

## ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ СПЕКТР (ДИФРАКЦИОННОЕ ГАЛО) ФУРЬЕ-СПЕКТЛОГРАММЫ РАССЕИВАЮЩЕГО ОБЪЕКТА

Б.Б. Горбатенко<sup>1</sup>, А.А. Гребенюк<sup>2</sup>, Л.А. Максимова<sup>3</sup>, В.П. Рябухо<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Саратовский технический университет,

<sup>2</sup> Саратовский государственный университет,

<sup>3</sup> Институт проблем точной механики и управления РАН

### Аннотация

Представлена феноменологическая теория пространственного спектра (дифракционного гало) фурье-спеклограммы рассеивающего объекта. Показано, что распределение средней интенсивности поля в дифракционном гало определяется функцией автокорреляции распределения средней интенсивности по поверхности объекта, включая влияние формы апертуры объекта. Результаты натуральных экспериментов и численного моделирования подтверждают справедливость предложенной теории формирования дифракционного гало.

Ключевые слова: спекл-структура, дифракция, дифракционное гало, фурье-спеклограмма, пространственный спектр, автокорреляция.

### 1. Введение

Пространственное распределение интенсивности оптического поля объекта в дальней зоне дифракции несет лишь частичную информацию об изображении объекта, поскольку в распределении интенсивности утрачивается информация о фазе поля. Поэтому дифракционное преобразование реальной (аналоговой) либо цифровой фурье-спеклограммы не приводит к восстановлению изображения объекта, а позволяет только наблюдать некоторое дифракционное гало, которое, тем не менее, как показывает эксперимент, содержит определенную информацию об изображении объекта – о его форме и распределении освещенности на его поверхности.

Статистические характеристики и пространственное распределение средней интенсивности поля в таком гало представляет интерес не только с точки зрения восстановления информации об изображении объекта по зарегистрированной интенсивности рассеянного им поля. В двухэкспозиционной спекл-фотографии сдвига регулярные интерференционные полосы наблюдают в поле дифракции лазерного пучка на двухэкспозиционной спеклограмме – полосы модулируют дифракционное гало [1-4]. Локализация интерференционных полос в этом случае ограничивается областью дифракционного гало, что определяет, в частности, порог чувствительности метода спекл-фотографии [5,6]. Подобного рода ограничения присущи также и методам голографической интерферометрии, в которых полосы модулируют изображение объекта.

Исследованию пространственных спектров спекл-картин и аналоговых спеклограмм с этой точки зрения было уделено значительное внимание [7-13]. В этих работах рассматривались в основном спеклограммы сфокусированного изображения, которые получают при регистрации спекл-модулированных изображений рассеивающих объектов в методе двухэкспозиционной спекл-фотографии. Для методов спекл-интерферометрии с регистрацией спекл-структуры в дифракционном поле, в частности, с регистрацией в фурье-

плоскости, такому анализу уделено существенно меньшее внимание.

Более того, с развитием цифровых методов и средств в когерентной оптике и, в частности, в голографии [14,15] важное значение стали приобретать информационные свойства спеклограмм дифракционного поля. В частности, разрабатываемые в последнее время методы реконструкции изображения по пространственному распределению интенсивности дальнего дифракционного спекл-модулированного поля [16-20] тесно связаны с этой проблемой записи и восстановления информации об объектном поле.

Целью настоящей работы является теоретическое и экспериментальное исследование закономерностей формирования дифракционного гало, получаемого при численном дифракционном преобразовании цифровой либо при натурном дифракционном преобразовании аналоговой фурье-спеклограммы.

### 2. Оптические схемы записи цифровых фурье-спеклограмм

Оптические схемы записи линзовой и безлинзовой цифровых фурье-спеклограмм представлены на рис. 1. В безлинзовой схеме записи для более точного выполнения условия дальнего поля дифракции и выполнения фурье-преобразования объектного поля необходимо использовать квазисферическую освещающую волну, сходящуюся в плоскости регистрации (рис. 1б) [21,22]. В этих схемах записи цифровых фурье-спеклограмм предполагается использование цифровых фотокамер с открытой ПЗС-матрицей.

Для записи цифровых спеклограмм необходимо, чтобы регистрируемая спекл-структура уверенно разрешалась ПЗС-матрицей – размеры спеклов должны в несколько раз превышать размеры пикселей ПЗС-матрицы. При использовании линзовой схемы записи фурье-спеклограммы (рис. 1а) это достигается путем уменьшения размера объекта – источника спекл-модулированного поля, и использования линзы с достаточно большим фокусным расстоянием  $f$ . Для записи фурье-спеклограммы объекта, а не апертуры линзы, необходимо, чтобы разме-

ры объекта – его апертюра, были меньше апертюры линзы, используемой для фурье-преобразования. Наименьший поперечный размер спеклов в этом случае определяется соотношением [4]

$$\epsilon_{\perp} \approx \frac{\lambda f}{d_0}, \tag{1}$$

где  $d_0$  - наибольший размер апертюры объекта – источника спекл-поля.

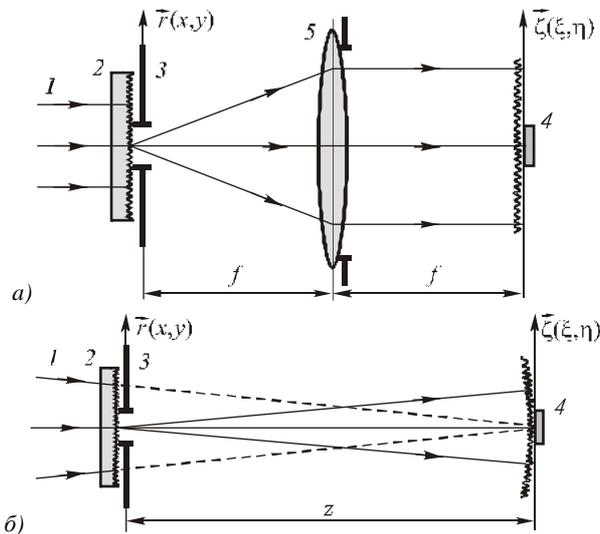


Рис.1. Схемы записи линзовой (а) и безлинзовой (б) фурье-спеклограмм рассеивающего объекта: 1 – освещающий лазерный пучок; 2 – рассеиватель; 3 – апертурная диафрагма (транспарант); 4 – ПЗС-матрица; 5 - линза

В экспериментах по записи безлинзовой фурье-спеклограммы (рис.1б) это достигается путем увеличения расстояния от рассеивающего объекта до плоскости регистрации и уменьшения размеров объекта. В этом случае размер спеклов определяется расстоянием  $z$  от объекта до плоскости регистрации

$$\epsilon_{\perp} \approx \frac{\lambda z}{d_0}. \tag{2}$$

При использовании фотокамер с несъемным объективом этот объектив можно применять в качестве фурье-преобразующей оптической системы (рис. 1а). Однако в силу малого, как правило, фокусного расстояния фотографических объективов, регистрируемый объект должен иметь достаточно малые размеры для формирования на ПЗС-матрице разрешаемых ею спеклов. Например, для объектива с  $f \approx 100$  мм размер объекта  $d_0$  должен быть, что следует из формулы (1),  $d_0 < \lambda f / \epsilon_{\perp} \approx 4$  мм при использовании лазерного излучения с  $\lambda \approx 0,63$  мкм и ПЗС-матрицы с 8 мкм размерами пикселей. В этом случае укладывается  $\approx 2$  пиксела на поперечном размере одного спекла и можно считать, что спекл-картина в достаточной степени разрешается этой ПЗС-матрицей.

