\frac{\partial^n}{\partial(ip)^n}\left[\frac{\exp(ip)-1}{ip}\right]\right\}. \qquad (21)$$

Производная n- го порядка в (21) вычисляется элементарно:

$$\frac{\partial^n}{\partial(ip)^n}\left[\frac{\exp(ip)-1}{ip}\right] = \\ = \frac{\partial^n}{\partial(ip)^n}\left[\exp(ip)\cdot(ip)^{-1}\right] - \frac{\partial^n(ip)^{-1}}{\partial(ip)^n}, \qquad (22)$$

откуда следует, что:

$$\frac{\partial^n}{\partial(ip)^n}\left[\frac{\exp(ip)-1}{ip}\right] = \\ = \exp(ip)\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\partial^r(ip)^{-1}}{\partial(ip)^r} - \frac{\partial^n(ip)^{-1}}{\partial(ip)^n} \qquad (23)$$

и, таким образом:

$$\frac{\partial^n}{\partial(ip)^n}\left[\frac{\exp(ip)-1}{ip}\right] = (-1)^n n!(ip)^{-(n+1)}\times \\ \times\left[\exp(ip)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(ip)^k}{k!} - 1\right]. \qquad (24)$$

Конечная сумма, фигурирующая в квадратных скобках в формуле (24) есть не что иное, как частичная сумма ряда Тейлора для экспоненты (см. Приложение):

$$\frac{\partial^n}{\partial(ip)^n}\left[\frac{\exp(ip)-1}{ip}\right] = \\ = (-1)^n n!(ip)^{-(n+1)}\left[\exp(ip)\cdot e_n(-ip) - 1\right]. \qquad (25)$$

Учитывая это обстоятельство, преобразуем выражение для $A_s(p,q)$ к следующему виду:

$$A_s(p,q) = \frac{1}{2}\cdot\left\{\mathrm{Si}(p) + \frac{q^2\cos p}{2p} + \right. \\ +\mathrm{Im}\left[S(p,q) - \exp(ip)\times\right. \\ \left.\left.\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!q^{2n+2}(ip)^{-(n+1)}}{(2n+2)!}\cdot e_n(-ip)\right]\right\}, \qquad (26)$$

где

$$S(p,q) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!q^{2n+2}(ip)^{-(n+1)}}{(2n+2)!}. \qquad (27)$$

Для того чтобы выразить мнимую часть степенного ряда в формуле (27)

$$S_{\mathrm{Im}}(p,q) = \mathrm{Im}\{S(p,q)\}, \qquad (28)$$

через специальные функции математической физики, поступим следующим образом. Перепишем (28) в виде:

$$S_{\mathrm{Im}}(p,q) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!(-1)^k}{(4k+2)!} \left(\frac{q}{p^{1/2}} \right)^{4k+2}. \qquad (29)$$

Введем переменную $z = q \cdot p^{-1/2}$ и исследуем свойства функции:

$$S_{\mathrm{Im}}(1,z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!(-1)^k}{(4k+2)!} z^{4k+2}. \qquad (30)$$

Из (30) видно, что

$$\frac{dS_{\mathrm{Im}}(1,z)}{dz} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!(-1)^k}{(4k+1)!} z^{4k+1} = = -\sqrt{\pi} U_{1/2}\left(\frac{z^2}{2}, 0 \right), \qquad (31)$$

где $U_\nu(z,\xi)$ – функция Ломмеля двух переменных (см. Приложение). Таким образом, получаем:

$$S_{\mathrm{Im}}(1,z) = -z\sqrt{\pi} \times \times \lim_{\xi\to 0} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k+2} \left(\frac{z^2}{2\xi} \right)^{2k+1/2} J_{2k+1/2}(\xi) \right]. \qquad (32)$$

Существует и другой способ нахождения функции $S(p,q)$. Для того чтобы просуммировать исследуемый ряд (27), воспользуемся соотношением:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!} x^{2k} = 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} x \exp\left(\frac{x^2}{4} \right) \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2} \right) \qquad (33)$$

и проинтегрируем его в пределах от 0 до z. В результате, мы приходим к соотношению:

$$\int_0^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!} x^{2k} dx = = \int_0^z \left[1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} x \exp\left(\frac{x^2}{4} \right) \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2} \right) \right] \cdot dx, \qquad (34)$$

