ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ, РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЭФФЕКТИВНОГО АЛГОРИТМА ЛИНЕЙНОЙ ЛОКАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ

Владислав Валерьевич Мясников (в.н.с, e-mail: vmyas@smr.ru),
Учреждение Российской академии наук Институт систем обработки изображений РАН

Аннотация

В работе представлен анализ устойчивости нового класса эффективных алгоритмов линейной локальной фильтрации сигналов. Анализ производится двумя способами. Первый из них использует хорошо известный из теории цифровой обработки сигналов подход, основанный на анализе передаточной функции линейной системы с постоянными параметрами. Второй способ, предлагаемый в данной работе, основан на анализе максимальной погрешности выходного сигнала. Преимущество второго способа состоит в возможности анализа устойчивости линейной системы обработки для случая конечных входных и выходных сигналов. Постановка задачи анализа, учитывающая конечность сигналов, актуальна именно для эффективных алгоритмов, поскольку они ориентированы на работу именно с такими сигналами.

Ключевые слова: линейная локальная фильтрация, эффективный алгоритм, устойчивость.

Введение

Линейная локальная фильтрация (ЛЛФ) - основной этап любой системы обработки цифровых сигналов и анализа изображений. Процедуры ЛЛФ используются как на этапе предварительной обработки для восстановления и улучшения качества сигналов, так и на этапе высокоуровневой обработки – для построения описания анализируемых объектов и сцен. Одной из центральных проблем, возникающих при реализации процедур ЛЛФ, является проблема вычислительной сложности и времени обработки. В авторских работах [1,2] предложен алгебраический подход к построению нового класса вычислительно эффективных алгоритмов ЛЛФ – *эффективных алгоритмов*, которые конструируются как композиции известных алгоритмов ЛЛФ. Цель настоящей работы – анализ устойчивости эффективных алгоритмов с точки зрения реализуемой ими линейной системы с постоянными параметрами (ЛПП системы).

Работа организована следующим образом.

В первом разделе дается очень краткое изложение результатов работ [1,2], в которых был введен класс эффективных алгоритмов. Эти же работы рекомендуются читателю в случае возникновения неясностей в указанном разделе.

Во втором разделе представлен ряд хорошо известных положений теории цифровой обработки сигналов, связанных с вопросами устойчивости и физической реализуемости ЛПП систем. Этот раздел является вспомогательным и приведен исключительно из соображений цельности последующего изложения.

Третий и четвертый разделы являются центральными в работе. В третьем разделе представлен анализ устойчивости эффективных алгоритмов, выполненный стандартными средствами, представленными во втором разделе.

В четвертом разделе исследование устойчивости эффективных алгоритмов выполнено на основе анализа максимальной погрешности выходного сигнала. Преимущество этого подхода перед традиционно используемым состоит в возможности анализа поведения ЛПП системы обработки для случая конечного выходного сигнала, мощность которого оказывается заведомо ограниченной. Такой подход оказывается целесообразным именно для эффективных алгоритмов, ориентированных на обработку именно конечных сигналов.

В заключении работы приводятся благодарности фондам, поддерживающим данную работу, и список литературы.

Эффективный алгоритм над множеством алгоритмов ЛЛФ

Настоящий раздел содержит краткое изложение необходимых сведений по эффективным алгоритмам ЛЛФ из работ [1,2]. Для упрощения изложение ведется в терминах одномерных сигналов.

Рассмотрим задачу ЛЛФ Z, заключающуюся в вычислении одномерной линейной свертки конечного *входного сигнала* $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$ длины N с *конечной импульсной характеристики* (КИХ) $\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}$:

$$y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{m=0}^{M-1}h(m)x(n-m),\quad n=\overline{M-1,N-1}, \tag{1}$$

результатом решения которой является получение сигнала $\{y(n)\}_{n=0}^{N-M+1}$ длины $N-M$, называемого *выходным сигналом*. В общем случае отсчеты всех сигналов являются элементами некоторого коммутативного кольца $\mathbf{K}$ с единицей.