Для регистрации фурье-спеклограмм с несъемным объективом возможно использование специ-

альной оптической схемы с собирающей линзой. На рис. 2 представлена схема записи такой фурье-спеклограммы. Фотоаппарат 6 сфокусирован на плоскость апертюры линзы, которая в этом случае оптически сопряжена с плоскостью ПЗС-матрицы фотоаппарата. Линза 5 собирает рассеянное лазерное излучение и перенаправляет его в объектив (изображение источника спекл-поля формируется в плоскости апертурной диафрагмы объектива). Изображение поперечного сечения спекл-структуры в плоскости линзы отображается на ПЗС-матрице. В качестве примера, цифровое изображение спекл-структуры, зарегистрированное с помощью схемы на рис. 2, представлено на рис. 3.

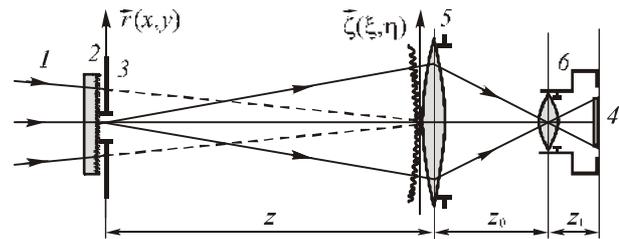


Рис. 2. Схема регистрации фурье-спеклограммы при использовании коллективной линзы с помощью цифрового фотоаппарата с несъемным объективом: 1 – лазерный пучок; 2 – рассеиватель; 3 – транспарант; 4 – продольный разрез спекл-структуры; 5 – линза; 6 – цифровой фотоаппарат с несъемным объективом

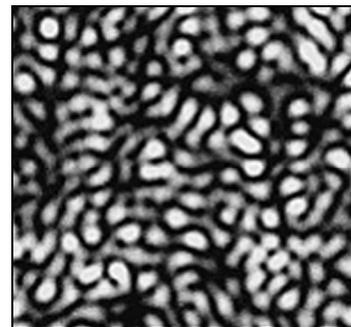


Рис.3. Цифровое изображение спекл-структуры, полученное в дальней области дифракции с использованием коллективной линзы (рис. 2)

Схемы, приведенные на рис.1 и 2, могут быть также использованы для отражающих объектов с рассеивающими поверхностями с нормально падающим или наклонным освещающим лазерным пучком.

### 3. Теория дифракционного гало

На этапе цифровой записи спеклограммы в дальнем поле дифракции объектного поля реализуется аналоговый процесс фурье-преобразования комплексной амплитуды поля в плоскости объекта (рис.1,2). Для распределения интенсивности в плоскости записи фурье-спеклограммы можно использовать следующее выражение [21,22]

$$I(\vec{\zeta}) \sim |U(\vec{\zeta})|^2 \sim |F_1 \{U_0(\vec{r})P(\vec{r})\}|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} U_0(\vec{r})P(\vec{r}) \exp(i2\pi\vec{\zeta} \vec{r}) d\vec{r} \right|^2, \tag{3}$$

где  $F_1\{\dots\}$  – символ фурье-преобразования, реализуемого в оптической системе;  $U_0(\vec{r})$  – комплексная амплитуда поля в плоскости объекта,  $P(\vec{r})$  – функция пропускания (или отражения) объекта; переменная  $\vec{\zeta}$  имеет смысл пространственной частоты объектного поля.

Если для записи спеклограммы используется линзовая схема записи, представленная на рис.1а, то в (1) предполагается, что поперечные размеры объекта меньше апертуры линзы и отсутствует ее влияние на распределение  $I(\vec{\zeta})$ .

Будем полагать, что реализуется линейный режим записи спеклограммы – цифровой образ пропорционален распределению интенсивности дифракционного поля  $I(\vec{\zeta})$ . Следовательно, на этапе численного фурье-преобразования цифровой спеклограммы вычисляется и визуализируется фурье-образ  $I(\vec{u})$  распределения интенсивности  $I(\vec{\zeta})$ . Этот образ по своей сути представляет собой пространственный спектр мощности спеклограммы, или, используя другое представление, дифракционное гало спеклограммы, формируемое в дальней области дифракции. Для определения  $I(\vec{u})$  можно воспользоваться выражением

$$I(\vec{u}) = \left| F_2 \left\{ H(\vec{\zeta}) I(\vec{\zeta}) \right\} \right|^2, \quad (4)$$

где  $F_2\{\dots\}$  – символ численного фурье-преобразования;  $\vec{u}$  имеет смысл пространственной координаты, поскольку  $\vec{\zeta}$  – пространственная частота;  $H(\vec{\zeta})$  – бинарная функция апертурного ограничения преобразуемой области спеклограммы. Функция  $H(\vec{\zeta})$  на практике может определять апертурную функцию ПЗС-матрицы, используемой для записи спеклограммы или часть числовой матрицы, определяющей фрагмент  $I(\vec{\zeta})$ , подвергаемый фурье-преобразованию. При использовании схемы записи спеклограммы, представленной на рис.4, в качестве функции  $H(\vec{\zeta})$  может рассматриваться апертура коллективной линзы 5, если изображение этой апертуры в плоскости ПЗС-матрицы меньше размеров матрицы.

Комплексная амплитуда объектного поля  $U_0(\vec{r})$  – случайная функция, поскольку рассматривается рассеивающий объект (рис.1,2). Поэтому регистрируемое распределение интенсивности  $I(\vec{\zeta})$  также является случайной функцией, которая, фактически, определяет спекл-картину в области регистрации. Функция  $I(\vec{u})$  как результат преобразования  $I(\vec{\zeta})$  также случайная; она определяет спекл-картину в области пространственного спектра спеклограммы (см. рис. 4).