из которого вытекает, что:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\pi} \exp\left(\frac{x^2}{4} \right) \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2} \right), \qquad (35)$$

и, таким образом:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k+2)!} z^{2k+2} = \sqrt{\pi} \int_0^z dx \exp\left(\frac{x^2}{4} \right) \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2} \right). \qquad (36)$$

Выражение (36) можно также представить, как

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k+2)!} z^{2k+2} = = \pi \cdot \mathrm{erfi}(z/2) \cdot \mathrm{erf}(z/2) - 4 \int_0^{z/2} dy \cdot F(y), \qquad (37)$$

где $F(z)$ – интеграл Досона (см. Приложение).

Вычислим интеграл $A_c(p,q)$ для исследуемого случая умеренных $q \le 5$ и произвольных $p \ge 5$. С учетом проделанных выше вычислений легко показать, что:

$$A_c(p,q) = = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{q^2}{ip} \right)^{n+1/2} \gamma(n+1/2, ip) \right]. \qquad (38)$$

Воспользуемся известным свойством гамма-функций:

$$(2n+1)! = \Gamma(2(n+1)) = = (2\pi)^{-1/2} 2^{2n+3/2} \Gamma(n+1)\Gamma(n+3/2). \qquad (39)$$

Отсюда следует, что

$$A_c(p,q) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \times \times \mathrm{Re} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \gamma(n+1/2, ip)}{n!\Gamma(n+3/2)} \left(\frac{q^2}{4ip} \right)^{n+1/2} \right]. \qquad (40)$$

Из теории гамма-функций известно также, что

$$\frac{\gamma(n+1/2, z^2)}{\Gamma(n+1/2)} = erf(z) - - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2) \sum_{k=1}^{n} \frac{H_{2k-1}(z)}{(n-k)!(2k)!}. \qquad (41)$$

Принимая во внимание соотношение (41), мы приходим к выражению:

$$A_c(p,q) = = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \mathrm{Re} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1/2)} \left(\frac{q^2}{4ip} \right)^{n+1/2} \times \left(\mathrm{erf}(z) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{H_{2k-1}(z)}{(n-k)!(2k)!} \right) \right]_{z^2=ip}. \qquad (42)$$

Соотношение (42) допускает существенное упрощение. Для этого представим его в следующем виде:

$$A_c(p,q) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \mathrm{Re}\left[\Sigma_1(p,q) \mathrm{erf}(\sqrt{ip}) \right] - - \frac{1}{\pi} \mathrm{Re}\left[\Sigma_2(p,q) e^{-ip} \right], \qquad (43)$$

где через Σ_1 обозначена следующая сумма (см. [5]):

$$\Sigma_1(p,q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1/2)} \left(\frac{q^2}{4ip} \right)^{n+1/2} = = \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{q^2}{4ip} \right). \qquad (44)$$

Вторая сумма, обозначенная через Σ_2, входящая в формулу (43):

$$\Sigma_2(p,q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+1/2)}\left(\frac{q^2}{4ip}\right)^{n+1/2}\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{n}\frac{H_{2k-1}(\sqrt{ip})}{(n-k)!(2k)!},\qquad(45)$$

вычисляется несколько сложнее.

Хорошо известно, что гамма-функция целого отрицательного аргумента обращается в бесконечность. Учитывая это обстоятельство, преобразуем (45):

$$\Sigma_2(p,q)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+1/2)}\left(\frac{q^2}{4ip}\right)^{n+1/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_{2k-1}(\sqrt{ip})}{(n-k)!(2k)!}.\qquad(46)$$

В результате указанного преобразования мы можем изменить порядок суммирования по индексам k и n:

$$\Sigma_2(p,q)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_{2k-1}(\sqrt{ip})}{(2k)!}\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n-k)!(n+1/2)}\left(\frac{q^2}{4ip}\right)^{n+1/2}.\qquad(47)$$

Из (47) вытекает, что

$$\Sigma_2(p,q)=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k H_{2k-1}(\sqrt{ip})}{(2k)!}\left(\frac{q^2}{4ip}\right)^{k+1/2}\times\qquad(48)$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+k)!(m+k+1/2)}\left(\frac{q^2}{4ip}\right)^{m}.$$