Для решения задачи (1) существует целый ряд известных алгоритмов ЛЛФ, которые условно можно разбить на множества [3-7]: алгоритмы прямой свертки $\mathbf{A}_{DC}$, алгоритмы быстрой свертки $\mathbf{A}_{FC}$ и рекурсивные алгоритмы $\mathbf{A}_{RF}$. Идея, предложенная в работах автора [1,2], заключается в использовании некоторого *опорного множества алгоритмов* ЛЛФ $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}_{DC} \cup \mathbf{A}_{FC} \cup \mathbf{A}_{RF}$ (представленных на практике в виде программ) и априорной информации о задаче ЛЛФ $\Im_0 = \left(\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}, \Im_x\right)$, которая известна до момента ее решения и представлена в виде КИХ $\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}$ и априорной информации $\Im_x$ о свойствах обрабатываемого сигнала, для получения алгоритма, удовлетворяющего *требованию эффективности*. *Требование эффективности* подразумевает, что искомый алгоритм в вычислительном плане:

- для любой задачи ЛЛФ Z оказывается не хуже наилучшего алгоритма опорного множества (*свойство эффективности* алгоритма),
- для некоторых задач ЛЛФ Z оказывается лучше наилучшего алгоритма опорного множества (*свойство строгой эффективности* алгоритма).

Таким образом, определение способа построения эффективного алгоритма заключается в конструировании отображения

$$(\Im_0, \mathbf{A}) \mapsto A^{\Im}, \tag{2}$$

которое для конкретного опорного множества алгоритмов $\mathbf{A}$ и заданной априорной информации $\Im_0$ дает алгоритм $A^{\Im}$ с наименьшей вычислительной сложностью решения соответствующей задачи (1).

Следует отметить, что идея использования множества алгоритмов для построения «наилучшего» в некотором смысле алгоритма была предложена в 70-х годах академиком Ю.И.Журавлевым [8] для построения корректного алгоритма распознавания. Работы [1,2] автора настоящей работы развивают эту идею применительно к задаче ЛЛФ, используя другое формализованное представление алгоритма и, как следствие, иную алгебраическую систему.

Для конструирования отображения (2) в работах [1,2] вводится алгебраическая система алгоритмов ЛЛФ: конкретизируются отношения между алгоритмами (лучше, хуже и т.п.), а также операции (распространения, сужения и сложения). Далее, вводится операция расширения опорного множества алгоритмов $\mathbf{A}$, построенная на основе простого эквивалентного преобразования выражения (1). Результатом применения этой операции к опорному множеству $\mathbf{A}$ алгоритмов ЛЛФ оказывается его *расширение* $[\mathbf{A}]$. При этом алгоритмы из расширения $[\mathbf{A}]$ удовлетворят определенной модели алгоритма, названной в указанных работах *моделью CR*. Ниже приведено описание этой модели алгоритма ЛЛФ.

Модель CR алгоритма

Шаг 1 – Предварительная обработка:

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{K_x-1} g_x(k) x(n-k), \quad n = \overline{0, N-1}. \tag{3}$$

Шаг 2. Вычисление сверток по всем интервалам допустимого покрытия $\{D_s\}_{s=0}^{S-1}$:

$$\tilde{y}_s(n) = \sum_{m \in D_S} \tilde{h}_s(m) \tilde{x}(n-m) \quad \left(n = \overline{0, N-1}, \quad s = \overline{0, S-1}\right). \tag{4}$$

Шаг 3. Объединение результатов (4):

$$\tilde{y}(n) = \sum_{s=0}^{S-1} \tilde{y}_s(n). \tag{5}$$

Шаг 4 – Окончательная обработка:

$$y(n) = \sum_{t=1}^{K_h+K_x-2} \tilde{g}(t) y(n-t) + \tilde{y}(n), \quad n = \overline{0, N-1}. \tag{6}$$

Модель CR алгоритма - *Конец*

В представленном описании модели:

- $\{g_x(k)\}_{k=0}^{K_x-1}$ - КИХ предварительной обработки входного сигнала;
- $\tilde{h}(m) = h(m) * g_h(m)$, где $\{g_h(k)\}_{k=0}^{K_h-1}$ - КИХ предварительной обработки импульсной характеристики исходного фильтра;
- $\tilde{g}(m) = g_x(m) * g_h(m)$;
- $\{\tilde{h}_s(m)\}_{s=0}^{S-1}$ - покрытие для КИХ $\{\tilde{h}(m)\}$, удовлетворяющее ограничению:

$$\tilde{h}(m) = \sum_{s=0}^{S-1} \tilde{h}_s(m),$$
$$\forall s \neq j \quad \operatorname{supp} \tilde{h}_s(m) \cap \operatorname{supp} \tilde{h}_j(m) = \varnothing.$$

Тройка параметров (K_h, K_x, S) определяет *порядок модели*, множество алгоритмов модели CR одного порядка далее обозначается $[\mathbf{A}]_{CR(K_h, K_x, S)}$. При этом искомое расширение первоначального множества алгоритмов вводится в виде:

$$[\mathbf{A}] = \bigcup_{\substack{K_h = \overline{1, M-1} \\ K_x = \overline{1, N-1} \\ S = 1,2,\ldots}} [\mathbf{A}]_{CR(K_h, K_x, S)}.$$

Каждый алгоритм $A^{CR} \in [\mathbf{A}]$ из расширения (модели CR) на первом и втором шаге для вычисления соответствующих сверток (3) и (4) использует некоторые алгоритмы опорного множества $\mathbf{A}$. В результате задача конструирования отображения (2) заключается в поиске в расширении $[\mathbf{A}]$ алгоритма с наименьшей сложностью. Такой алгоритм и определяется как *алгоритм* $A^{\Im}$, *индуцированный априорной информацией о задаче*. Существенно, что индуцированный алгоритм $A^{\Im} \in [\mathbf{A}]$ оказывается эффективным над опорным множеством $\mathbf{A}$, а при некоторых условиях - строго эффективным.

В общем случае, то есть при произвольном опорном множестве алгоритмов ЛЛФ, процесс построения эффективного индуцированного алгоритма оказывается чрезвычайно сложным. Однако для практики основной интерес представляет множество алгоритмов вида $\mathbf{A}_{DC} \cup \mathbf{A}_{FC} \cup \mathbf{A}_{RF}$. В работах [1,2] показано, что для построения эффективного алгоритма над множеством $\mathbf{A}_{DC} \cup \mathbf{A}_{FC} \cup \mathbf{A}_{RF}$ достаточно построить индуцированный алгоритм над множеством алгоритмов $\mathbf{A}_{DC} \cup \mathbf{A}_{FC}$. Алгоритмы множества $\mathbf{A}_{DC} \cup \mathbf{A}_{FC}$ относятся к *алгоритмам постоянной сложности* (*АПС*), у которых функция аналитической вычислительной сложности представима в виде выражения $u_A(M,N)$ от параметров M и N задачи ЛЛФ. Там же показано, что процесс построения состоит из трех хорошо формализованных операций. Он представляет собой конечную (по объему вычислений) численную процедуру, которая дает решение в виде точных значений параметров модели CR (числовых и алгоритмических) для индуцированного алгоритма A^3.

Основные положения теории цифровой обработки сигналов

Настоящий раздел содержит только хорошо известные положения теории цифровой обработки сигналов, касающиеся вопросов устойчивости ЛПП систем. Он приведен исключительно из соображений цельности изложения. Более полная информация доступна в известных изданиях [3-7].

Как известно, прямое Z-*преобразование* $X(z)$ последовательности $\{x(n)\}$ определяется формулой:

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}. \qquad (7)$$

Функцию $X(z)$ называют Z-*образом* последовательности $\{x(n)\}$. Справедливо предложение.

Предложение 1 (теорема о свертке) [5-7]. *Пусть* $\{x(n)\},\{h(n)\},\{y(n)\}$ *- некоторые последовательности, связанные соотношением* $y(n)=x(n)*h(n)$ *тогда их* Z-*образы связаны соотношением* $Y(z)=X(z)\cdot H(z)$.