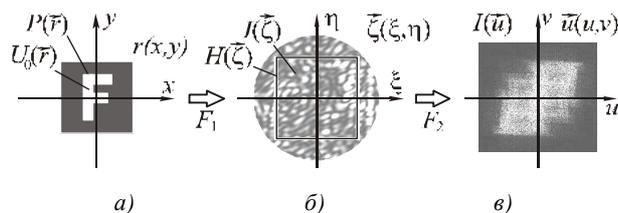


Рис. 4. Фурье-преобразования на этапе формирования и записи фурье-спеклограммы (а-б) и на этапе численной обработки цифровой спеклограммы (б-в):

а – пространство предмета;  
б – область пространственных частот объектного поля;  
в – область пространственного спектра спеклограммы с дифракционным гало

Для сглаживания этой высокочастотной спеклограммы в распределении  $I(\vec{u})$  и выделения детерминированной составляющей в этом распределении необходимо ввести усреднение по ансамблю реализаций комплексной амплитуды объектного поля  $U_0(\vec{r})$ . Используя эту операцию усреднения, для пространственного распределения среднего значения функции  $\langle I(\vec{u}) \rangle$  можно записать следующее выражение с использованием (3) и (4)

$$\begin{aligned} \langle I(\vec{u}) \rangle = & \int \int \int \int \int \int \langle U_0(\vec{r}_1) U_0^*(\vec{r}_2) U_0^*(\vec{r}_3) U_0(\vec{r}_4) \rangle \times \\ & \times P(\vec{r}_1) P(\vec{r}_2) P(\vec{r}_3) P(\vec{r}_4) H(\vec{\zeta}_1) H(\vec{\zeta}_2) \times \\ & \times \exp \left[ i 2 \pi (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \vec{\zeta}_1 \right] \exp \left[ -i 2 \pi (\vec{r}_3 - \vec{r}_4) \vec{\zeta}_2 \right] \times \\ & \times \exp \left[ i 2 \pi (\vec{\zeta}_1 - \vec{\zeta}_2) \vec{u} \right] d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r}_3 d\vec{r}_4 d\vec{\zeta}_1 d\vec{\zeta}_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где угловыми скобками  $\langle \dots \rangle$  обозначено статистическое усреднение.

В (5) статистическое усреднение отнесено только к произведению случайных функций  $U_0(\vec{r}_j)$ , поскольку остальные функции детерминированные. Для этого статистического момента четвертого порядка, полагая комплексную функцию  $U_0(\vec{r})$  гауссовой случайной функцией (для этого, как мы считаем, есть все основания), можем записать следующее выражение [23]

$$\begin{aligned} \langle U_0^*(\vec{r}_2) U_0(\vec{r}_3) U_0(\vec{r}_1) U_0(\vec{r}_4) \rangle = & \\ = \langle U_0^*(\vec{r}_2) U_0(\vec{r}_1) \rangle \langle U_0^*(\vec{r}_3) U_0(\vec{r}_4) \rangle + & \\ + \langle U_0^*(\vec{r}_2) U_0(\vec{r}_4) \rangle \langle U_0^*(\vec{r}_3) U_0(\vec{r}_1) \rangle = & \\ = I_0 \left( \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2} \right) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) I_0 \left( \frac{\vec{r}_3 + \vec{r}_4}{2} \right) \delta(\vec{r}_4 - \vec{r}_3) + & \\ + I_0 \left( \frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_4}{2} \right) \delta(\vec{r}_4 - \vec{r}_2) I_0 \left( \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_3}{2} \right) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_3), & \end{aligned} \quad (6)$$

где использовано предположение о  $\delta$ -коррелированном объектном поле  $U_0(\vec{r})$ , функция корреляции комплексной амплитуды которого может быть записана в виде [23]

$\langle U_0(\vec{r}_j)U_0^*(\vec{r}_k) \rangle = I_0((\vec{r}_j + \vec{r}_k)/2) \delta(\vec{r}_j - \vec{r}_k)$ ,  
 $I_0((\vec{r}_j + \vec{r}_k)/2) = \langle I((\vec{r}_j + \vec{r}_k)/2) \rangle$  – распределение средней интенсивности поля в плоскости объекта.

Используя (6) и фильтрующее действие  $\delta$ -функции, выражение (5) можно преобразовать к следующему виду

$$\begin{aligned} \langle I(\vec{u}) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_0(\vec{r}_1)P^2(\vec{r}_1)I_0(\vec{r}_4)P^2(\vec{r}_4)d\vec{r}_1d\vec{r}_4 \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\vec{\zeta}_1)H(\vec{\zeta}_2)\exp[i2\pi(\vec{\zeta}_1 - \vec{\zeta}_2)\vec{u}]d\vec{\zeta}_1d\vec{\zeta}_2 + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_0(\vec{r}_1)P^2(\vec{r}_1)I_0(\vec{r}_4)P^2(\vec{r}_4)H(\vec{\zeta}_1)H(\vec{\zeta}_2) \times \\ &\times \exp[i2\pi(\vec{r}_1 - \vec{r}_4)(\vec{\zeta}_1 - \vec{\zeta}_2)] \times \\ &\times \exp[i2\pi(\vec{\zeta}_1 - \vec{\zeta}_2)\vec{u}]d\vec{r}_1d\vec{r}_4d\vec{\zeta}_1d\vec{\zeta}_2 = \\ &= \Phi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H\left(\vec{\zeta} + \frac{\Delta\vec{\zeta}}{2}\right)H\left(\vec{\zeta} - \frac{\Delta\vec{\zeta}}{2}\right)d\vec{\zeta} \times \\ &\times \exp[i2\pi\Delta\vec{\zeta}\vec{u}]d\Delta\vec{\zeta} + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_0\left(\vec{r} + \frac{\Delta\vec{r}}{2}\right) \times \\ &\times P^2\left(\vec{r} + \frac{\Delta\vec{r}}{2}\right)I_0\left(\vec{r} - \frac{\Delta\vec{r}}{2}\right)P^2\left(\vec{r} - \frac{\Delta\vec{r}}{2}\right)d\vec{r} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} H\left(\vec{\zeta} + \frac{\Delta\vec{\zeta}}{2}\right)H\left(\vec{\zeta} - \frac{\Delta\vec{\zeta}}{2}\right)d\vec{\zeta} \times \\ &\times \exp[i2\pi(\Delta\vec{r} + \vec{u})\Delta\vec{\zeta}]d\Delta\vec{r}d\Delta\vec{\zeta}, \end{aligned} \quad (7)$$

где использованы стандартные преобразования координат  $\vec{r} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_4)/2$ ,  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_4$ ;  $\vec{\zeta} = (\vec{\zeta}_1 + \vec{\zeta}_2)/2$ ,

$\Delta\vec{\zeta} = \vec{\zeta}_1 - \vec{\zeta}_2$ ;  $\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} I_0(\vec{r})P^2(\vec{r})d\vec{r}$  – определяет

мощность оптического поля, прошедшего через амплитудный транспарант или отраженного рассеивающим объектом.

Первое слагаемое в (7) представляет собой фурье-образ функции автокорреляции  $H(\vec{\zeta})$  – апертурной функции в области цифровой спеклограммы. Эту функцию можно считать бинарной и прямоугольной в пространстве  $\vec{\zeta}(\xi, \eta)$ , принимающей значения 1 для области преобразования и 0 за ее пределами. Если протяженность этой функции существенно больше поперечных размеров спеклов в этой области, то ее фурье-образ в области  $\vec{u}(u, v)$  имеет, соответственно, малую протяженность – он сосредоточен в начале координат  $\vec{u}(u, v)$  и определяет центральное дифракционное пятно, присутствующее на всех изображениях, приведенных на рис. 5. Следовательно, первое слагаемое в (7) фактически не влияет на пространственное распределение интенсивности в области  $\vec{u}(u, v)$ .