Внутренняя сумма в формуле (48) выражается через интеграл от функции Бесселя. В результате получается выражение для Σ_2:

$$\Sigma_2(p,q)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k H_{2k-1}(\sqrt{ip})}{2^k(2k)!}\cdot\int_0^{\frac{q}{\sqrt{ip}}}t^k J_k(t)dt.\qquad(49)$$

В заключение отметим, что сумма Σ_2 может быть представлена в виде:

$$\Sigma_2(p,q)=$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(k+1/2)H_{2k-1}(\sqrt{ip})}{(2k)!}\times\qquad(50)$$
$$\times\left\{z\left[J_k(z)\mathcal{H}_{k-1}(z)-J_{k-1}(z)\mathcal{H}_k(z)\right]\right\}_{z=\frac{q}{\sqrt{ip}}},$$

где $\mathcal{H}_k(z)$ – функция Струве.

Полученные соотношения позволяют вычислять искомые интегралы со степенью точности, достаточной для практических расчетов в системах, работающих в реальном времени.

5. Случай больших значений аргументов $q\gg p\gg 1$

В случае очень больших значений обоих аргументов $q\gg p\gg 1$ оценка исследуемых интегралов становится тривиальной. При этом наибольший интерес представляет случай экстремально больших ($p>50$) значений аргумента p, поскольку описанный выше алгоритм для случая умеренных $p\le 5$ и произвольных $q\ge 5$ на практике пригоден вплоть до значений аргумента $p\sim 50$.

В рассматриваемом случае $q\gg p\gg 1$ зависимость величины интеграла от верхнего предела интегрирования становится несущественной. Другими словами, мы можем распространить пределы интегрирования в (1) и (2) до бесконечности. Тогда, согласно [5], искомые интегралы вычисляются точно. Согласно [5] интеграл $A_s(p,q)$ равен

$$A_s(p,q)\approx$$
$$\approx\frac{\pi}{2}\left\{\left[\frac{1}{2}+C\left(\frac{q^2}{4p}\right)\right]^2+\left[\frac{1}{2}+S\left(\frac{q^2}{4p}\right)\right]^2\right\}.\qquad(51)$$

В рассматриваемом приближении интеграл $A_c(p,q)$ также сводится к табличному:

$$A_c(p,q)\approx\frac{\pi}{2}\mathrm{Re}\left[\mathrm{erf}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{q}{2\sqrt{p}}\right)\right].\qquad(52)$$

Аналитические свойства интеграла ошибок позволяют свести выражение (52) к линейной комбинации интегралов Френеля:

$$erf\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{q}{2\sqrt{p}}\right)=$$
$$=C\left(\frac{q}{\sqrt{2\pi p}}\right)+S\left(\frac{q}{\sqrt{2\pi p}}\right)+\qquad(53)$$
$$+i\left[C\left(\frac{q}{\sqrt{2\pi p}}\right)-S\left(\frac{q}{\sqrt{2\pi p}}\right)\right],$$

Откуда немедленно получается окончательное выражение для интеграла $A_c(p,q)$ в приближении $q\gg p\gg 1$:

$$A_c(p,q)=\frac{\pi}{2}\cdot\left[C\left(\frac{q}{\sqrt{2\pi p}}\right)+S\left(\frac{q}{\sqrt{2\pi p}}\right)\right],\qquad(54)$$

пригодное для вычислений в реальном масштабе времени.

6. Случай больших значений аргументов $p\gg q\gg 1$

Если для аргументов p и q выполняется соотношение $p\gg q\gg 1$, то интегралы $A_s(p,q)$ и

$A_c(p,q)$ можно вычислить методом перевала. Покажем, что это действительно так. Для этого заметим, что

$$A_s(p,q)= \\ =\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_0^1 dt\left[e^{i(pt^2+qt)-\ln t}+e^{i(pt^2-qt)-\ln t}\right]. \tag{55}$$

В соответствии с основной идеей метода перевала, разложим показатели экспонент в формуле (55) в ряд Тейлора в окрестности t_0:

$$i(pt^2\pm qt)-\ln t\approx i(pt_0^2\pm qt_0)- \\ -\ln t_0+\frac{1}{2}\left(2ip+\frac{1}{t_0^2}\right)(t-t_0)^2. \tag{56}$$