Передаточной функцией (*ПФ*) линейной системы с постоянными параметрами называется отношение Z-преобразований выходного и входного сигналов:

$$\mathbf{K}=\mathbf{GF}(p). \qquad (8)$$

Вид передаточной функции определяет, является ли конкретный линейный цифровой фильтр рекурсивным или нерекурсивным следующим образом:

- *рекурсивный цифровой фильтр* – это цифровой фильтр с передаточной функцией вида (8), не содержащей общих множителей в числителе и знаменателе и имеющей ненулевые коэффициенты в знаменателе;
- *нерекурсивный цифровой фильтр* – это цифровой фильтр, передаточная функция которого принимает вид полинома по степеням z^{-1} после сокращения всех общих сомножителей в выражении (8):

$$H(z)=\sum_{m=0}^{M-1}h(m)z^{-m}.$$

Легко показать, что КИХ-фильтры, реализуемые с использованием алгоритмов прямой свертки, являются нерекурсивными.

Рассмотрим далее практически важный случай, когда сигналы являются вещественными, то есть когда вместо кольца **K** отсчеты сигналов принадлежат более «богатой» алгебраической структуре - полю **R**. Очевидно, что числитель и знаменатель ПФ общего вида (8) являются полиномами переменной z^{-1}. Поэтому они могут быть факторизованы следующим образом:

$$H(z)=B\frac{\prod_i\left(1-q_iz^{-1}\right)}{\prod_j\left(1-p_jz^{-1}\right)}, \qquad (9)$$

где B – некоторая постоянная величина. Величины $\{q_i\}$ в выражении (9) ПФ называются *нулями ПФ*, а $\{p_j\}$ - *полюсами ПФ* ($B\in\mathbf{R}$, $q_i\in\mathbf{C}$, $p_j\in\mathbf{C}$). В работе использованы следующие определения для устойчивой и реализуемой ЛПП системы:

- ЛПП система называется *устойчивой*, если при любой ограниченной входной последовательности выходная последовательность также ограничена;
- ЛПП система с импульсной характеристикой $\{h(m)\}$ называется *физически реализуемой*, если $\forall m<0 \quad h(m)=0$.

Справедливы следующие предложения.

Предложение 2 [4]. *Необходимым и достаточным условием устойчивости ЛПП системы является выполнение соотношения:* $\sum_m |h(m)|<\infty$.

Предложение 3 [3]. *Физически реализуемая ЛПП система является устойчивой тогда и только тогда, когда все полюса ее ПФ находятся внутри единичного круга Z-плоскости:* $\forall j \quad |p_j|<1$.

Из этих двух предложений следует очевидное.

Следствие 1. *Любой нерекурсивный цифровой фильтр является устойчивым.*

Устойчивость эффективного алгоритма ЛЛФ

Примем далее следующие обозначения:

- $X(z),Y(Z)$ - Z-преобразования для входной и выходной последовательностей,

– $H(z)$ - ПФ для КИХ-фильтра $\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}$,
– $G_x(z), G_h(z)$ - ПФ для КИХ-фильтров $\{g_h(k)\}_{k=0}^{K_h-1}$ $(g_h(0)=1)$ и $\{g_x(k)\}_{k=0}^{K_x-1}$ $(g_x(0)=1)$.

Легко показать справедливость утверждений.

Предложение 4. *Пусть* $\mathbf{A}$ *- опорное множество алгоритмов постоянной сложности. Любой алгоритм* A^{CR} *модели CR с допустимым набором числовых параметров реализует физически реализуемую ЛПП систему.*

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{A}$ *- опорное множество алгоритмов постоянной сложности,* $A^{\mathrm{Э}}(Z)$ *- индуцированный алгоритм задачи Z. Если* $A^{\mathrm{Э}}(Z) \in [\mathbf{A}]_{CR(1,1,S)}$, *тогда* $A^{\mathrm{Э}}(Z)$ *реализует устойчивую ЛПП систему.*

Следствие 2 (леммы 1). *Пусть* $\mathbf{A}$ *- опорное множество алгоритмов постоянной сложности, и пусть индуцированный алгоритм* $A^{\mathrm{Э}}(Z)$ *задачи Z не является строго эффективным. Тогда* $A^{\mathrm{Э}}(Z)$ *реализует устойчивую ЛПП систему.*

Более общая ситуация рассматривается в лемме.