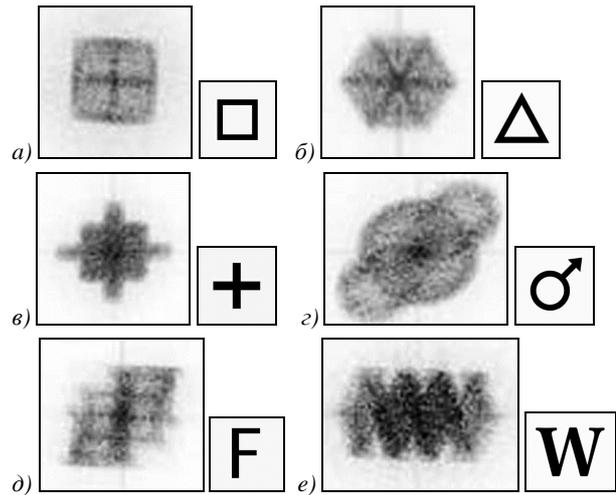


Рис. 5. Автокорреляционные дифракционные гало, получаемые при численном фурье-преобразовании цифровых фурье-спеклограмм объектов различной формы: а) кольцевого квадрата; б) кольцевого треугольника; в) креста; г) астрономического знака Марса; д) буквы F; е) буквы W

Это распределение, представляющее интерес в данном рассмотрении, в основном определяется вторым слагаемым в (7). Таким образом, во втором слагаемом в (7) для внутреннего интеграла - фурье-образа функции автокорреляции апертуры спеклограммы  $H(\vec{\zeta})$ , можно использовать приближение  $\delta$ -функции

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H\left(\vec{\zeta} + \frac{\Delta\vec{\zeta}}{2}\right)H\left(\vec{\zeta} - \frac{\Delta\vec{\zeta}}{2}\right)d\vec{\zeta} \times \\ \times \exp[i2\pi(\Delta\vec{r} + \vec{u})\Delta\vec{\zeta}]d\Delta\vec{\zeta} \sim \delta(\Delta\vec{r} + \vec{u}) \end{aligned} \quad (8)$$

Используя фильтрующее действие  $\delta$ -функции, для второго слагаемого в (7) получаем выражение

$$\begin{aligned} \langle I^2(\vec{u}) \rangle &\sim \Phi^2\delta(\vec{u}) + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_0\left(\vec{r} + \frac{\vec{u}}{2}\right)P^2\left(\vec{r} + \frac{\vec{u}}{2}\right) \times \\ &\times I_0\left(\vec{r} - \frac{\vec{u}}{2}\right)P^2\left(\vec{r} - \frac{\vec{u}}{2}\right)d\vec{r}, \end{aligned} \quad (9)$$

которое определяет распределение интенсивности поля в дифракционном гало – в пространственном спектре фурье-спеклограммы. Это распределение имеет вид функции автокорреляции распределения средней интенсивности поля в плоскости объекта с учетом его макроформы – формы используемой апертурной диафрагмы или формы отражающего объекта.

На рис. 5 представлены примеры пространственных распределений интенсивности поля – дифракционных гало, получаемых при численном фурье-преобразовании экспериментальных цифровых фурье-спеклограмм объектов-транспарантов различной формы. В несколько иных терминах можно сказать, что на рис.5 представлены изображения пространственных спектров цифровых фурье-

спеклограмм объектов различной формы. Нетрудно видеть соответствие форм дифракционных картин (пространственных спектров) автокорреляционным распределениям средней интенсивности поля в плоскости объекта.

Следует отметить, что если в плоскость регистрации при записи спеклограммы направить когерентный опорный пучок, то реализуется запись цифровой фурье-голограммы. В этом случае численное фурье-преобразование от зарегистрированного распределения интенсивности позволяет получить изображения объекта, но уже в  $\pm 1$  дифракционных порядках пространственного спектра спеклограммы. Результат такой записи и соответствующего последующего численного преобразования приведен на рис.6 для объектов в форме буквы **H** и в форме креста. В нулевом порядке дифракции, как и для обычной спеклограммы, также наблюдается автокорреляционное дифракционное гало.

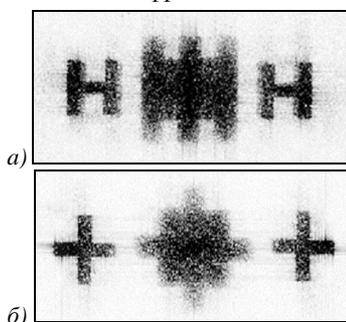


Рис.6. Результат численного фурье-преобразования цифровых фурье-голограмм рассеивающих объектов в форме буквы **H** (а) и креста (б)

#### 4. Численное моделирование

В рамках настоящей работы разработаны программы численного моделирования объектного поля рассеивающего объекта с апертурой произвольной формы, дифракционного преобразования и записи фурье-спеклограммы этого поля, формирования пространственного спектра фурье-спеклограммы – дифракционного гало, в соответствии со схемой, представленной на рис.4. Численное моделирование направлено на проверку полученного аналитического выражения (9) для средней интенсивности поля в дифракционном гало.

Функция распределения средней интенсивности, описываемая формулой (9), имеет центральный пик на фоне медленно меняющегося распределения интенсивности, описываемого вторым слагаемым. Проверка правильности полученной формулы может производиться двумя способами: путем компьютерного моделирования и путем физического эксперимента. Компьютерное моделирование позволяет оценить правильность теоретической формулы не только по форме распределения, но и по абсолютной величине. Экспериментальное же распределение может быть сопоставлено с теоретическим только по форме, что обусловлено практической

сложностью измерения абсолютной величины интенсивности.

В рамках работы выполнено компьютерное моделирование процесса записи цифровой фурье-спеклограммы и ее обработка в соответствии с теоретической моделью, представленной в настоящей работе. В теоретической части нами использовалось представление о  $\delta$ -коррелированном объектном поле с гауссовой статистикой его комплексной амплитуды. Это наиболее реалистичное и широко используемое представление об оптических свойствах рассеивающего объекта [2,23]. Поэтому оптическое поле в плоскости объекта при моделировании представлялось в виде дискретного массива точечных источников с комплексными амплитудами – случайными независимыми круговыми гауссовыми комплексными переменными [23]. Моделирование включало два этапа – задание формы апертуры объекта и заполнение этой апертуры случайным полем комплексных амплитуд с требуемой статистикой. Использовалась бинарная апертурная функция, задание которой сводилось к заданию нулей и единиц в качестве элементов двумерного дискретного массива. Например, для кольцевой апертурной функции ко всем элементам массива применялся условный оператор, записывающий единицы в элементы, для которых

$$r_{min} \leq \sqrt{(i - m/2)^2 + (j - n/2)^2} \leq r_{max} \quad (\text{где } r_{min} \text{ и } r_{max} \text{ – внутренний и внешний радиусы кольца, выраженные в индексах элементов массива; } i, j \text{ – индексы элементов массива по двум измерениям, } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n; m, n \text{ – размерность массива по двум измерениям (слагаемые } -m/2 \text{ и } -n/2 \text{ вводятся, чтобы требуемая апертура располагалась в центре массива)), и нули во все остальные элементы массива.)$$

Для заполнения апертуры объекта случайным полем комплексных амплитуд для каждого элемента двумерного массива использовалась следующая процедура. Генерировались два случайных вещественных числа с гауссовой статистикой, нулевым средним значением и одинаковой дисперсией, которые записывались в действительную и мнимую части новой комплексной переменной. В результате получали круговую гауссову комплексную случайную величину [23], на которую умножали элемент массива. Таким образом моделировалось случайное  $\delta$ -коррелированное (с точностью до дискретизации) поле круговых гауссовых комплексных величин с заданной апертурной функцией.