Стационарная точка t_0 удовлетворяет уравнению

$$i(2pt_0\pm q)-\frac{1}{t_0}=0, \tag{57}$$

имеющему очевидное решение

$$t_0(\pm q)=\mp\frac{q}{4p}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{4p}\right)^2-\frac{i}{2p}}, \tag{58}$$

которое мы будем записывать как

$$t_0(\pm q)=\mp\frac{q}{4p}\pm\sqrt{\rho}\exp(i\varphi/2), \tag{59}$$

где

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{\left(\frac{q}{4p}\right)^4+\left(\frac{1}{2p}\right)^2}, \\ \varphi=-\arctan\left(\frac{8p}{q^2}\right).\end{cases} \tag{60}$$

В рамках поставленной задачи выполняются условия $p>0$ и $q>0$. В этом случае стационарная точка t_0 расположена далеко от исходного контура интегрирования $t\in[0,1]$, проходящего по вещественной оси. Поэтому первое слагаемое в формуле (55) с «перевальной» степенью точности не дает вклада в величину $A_s(p,q)$, а интеграл от второго слагаемого вычисляется элементарно.

$$\int_0^1 dt\,e^{\left(i(pt^2-qt)-\ln t\right)}\approx \\ \approx\frac{\sqrt{2\pi}}{t_0}e^{i(pt_0^2-qt_0)}\left[-\left(2ip+\frac{1}{t_0^2}\right)\right]^{-1/2}. \tag{61}$$

По аналогичной причине из двух корней уравнения (58) в «перевальном» выражении для искомой величины $A_s(p,q)$ следует удержать лишь тот, для которого выполняется условие $\operatorname{Re}(t_0)>0$. Тогда в рамках метода перевала мы приходим к следующему выражению

$$A_s(p,q)\approx\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_0^1 dt\exp\left(i(pt^2-qt)-\ln t\right)\approx \\ \approx\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Im}\left\{\frac{e^{i\left[pt_0^2(-q)-qt_0(-q)\right]}}{t_0(-q)}\left[-\left(2ip+t_0^{-2}(-q)\right)\right]^{-1/2}\right\}, \tag{62}$$

и в результате очевидных преобразований мы получаем

$$A_s(p,q)= \\ =\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Re}\left\{\frac{\exp\left[i\left(pt_0^2(-q)-qt_0(-q)\right)\right]}{\sqrt{2ipt_0^2(-q)+1}}\right\}. \tag{63}$$

При извлечении корня из (-1) при переходе от формулы (62) к формуле (63) лист римановой поверхности (знак + или −) выбирается из условия, что в рассматриваемом случае $p\gg q\gg 1$ стационарная точка $t_0\approx 0$, и, следовательно, $A_s(p,q)>0$.

Учитывая, что согласно (58) $qt_0=2pt_0^2+i$, приведем выражение (63) к виду

$$A_s(p,q)=\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot e\cdot\operatorname{Re}\left\{\frac{\exp\left(-ipt_0^2(-q)\right)}{\sqrt{2ipt_0^2(-q)+1}}\right\}, \tag{64}$$

откуда получается окончательная формула для вычисления интеграла $A_s(p,q)$ методом перевала

$$A_s(p,q)=\pm\sqrt{\frac{\pi}{2\rho_1}}\cdot e\cdot\operatorname{Re}\left\{e^{-ipt_0^2(-q)-i\varphi_1/2}\right\}, \tag{65}$$

где

$$pt_0^2(-q)=p\left(\frac{q}{4p}+\sqrt{\rho}\exp(i\varphi/2)\right)^2= \\ =\frac{q^2}{16p}+\frac{q}{2}\sqrt{\rho}\exp(i\varphi/2)+\rho\exp(i\varphi), \tag{66}$$

а модуль и фаза подкоренного выражения в знаменателе формулы (64) определяются соотношением

$$\rho_1\exp(i\varphi_1)\equiv 2ipt_0^2(-q)+1. \tag{67}$$

Перейдем к рассмотрению интеграла $A_c(p,q)$ в приближении перевала:

$$A_c(p,q)=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_0^1 dt\left[e^{i(pt^2+qt)}-e^{i(pt^2-qt)}\right]t^{-1}. \tag{68}$$

Легко видеть, что в этом приближении выполняется соотношение

$$A_c(p,q)\approx -A_s(p,q). \tag{69}$$

Другими словами, в рассматриваемом случае интеграл $A_s(p,q)$ набирается на первой осцилляции, в то время как интеграл $A_c(p,q)$ набирается на второй осцилляции.