Лемма 2. *Пусть входной сигнал и КИХ фильтра являются конечными последовательностями над полем* $\mathbf{R}$, *и* $\mathbf{A}$ *- опорное множество алгоритмов постоянной сложности. Индуцированный алгоритм* $A^{\mathrm{Э}}(Z)$ *задачи Z реализует устойчивую ЛПП систему тогда и только тогда, когда нули передаточных функций КИХ-фильтров* $G_x(z), G_h(z)$ *расположены внутри единичной окружности Z-плоскости.*

Доказательство:

Ситуация $K_h = 1, K_x = 1$.

В этой ситуации лемма (ее достаточное условие) является следствием леммы 1, поскольку в этом случае ПФ $G_x(z) = G_h(z) = 1$ и индуцированный алгоритм реализует нерекурсивный линейный цифровой фильтр. Поскольку в этой ситуации обратное условие ни при каких обстоятельствах не может быть выполнено, справедливо и необходимое условие.

Ситуация $(K_h > 1) \vee (K_x = 1)$.

Выражение для схемы вычисления в алгоритме модели CR [1,2] может быть переписано с помощью Z-преобразования следующим образом:

$$Y(Z)G_x(z)G_h(z) = (X(z)G_x(z))(H(z)G_x(z)). \tag{10}$$

В выражении (10) правая часть характеризует Z-преобразование последовательности $\{\tilde{y}(n)\}$, которая используется в выражении (6) алгоритма модели CR для вычисления окончательного результата свертки:

$$y(n) = \sum_{t=1}^{K_h+K_x-2} \tilde{g}(t)y(n-t) + \tilde{y}(n). \tag{11}$$

Заметим, что последовательность $\{\tilde{y}(n)\}$ получается из последовательности $\{x(n)\}$ посредством применения нерекурсивных алгоритмов из опорного множества $\mathbf{A}$. В силу следствия 1, эти алгоритмы реализуют устойчивую ЛПП систему и, следовательно, последовательность $\{\tilde{y}(n)\}$ является ограниченной. Поэтому свойства индуцированного алгоритма $A^{\mathrm{Э}}(Z)$ полностью характеризуются свойствами преобразования (11).

Заметим также, что поскольку вычисления в поле вещественных чисел $\mathbf{R}$ на ПЭВМ производятся не абсолютно точно, значения последовательности $\{\tilde{y}(n)\}$ и, соответственно, ее Z-преобразование получаются с некоторой погрешностью:

$$\tilde{Y}(Z) \equiv (H(z)G_h(z))(X(z)G_x(z)) + \varepsilon(z), \tag{12}$$

что не позволяет сократить общие множители в правой и левой части выражения (10).

ПФ для цифрового фильтра, реализующего обработку (11), имеет вид:

$$\frac{Y(Z)}{\tilde{Y}(z)} = \frac{1}{G_x(z)G_h(z)} \equiv G(z). \tag{13}$$

Тогда для устойчивости физически реализуемой ЛПП системы, реализуемой индуцированным алгоритмом $A^{\mathrm{Э}}(Z)$ в соответствии с предложением 4, необходимо и достаточно выполнения условия предложения 3, то есть нахождения внутри единичного круга Z-плоскости полюсов ПФ $G(z)$, при этом полюса $G(z)$ совпадают с нулями ПФ $G_x(z), G_h(z)$.