Спекл-картины дальнего поля дифракции, полученные с помощью компьютерного моделирования для объектов с различной апертурой – в форме кольца и буквы **W**, представлены на рис. 7. Сравнение с экспериментальными картинками показывает их полное сходство, насколько это возможно сделать визуально для таких сложных стохастических картин.

Цифровые дифракционные гало, полученные при численном фурье-преобразовании смоделированных

спеклограмм кольцевого объекта и объекта в форме буквы **W**, представлены на рис.8а,г. На рис.8б,в,д,е представлены соответствующие этим картина трехмерные графические формы распределения интенсивности в дифракционном гало с различными масштабами по оси ординат (по оси интенсивности). Обращает внимание резкий всплеск интенсивности поля в центре дифракционного гало, который, фактически, определяется первым слагаемым в аналитическом выражении (9), полученным для распределения средней интенсивности поля в дифракционном гало. Наличие этого пика интенсивности со столь большим значением не заметен в изображениях на рис.8а,г в силу ограниченности динамического диапазона представления этих изображений в градациях серого и из-за ограниченности диапазона зрительного восприятия, а также из-за малости ширины этого импульса, занимающего, фактически, 1 пиксель изображения.

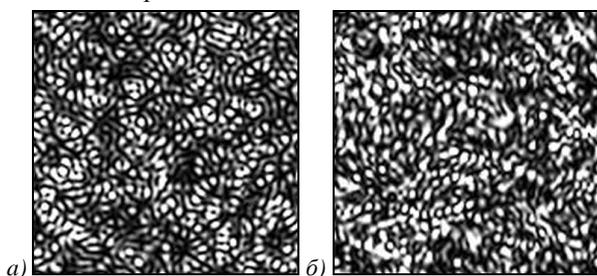


Рис. 7. Фрагменты фурье-спеклограмм, получаемых в результате компьютерного моделирования для рассеивающих объектов с апертурой в форме узкого круглого кольца (а) и буквы **W** (б)

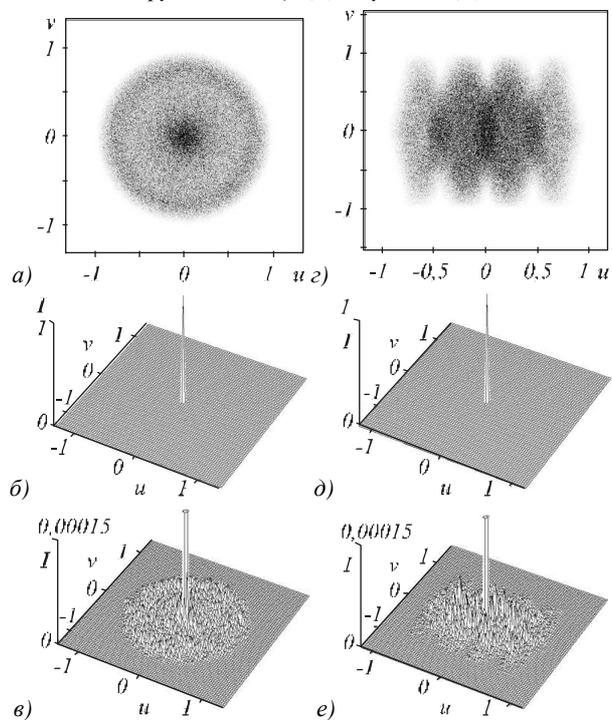


Рис. 8. Дифракционные гало и соответствующие им трехмерные графики распределения интенсивности, полученные при помощи компьютерной модели для объекта в форме кольца (а–в), для объекта в форме буквы **W** (г–е): (а, г) – изображения дифракционных гало; (б, в, д, е) – графики с отложенной по оси ординат нормированной на единицу интенсивностью

Формирование этого импульса с физической точки зрения может быть объяснено на примере аналогового процесса получения дифракционного гало. Аналоговая спеклограмма, записанная на фотопластинке, в первом приближении может рассматриваться как совокупность прозрачных и непрозрачных участков – изображений спеклов. При освещении ее плоской монохроматической волной в нормальном направлении прозрачные участки в соответствие с принципом Гюйгенса-Френеля представляют собой источники вторичных волн с одинаковой фазой [21]. В центре дифракционной картины в дальней зоне дифракции оптические разности хода волн всех источников равны нулю, и в этом месте в результате интерференции этих волн наблюдается совокупный глобальный максимум. При удалении от центра оптические разности хода приобретают случайный характер, как и вся интерференционная картина в дифракционном поле, локальные максимумы которой имеют существенно меньшее значение, чем в центре. В натурном эксперименте этому глобальному максимуму соответствует недифрагированный пучок лазерный пучок.

Результат численного дифракционного преобразования экспериментальных цифровых фурье-спеклограмм, полученных для объектов той же формы, что и при численном моделировании, показан на рис. 9. Представленные на рис.8 и 9 изображения и графические формы, их сопоставление подтверждает правильность работы компьютерной модели и правильность положений, использованных в основе теоретической модели, рассмотренной в теоретическом разделе настоящей работы.

На рис.8 и 9 переменные  $u$  и  $v$  представляют собой координаты, нормированные на размер объекта. На этих рисунках видно, что геометрическая протяженность дифракционного гало вдвое превышает протяженность самого объекта. Это обстоятельство вполне согласуется с аналитическим выражением (9) для средней интенсивности в дифракционном гало, поскольку протяженность автокорреляционной функции именно вдвое превосходит исходное распределение. На рис. 8а,г, рис. 9а,г протяженность дифракционного гало кажется меньшим двух единиц. Это объясняется тем, что динамический диапазон представления этих картин не позволяет отчетливо визуализировать участки с малым значением интенсивности на периферии дифракционного гало.

Усреднение, введенное в (5), может быть реализовано двумя способами. Во-первых, по ансамблю реализаций, что выполнимо в численном эксперименте и фактически трудно выполнимо в натурном

эксперименте. Во-вторых, усреднение может быть произведено и по одной реализации спекл-структуры. Для этого необходимо отфильтровать в дифракционном гало высокие пространственные частоты, соответствующие спекл-модуляции интенсивности. Эта операция может быть произведена, например, путем свертки полученного распределения интенсивности с окном по своим размерам большим, чем средний размер спеклов в дифракционном гало.