7. Случай больших значений аргументов $p \approx q \gg 1$

В случае, когда параметры p и q велики и соизмеримы, метод перевала может внести в расчеты заметную погрешность, поскольку при $p \approx q$ стационарная точка расположена достаточно к нижнему пределу интегрирования. Для того чтобы построить искомый алгоритм, представим интеграл $A_s(p,q)$ в виде:

$$A_s(p,q)=\frac{1}{2}\int_0^p \frac{dx}{x}\sin(x)\cos(q\sqrt{x/p}). \qquad (70)$$

Разложим в ряд Тейлора косинус, стоящий под знаком интеграла

$$A_s(p,q)=\frac{1}{2}\int_0^p \frac{dx}{x}\sin(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{q^2 x}{p}\right)^n. \qquad (71)$$

В результате мы приходим к очевидному соотношению

$$\begin{aligned}A_s(p,q)&=\frac{1}{2}\mathrm{Si}(p)-\\&-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}\left(\frac{q^2}{p}\right)^{n+1}\int_0^p x^n\sin x dx.\end{aligned} \qquad (72)$$

Интеграл, фигурирующий в формуле (72), вычисляется элементарно. В итоге мы приходим к следующему выражению

$$\begin{aligned}A_s(p,q)&=\frac{1}{2}\mathrm{Si}(p)+\\&+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}\left(\frac{q^2}{p}\right)^{n+1}\sum_{k=0}^{n}k!\binom{n}{k}\times\\&\times\left[p^{n-k}\cos\left(p+k\pi/2\right)-\delta_{kn}n!\cos\left(n\pi/2\right)\right].\end{aligned} \qquad (73)$$

В результате достаточно громоздких, но несложных преобразований мы приходим к следующему выражению для $A_s(p,q)$:

$$\begin{aligned}A_s(p,q)&=\frac{1}{2}\mathrm{Si}(p)+\\&+\frac{\cos p}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{(2n+2)!}\left(\frac{q^2}{p}\right)^{n+1}c_{[n/2]}(p)-\\&-\frac{\sin p}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{(2n+2)!}\left(\frac{q^2}{p}\right)^{n+1}s_{[(n-1)/2]}(p)-\\&-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{(4n+2)!}\left(\frac{q^2}{p}\right)^{2n+1},\end{aligned} \qquad (74)$$

где $[a]$ - целая часть числа a, а $s_n(z)$ ($c_n(z)$) — частичная сумма ряда Тейлора для синуса (косинуса). Полученное выражение весьма похоже на соотношение (26). Однако, в отличие от формулы (26), оно содержит только функции вещественного аргумента.

Перейдем к рассмотрению интеграла $A_c(p,q)$. Проделаем выкладки, полностью аналогичные, тем, что были выполнены для интеграла $A_s(p,q)$. Для этого преобразуем выражение (2) к виду

$$A_c(p,q)=\frac{1}{2}\int_0^p \frac{dx}{x}\cos(x)\sin(q\sqrt{x/p}). \qquad (75)$$

Разложим подынтегральное выражение в ряд Тейлора. В результате получаем:

$$\begin{aligned}&A_c(p,q)=\\&=\frac{1}{2}\int_0^p \frac{dx}{x}\cos(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(q\sqrt{\frac{x}{p}}\right)^{2n+1}.\end{aligned} \qquad (76)$$

Поскольку под интегралом стоят аналитические функции, операции суммирования и интегрирования коммутируют. Следовательно

$$\begin{aligned}&A_c(p,q)=\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{q^2}{p}\right)^{n+1/2}\int_0^p x^{n-1/2}\cos(x)dx.\end{aligned} \qquad (77)$$

Интеграл в формуле (77) удобно выразить через неполную гамма-функцию:

$$\begin{aligned}&\int_0^p x^{n-1/2}\cos(x)dx=\\&=\mathrm{Re}\, i^{n+1/2}\gamma(n+1/2,-ip).\end{aligned} \qquad (78)$$