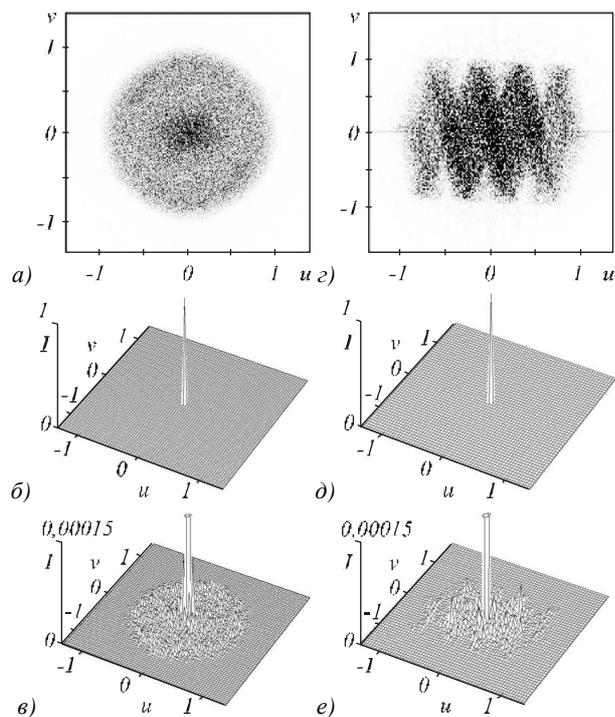


Рис. 9. Дифракционные гало и соответствующие им трехмерные графики распределения интенсивности, полученные при обработке экспериментальных цифровых фурье-спеклограмм для объекта в форме кольца (а-в) и для объекта в форме буквы W (z-e): (а, z) – изображения дифракционных гало; (б, в, д, е) – графики с отложенной по оси ординат нормированной на единицу интенсивностью

Результаты численного усреднения дифракционного гало по ансамблю реализаций объектного поля приведены на рис. 10а. На рис.10б приведено изображение дифракционного гало в шкале средней интенсивности, рассчитанного с использованием аналитического выражения (9) для объекта такой же формы, что и на рис.10а. Сравнение этих изображений показывает хорошее соответствие компьютерной модели и аналитического выражения.

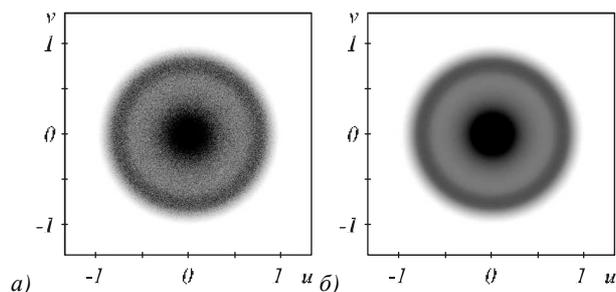
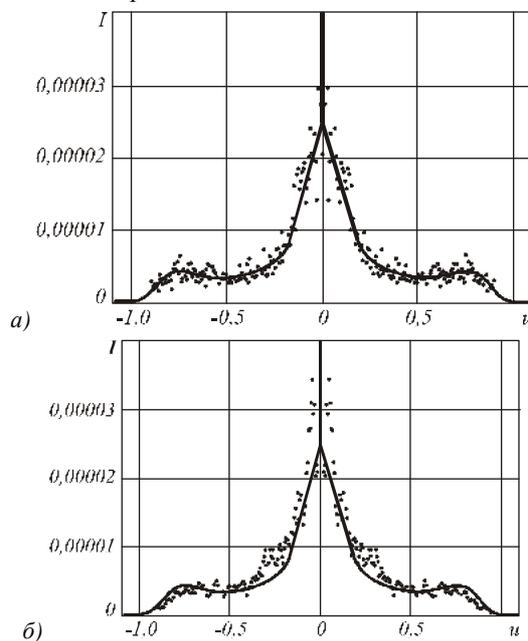


Рис. 10. (а) – результат усреднения по 20 полученным при помощи компьютерной модели реализациям дифракционного гало объекта в форме кольца, (б) – распределение средней интенсивности в дифракционном гало объекта в форме кольца, рассчитанное по формуле (9)

Для более точного и наглядного анализа правильности формулы (9) предпочтительнее сравнение двумерных графиков (т.е. отсчета интенсивности по одному из пространственных направлений в дифракционном гало).

На рис. 11 представлены одномерные распределения, полученные по формуле (9), с использованием компьютерной модели и при обработке экспериментальной спеклограммы (масштаб изображения, полученного при обработке экспериментальной спеклограммы, подобран соответственно теоретическому распределению, так как, как было сказано выше, нас в данном случае интересует сравнение формы графиков; модельный и теоретический графики можно сравнивать и по абсолютной величине).



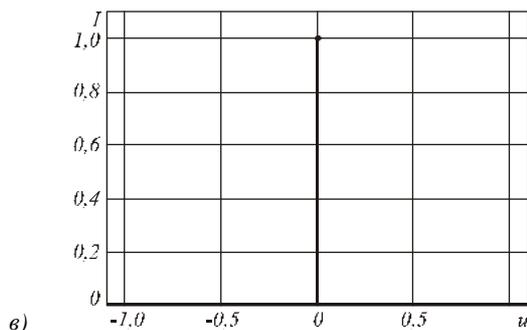


Рис. 11. Одномерные распределения средней интенсивности в дифракционном гало для рассеивающего объекта в форме кольца: (а) – сравнение кривой  $\langle I(u,0) \rangle$ , построенной по формуле (7) (сплошная линия), и результата усреднения по 20 реализациям компьютерной модели; (б) – сравнение кривой  $\langle I(u,0) \rangle$ , построенной по формуле (9) (сплошная линия), и экспериментального дифракционного гало, обработанного цифровым фильтром нижних частот (в виде скользящего окна прямоугольной формы); (в) – сравнение значений интенсивностей в центральном пике, получаемых по формуле (9) и в результате усреднения по 20 реализациям компьютерной модели

Представленные на рис. 11 данные имеют хорошее совпадение, что подтверждает допустимость сделанных при выводе соотношения (9) допущений и правильность, в конечном итоге, теоретического описания распределения средней интенсивности в дифракционном гало.

### 5. Заключение

Запись спекл-структуры дифракционного поля рассеивающего объекта содержит лишь частичную информацию о распределении освещенности на поверхности объекта – иными словами, об изображении объекта. Для восстановления полной информации об объектном поле и соответственно для восстановления изображения объектов необходима запись фазового пространственного распределения в дифракционном поле, что реализуется в голографии с помощью когерентного опорного пучка света. Дифракция лазерного пучка на аналоговой спеклограмме позволяет наблюдать в дифракционном гало распределение средней интенсивности поля, пропорциональное автокорреляционной функции распределения средней интенсивности в угловом спектре записываемого на спеклограмме объектного поля. При записи цифровой спеклограммы аналогичное распределение наблюдается при численном фуьре-преобразовании спеклограммы. Если спеклограмма записывается в плоскости действительного изображения объекта, то форма углового (пространственного) спектра объектного поля определяется апертурной диафрагмой изображающей системы, поскольку поле в плоскости изображения определяется фуьре-образом распределения поля в выходном зрачке изображающей системы. Такая схема записи используется в методе двухэкспозиционной спекл-фотографии для измерения малых смещений и де-

формаций рассеивающих объектов. В этом случае протяженность дифракционного гало определяется угловыми размерами выходной апертуры изображающей оптической системы. Угловая апертура дифракционного гало равна удвоенной угловой апертуре оптической системы. Протяженность угловой апертуры дифракционного гало определяет угловую чувствительность и точность метода двухэкспозиционной спекл-фотографии.

При записи спеклограммы в фуьре-плоскости дифракционная структура спеклограммы – размеры и форма спеклов, могут определяться как формой апертуры оптической системы, так и формой самого объекта в зависимости от соотношения их размеров. Если поперечные размеры объекта (его апертуры) существенно меньше размеров апертурной диафрагмы оптической системы, реализующей фуьре-преобразование, то распределение средней интенсивности света в дифракционном гало определяется формой и размерами апертуры объекта и распределением средней интенсивности по его поверхности. Аналогичное происходит и при использовании безлинзовых схем записи фуьре-спеклограмм, рассмотренных в настоящей работе.

При цифровой записи фуьре-спеклограммы и, соответственно, при использовании численного фуьре-преобразования спеклограммы можно получить цифровое изображение распределения интенсивности света в дифракционном гало. Усредненное распределение этой интенсивности определяется функцией автокорреляции распределения средней интенсивности поля в плоскости объекта. В этом отношении можно констатировать возможность восстановления некоторой информации о форме объекта по записи спекл-структуры его дифракционного поля. Для восстановления полного изображения в этом случае необходимо решение соответствующего интегрального уравнения, которое однозначно решается, как мы понимаем, только для определенного класса функций, определяющих распределение интенсивности по поверхности объекта.

Протяженность дифракционного гало при записи фуьре-спеклограммы определяется размерами объекта – его апертурой, а распределение средней интенсивности поля в дифракционном гало определяется и формой апертуры объекта, и формой пространственного распределения интенсивности поля на его поверхности. Это обстоятельство можно и необходимо учитывать при реализации метода двухэкспозиционной спекл-фотографии с записью в фуьре-плоскости. Для получения более равномерного распределения интенсивности света в дифракционном гало, которое модулируют интерференционные полосы, и, соответственно, для повышения точности измерений, возможно управление формой и распределением интенсивности в освещающем объект пучке и, что наиболее практически важно,

численная апостериорная обработка самой цифровой спеклограммы и дифракционного гало этой спеклограммы.

Возможность получения образа автокорреляционного распределения освещенности по поверхности объекта может быть использована и в системах когерентно-оптической обработки информации – в гибридных когерентных процессах с двукратным фурье-преобразованием – 4f-системах с цифровой записью пространственного спектра объекта и с численной процедурой дифракционного фурье-преобразования. При этом возможно аналоговое или численное преобразование (фильтрация) пространственного спектра объекта с целью заданного преобразования объектной информации.

#### *Благодарности*

Авторы благодарят к.ф.-м.н. В.В. Лычагова, к.ф.-м.н. О.А. Перепельцыну, к.ф.-м.н. Д.В. Лякина за помощь в экспериментальных исследованиях. Исследования были проведены при поддержке грантов аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)» № 2.1.1/4973, 2.2.1.1/2950.

#### *Литература*

1. **Джоунс, Р.** Голографическая и спекл-интерферометрия. / Р. Джоунс, К. Уайкс; пер. с англ. – М.: Мир, -1986. – 328с.
2. Laser speckle and related phenomena. Topics in Applied Physics. / Edited by J.C.Dainty. V.9. Berlin: Springer-Verlag, -1975. 286 p.
3. **Клименко, И.С.** Голография сфокусированных изображений и спекл-интерферометрия. / И.С. Клименко – М.: Наука, -1985. – 350 с.
4. **Франсон, М.** Оптика спеклов. / М. Франсон; пер. с англ. М.: Мир, -1980. – 171 с.
5. **Клименко, И.С.** К сравнению чувствительности и точности методов голографической и спекл-интерферометрии при регистрации в фурье-плоскости / И.С. Клименко, В.П. Рябухо, Б.В. Федулеев // Оптика и спектроскопия, -1986. -Т. 61. - В. 5. - С. 1118-1123.
6. **Klimentko, I.S.** Comparison of the sensitivity and accuracy of holography and speckle interferometry with Fourier-plane recording / I.S. Klimentko, V.P. Ryabukho, B.V. Feduleev // In book: Selected Papers on "Speckle metrology". SPIE Milestone Series. -1991. - Vol. MS35. - P. 425-429.
7. **Goodman, J.W.** Statistical properties of laser speckle patterns. / J.W. Goodman // Laser speckle and related phenomena. Springer-Verlag, -1975. - P.9-75.
8. **Meynart, R.** Diffraction halo in speckle photography / R. Meynart // Appl. Opt. -1984. - Vol. 23. - P.2235-2236.
9. **Vikram, C. S.** Removing the diffraction halo effect in speckle photography of sinusoidal vibration / C.S. Vikram, Chandra S. // Appl. Opt. -1990. – Vol. 29. – I. 25. - P.3572-3573.
10. **Cheng, C.** Diffraction halo function of partially coherent speckle photography / C. Cheng, W. Liu, W. Gui // Appl. Opt. Vol. -1999.- Vol.38. – P.6687-6691.
11. **Chiang, F.P.** Diffraction halo functions of coherent and incoherent random speckle patterns. / F.P. Chiang, D.W. Li // Appl. Opt. -1985. – Vol. 24 – P. 2126-2171.
12. **Isacson, S.A.** 2-D digital processing of speckle photography fringes. 1: Diffraction halo influence for the noise-free case / S.A. Isacson, G.H. Kaufmann // Appl. Opt. -1985. – Vol. 24. - P. 189-193.
13. **Осипов, М.Н.** Применение кольцевой апертурной диафрагмы в спекл-интерферометрии / М.Н. Осипов, М.Ю. Шапошников // Компьютерная оптика, -2002. - В.24. - С. 110-113.
14. **Schnars, U.** Digital holography. U. Schnars, W. Jueptner - Springer Verlag, -2004, - 164 p.
15. Digital holography and three-dimensional display / Edited by Ting-Chung Poon. - Springer, -2006. - 425 p.
16. **Горбатенко Б.Б.** Метод восстановления изображения предмета по спекл-структуре его дифракционного поля / Б.Б. Горбатенко, В.П. Рябухо, Л.А. Максимова // Письма в ЖТФ, 2004. - Т. 30. - В. 17. - С.68-75.
17. **Горбатенко, Б.Б.** Статистические свойства разности фаз в спекл-модулированном поле и метод восстановления изображения предмета по спекл-структуре его дифракционного поля / Б.Б. Горбатенко, В.П. Рябухо, Л.А. Максимова // Компьютерная оптика, -2004. - В. 26. - С.48-52.
18. **Горбатенко, Б.Б.** Реконструкция пространственного фазового распределения в дифракционном спекл-поле и восстановление изображения объекта по записи интенсивности / Б.Б. Горбатенко, В.П. Рябухо, Л.А. Максимова // Опт. и спектр., -2006. - Т.101. - №5. - С. 861-865.
19. **Горбатенко, Б.Б.** Реконструкция изображения по пространственному распределению интенсивности дифракционного спекл-модулированного поля / Б.Б. Горбатенко, Л.А. Максимова, В.П. Рябухо, Ю.В. Норов // Компьютерная оптика, -2007. - В. 31. - №2. - С. 26 - 33.
20. **Горбатенко, Б.Б.** Восстановление изображения объекта по записи распределения интенсивности дифракционного поля для контроля микроперемещений / Б.Б. Горбатенко, Л.А. Максимова, А.Ф. Резчиков, В.П. Рябухо, // Мехатроника, автоматизация, управление, -2008. - №9. - С.39-45.
21. **Борн, М.** Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф; пер. с англ. - М.: Наука, -1973. - 720 с.
22. **Гудмен, Дж.** Введение в фурье-оптику / Дж. Гудмен; пер. с англ. - М.: Мир, -1970. - 364 с.
23. **Гудмен, Дж.** Статистическая оптика / Дж. Гудмен; пер. с англ. под ред. Г.В. Скродского. - М.: Мир, -1988. - 528с.