Тогда

$$\begin{aligned}A_c(p,q)&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{q^2}{p}\right)^{n+1/2}\times\\&\times\mathrm{Re}\left[i^{n+1/2}\gamma(n+1/2,-ip)\right].\end{aligned} \qquad (79)$$

Воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned}&\gamma(n+1/2,-ip)=\\&=\Gamma(n+1/2)-\Gamma(n+1/2,-ip),\end{aligned} \qquad (80)$$

а также тем, что для неполной гамма-функции имеет место асимптотическое разложение:

$$\begin{aligned}&\Gamma(n+1/2,-ip)\propto\\&\propto(-ip)^{n-1/2}\exp(ip)\left[1+i\frac{n-1/2}{p}+\ldots\right].\end{aligned} \qquad (81)$$

Следовательно, для случая $p \gg 1$ получаем

$$\begin{aligned}A_c(p,q)&\approx\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{q^2}{p}\right)^{n+1/2}\cdot\\&\cdot\mathrm{Re}\left[\left(e^{i\frac{\pi}{2}(n+1/2)}\Gamma(n+1/2)-ip^{n-1/2}\,\mathrm{e}^{ip}\left[1+\ldots\right]\right)\right],\end{aligned} \qquad (82)$$

откуда получается выражение, удобное для проведения численных расчетов

$$A_c(p,q) \approx \frac{\sin p \sin q}{2p} + \\ + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n+1/2)}{(2n+1)!} \left(\frac{q^2}{p} \right)^{n+1/2} \times \\ \times \left[\cos\left(\frac{\pi n}{2} \right) - \sin\left(\frac{\pi n}{2} \right) \right]. \quad (83)$$

Заключение

Резюмируем вышесказанное следующим образом.

Поскольку численные значения величин $A_s(p,q)$ и $A_c(p,q)$ вне задачи нахождения функции отклика оптикоэлектронного датчика не имеют самостоятельной ценности, постольку в работе исследовалась только скорость сходимости и точность различных методов расчета указанных интегралов.

1. В работе построены простые аналитические выражения для расчета интегралов специального вида.
2. Проведен численный анализ полученных аналитических выражений.
3. Показано, что использование идеологии метода перевала позволяет существенно повысить вычислительную эффективность алгоритмов, необходимых для обработки сигналов, поступающих с оптикоэлектронной датчиковой аппаратуры.
4. Показано, что нелинейная оптическая функция отклика, исследованная в работах [1,2], может быть рассчитана в реальном времени на основе гибридного алгоритма, сочетающего в себе все перечисленные в данной работе подходы, каждый из которых оптимален в определенной области значений аргументов p и q.

Представляется перспективным использование разработанного набора алгоритмов для решения задачи синтеза оптикоэлектронных датчиков перемещений с контролируемой нелинейностью оптической функции отклика.

Приложение

<u>*Определения и обозначения, используемые в работе*</u>

В настоящей работе используются следующие стандартные определения, обозначения и соотношения, подробно описанные в справочниках [4, 5]:

$H_n(x) = = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2)$ ‑ полином Эрмита

$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n$ – полином Лежандра

$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \exp(-t) t^{z-1} dt$ – гамма-функция

$(z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}$ – символ Похгаммера

$\gamma(a,z) = \int_0^{z} \exp(-t) t^{a-1} dt$ – неполная гамма-функция

$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z} \exp(-t^2) dt$ – интеграл вероятностей

$\frac{d}{dz} i^n \mathrm{erfc}(z) = -i^{n-1} \mathrm{erfc}(z)$ – кратный интеграл вероятностей, причем по определению

$i^{-1}\mathrm{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2)$,

$i^0 \mathrm{erfc}(z) = \mathrm{erfc}(z) = 1 - erf(z)$

$\mathrm{erfi}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z} \exp(t^2) dt$ – интеграл вероятностей мнимого аргумента .

$F(y) = \exp(-y^2) \int_0^{y} \exp(t^2) dt$ – интеграл Досона.

$C(z) = \int_0^{z} \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) dt$ – интеграл Френеля.

$S(z) = \int_0^{z} \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) dt$ – интеграл Френеля.

$U_\nu(z,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z}{\xi} \right)^{\nu+2k} J_{\nu+2k}(\xi)$ – функция Ломмеля двух аргументов.

$e_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(z)^k}{k!}$ – частичная сумма ряда Тейлора для экспоненты ($\lim_{n\to\infty} e_n(x) = \exp(x)$).

$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ – частичная сумма ряда Тейлора для синуса ($\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sin x$).

$c_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ – частичная сумма ряда Тейлора для косинуса ($\lim_{n\to\infty} c_n(x) = \cos x$).

Литература

1. Ратис Ю.Л., Леонович Г.И. Дифракция светового потока на чувствительных элементах электронно-оптических и оптикоэлектронных датчиков механических перемещений // Компьютерная оптика. – Самара. 1996. - № 16. - С. 74-77.
2. Ратис Ю.Л., Леонович Г.И., Курушина С.Е., Мельников А.Ю. Нелинейные дифракционные искажения оптической функции отклика в кодирующих сопряжениях оптикоэлектронных датчиков // Компьютерная оптика, - Самара-Москва, 1998. - Т.18. - С. 61-71.

3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1987. - 688 с.
4. Абрамовитц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям, Москва, Наука, 1979, 832 с.
5. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И., Интегралы и ряды, Элементарные функции. - М.: Наука, 1981. - 800 с.
6. Ratis Yu.L., de Cordoba P.F. A code to calculate (high order) Bessel functions based on the continued fractions method. Computer physics communications, **76** (1993) 381.
7. Ratis Yu.L., Segura J., de Cordoba P.F., A code to evaluate Modified Bessel function based on the continued fractions method, Computer Physics Communications, 1997. V. 105. - P. 263-272.
8. Ratis Yu.L., Bastardo J.L., Abraham Ibrahim S., de Cordoba P.F., Urchueguia J.F.S., Evaluation of Fresnel integrals based on the continued fractions method, Applied Mathematics Letters, 2005. - № 18. - P. 23-28/

FAST ALGORITHM FOR COMPUTING INTEGRALS OF SPECIAL FORM

V.A. Kudelkin[1,2,3], Yu.L. Ratis[1,2,3]

[1]Integra-S Consortium, Samara, Russia,

[2]Samara State Aerospace University (SSAU), Samara, Russia,

[3]Image Processing Systems Institute of the RAS, Samara, Russia

Abstract

A comparative analysis of the computational efficiency of algorithms for computing integrals of special form necessary for processing signals that arrive from optoelectronic sensors of displacement has been performed in this paper.

Keywords: computational efficiency, integrals of special form, optoelectronic sensor.

Citation: Kudelkin VA, Ratis YuL. Fast algorithm for computing integrals of special form [In Russian]. Computer Optics 2007; 31(3): 32-39.

References:

[1] Ratis YuL, Leonovich GI. Ratis YuL, Leonovich GI. Light flux diffraction on transducers of optical voltage and optoelectronic sensors of mechanical displacement [In Russian]. Computer Optics 1996; 16: 74-77.

[2] Ratis YuL, Leonovich GI, Kurushina SE, Melnikov AYu. Nonlinear diffraction distortions of the optical response function in coding interfaces of optoelectronic sensors [In Russian]. Computer Optics 1998; 18: 61-71.

[3] Lavrentiev MA, Shabat BV. Methods of the complex variable theory [In Russian]. Moscow: “Nauka” Publisher, 1987; 688 p.

[4] Abramovitz M, Stegun IA. Handbook of Mathematical Functions [In Russian]. Moscow: “Nauka” Publisher, 1979; 832 p.

[5] Prudnikov AP, Brychkov YuA, Marichev OI. Integrals and Series. Special Functions [In Russian]. Moscow: “Nauka” Publisher, 1981; 800 p.

[6] Ratis YuL, de Cordoba PF. A code to calculate (high order) Bessel functions based on the continued fractions method. Computer physics communications 1993; 76: 381.

[7] Ratis YuL, Segura J, de Cordoba PF. A code to evaluate Modified Bessel function based on the continued fractions method. Computer Physics Communications 1997; 105: 263-272.

[8] Ratis YuL, Bastardo JL, Abraham Ibrahim S, de Cordoba PF, Urchueguia JFS. Evaluation of Fresnel integrals based on the continued fractions method. Applied Mathematics Letters, 2005; 18: 23-28.