*В редакцию поступила 02.03.2009г.*

---

## SPATIAL SPECTRUM (DIFFRACTION HALO) OF FOURIER SPECKLEGRAM OF SCATTERING OBJECT

Boris Borisovich Gorbatenko<sup>1</sup> (associate professor, e-mail: [gorbor@pochta.ru](mailto:gorbor@pochta.ru)),  
Anton Aleksandrovich Grebenyuk<sup>2</sup> (student, e-mail: [rvp@sgu.ru](mailto:rvp@sgu.ru)),  
Ludmila Aleksandrovna Maksimova<sup>3</sup> (senior scientist, e-mail: [MaksimovaLA@yandex.ru](mailto:MaksimovaLA@yandex.ru)),  
Vladimir Petrovich Ryabukho<sup>2,3</sup> (professor, e-mail: [rvp@sgu.ru](mailto:rvp@sgu.ru))

<sup>1</sup> Saratov State Technical University,

<sup>2</sup> Saratov State University,

<sup>3</sup> Institute of Precision Mechanics and Control RAS

### Abstract

The phenomenological theory of spatial spectrum (diffraction halo) of fourier-specklegram of scattering object is presented. It is shown, that distribution of average intensity of field in diffraction halo is determined by autocorrelation function of average intensity distribution on object surface. Influence of object aperture form is included. Results of natural experiments and numerical simulation are presented. They confirm validity of offered theory of diffraction halo formation.

**Key words:** speckle-pattern, diffraction, diffraction halo, fourier specklegram, spatial spectrum, autocorrelation.

**Citation:** Gorbatenko BB, Grebenyuk AA, Maksimova LA, Ryabukho VP. Spatial spectrum (diffraction halo) of fourier specklegram of scattering object. *Computer Optics* 2009; 33(1): 43-51.

**Acknowledgements:** The authors thank Ph.D. VV Lychagova, Ph.D. OA Perepelytsyn, Ph.D. DV Lyakina for help in experimental studies. Studies have been conducted, with the support of grants us the analytical departmental target program "Development of scientific potential of the higher school (2009-2010 years)" № 2.1.1 / 4973, 2.2.1.1/2950.

### References

- [1] Jones R., Wykes C. *Holographic and speckle interferometry*. Cambridge University Press, 1983.
- [2] *Laser speckle and related phenomena*. Topics in Applied Physics. Edited by J.C. Dainty. V.9. Berlin: Springer-Verlag, 1975.
- [3] Klimenko I.S. *Holography of focused images and speckle interferometry*. M.: Nauka, 1985. [in Russian]
- [4] Françon M. *La granularité laser (speckle) et ses applications en optique*. Masson Paris New York Barcelone Milan, 1978.
- [5] Klimenko I.S., Ryabukho V.P., Feduleev B.V. To comparison of sensitivity and accuracy of methods of holographic and speckle-interferometry at registration in fourier-plane. *Optics and Spectroscopy*. 1986; 61(5); 1118-1123. [in Russian]
- [6] Klimenko I.S., Ryabukho V.P., Feduleev B.V. Comparison of the sensitivity and accuracy of holography and speckle interferometry with Fourier-plane recording. In book: *Selected Papers on "Speckle metrology"*. SPIE Milestone Series. 1991; MS35; 425-429.
- [7] Goodman J.W. Statistical properties of laser speckle patterns. *Laser speckle and related phenomena*. Springer-Verlag 1975; 9-75.
- [8] Meynart R. Diffraction halo in speckle photography. *Appl. Opt.* 1984; 23; 2235-2236.
- [9] Vikram C.S., Chandra S. Removing the diffraction halo effect in speckle photography of sinusoidal vibration. *Appl. Opt.* 1990; 29(25); 3572-3573.
- [10] Cheng C., Liu W., Gui W. Diffraction halo function of partially coherent speckle photography. *Appl. Opt.* 1999; 38; 6687-6691.
- [11] Chiang F.P., Li D.W. Diffraction halo functions of coherent and incoherent random speckle patterns. *Appl. Opt.* 1985; 24; 2126-2171.
- [12] Isacson S.A., Kaufmann G.H. 2-D digital processing of speckle photography fringes. 1: Diffraction halo influence for the noise-free case. *Appl. Opt.* 1985; 24; 189-193.
- [13] Osipov M.N., Shaposhnikov M.Yu. Application of ring aperture diaphragm in speckle-interferometry. *Computer Optics* 2002; 24; 110-113. [in Russian]
- [14] Schnars U., Jueptner W. *Digital holography*. Springer Verlag; 2004.
- [15] *Digital holography and three-dimensional display*. Edited by Ting-Chung Poon. Springer; 2006.
- [16] Gorbatenko B.B., Ryabukho V.P., Maksimova L.A. Reconstructing an object image using the laser speckle pattern of the diffraction field. *Technical Physics Letters*. 2004; 30(9); 741-744.
- [17] Gorbatenko B.B., Ryabukho V.P., Maksimova L.A. Statistical properties of spatial phase distribution in developed speckle-field and reconstructing an object image using the laser speckle pattern of the diffraction field. *Computer Optics*. 2004; 26; 48-52. [in Russian].
- [18] Gorbatenko B.B., Ryabukho V.P., Maksimova L.A. Reconstructing of spatial phase distributions and object images from speckle intensity patterns of the diffraction field. *Optics and Spectroscopy*. 2006; 101(5); 811-815.
- [19] Gorbatenko B.B., Ryabukho V.P., Maksimova L.A., Norov Yu.V. Reconstruction of image from spatial distribution of intensity of diffraction speckle-modulated field. *Computer Optics* 2007; 31(2); 26-33. [in Russian]
- [20] Gorbatenko B.B., Maksimova L.A., Rezhnikov A.F., Ryabukho V.P. Reconstruction of object image from record of intensity distribution of diffraction field for the control of microdisplacement. *Mechatronics, Automatization, Control* 2008; 9; 39-45. [in Russian].
- [21] Born M., Wolf E. *Principles of optics*. Cambridge; 2002.
- [22] Goodman J.W. *Introduction to Fourier optics*. 2ed., McGraw-Hill; 1996.
- [23] Goodman J.W. *Statistical optics*. Wiley; 2000.