■

Лемма 3. *Пусть входной сигнал и КИХ фильтра являются конечными последовательностями над полем* $\mathbf{GF}(p)$ *и* $\mathbf{A}$ *- опорное множество АПС. Тогда индуцированный алгоритм* $A^{\mathrm{Э}}(Z)$ *задачи Z реализует устойчивую ЛПП систему.*

Доказательство:

Ситуация $K_h = 1, K_x = 1$ рассматривается аналогично лемме 2. В ситуации $(K_h > 1) \vee (K_x = 1)$ выражение для схемы вычисления алгоритма модели CR может быть переписано с помощью Z-преобразования следующим образом:

$$\begin{aligned} Y(Z)G_x(z)G_h(z) &= \\ &= (X(z)G_x(z))(H(z)G_x(z)) \equiv \tilde{Y}(Z), \end{aligned} \tag{14}$$

где $\tilde{Y}(Z)$ - есть Z-преобразование последовательности $\{\tilde{y}(n)\}$, которая используется в выражении (6) алгоритма модели CR (см. также выражение (11)). Вычисления в конечном поле $\mathbf{GF}(p)$ на ПЭВМ производятся абсолютно точно, поскольку это операции с целыми числами по модулю некоторого простого числа. Поэтому значения последовательности $\{\tilde{y}(n)\}$ и, соответственно, ее Z-преобразования получаются абсолютно точно. Тогда выражение (14) может быть преобразовано к виду:

$$Y(Z)=X(z)H(z) \;\Rightarrow\; Y(Z)(X(z))^{-1}=H(z). \quad (15)$$

Полученное выражение показывает, что ПФ индуцированного алгоритма, используемого для вычисления свертки в простом поле Галуа $\mathbf{GF}(p)$, в точности совпадает с ПФ для КИХ $\{h(m)\}_{m=0}^{M-1}$. Такая ПФ, в силу конечности исходной импульсной характеристики, соответствует устойчивой ЛПП системе.

■

На практике для современных ПЭВМ и конечных длин N обрабатываемых сигналов требование устойчивости для ЛПП системы оказывается чрезмерно сильным. Это объясняется тем, что погрешности представления данных и выполняемых операций чрезвычайно малы и при сравнительно малых конечных длинах слабо влияют на результат. Однако при больших длинах обрабатываемых сигналов (обычно более нескольких тысяч отсчетов в зависимости от вида ПФ) такое влияние оказывается уже существенным. В следующем разделе представлен подход, который позволяет производить более скрупулезный анализ *«устойчивости» ЛПП системы, реализуемой алгоритмом модели CR, в плане вносимых погрешностей в результат обработки*. Этот подход без изменений может быть использован для аналогичного анализа рекурсивных фильтров.

Анализ погрешности выходного сигнала для эффективного индуцированного алгоритма ЛЛФ

Рассмотрим ситуацию, когда входной сигнал и КИХ фильтр являются конечными последовательностями над полем $\mathbf{R}$ (поскольку случай сигналов над $\mathbf{GF}(p)$ оказывается тривиальным). В соответствии с леммой 2 существуют параметры КИХ предварительной обработки $\{g_h(k)\}_{k=0}^{K_h-1}$, при которых ЛПП система, реализуемая индуцированным алгоритмом, не является устойчивой. Однако напрямую использовать выводы об устойчивости или неустойчивости ЛПП системы, которую реализует соответствующий эффективный алгоритм, не совсем корректно. Действительно, в соответствии с постановкой задачи вычисления свертки и моделью алгоритма CR, выходной сигнал $\{y(n)\}_{n=0}^{N-1}$ является конечным (по длине) и, как следствие, всегда ограниченным. Следовательно, факт неустойчивости реализуемой алгоритмом ЛПП системы еще не означает невозможность его использования для решения конкретной задачи ЛЛФ конечного сигнала.

Для более точного определения границ области применимости конкретного алгоритма модели CR следует оценить некоторым образом погрешность, которая вносится в результат вычислений – отсчеты выходного сигнала. Для этого рассмотрим отдельно последний этап алгоритма модели CR, который отвечает за обработку с использованием рекурсивного уравнения (11). В качестве величины погрешности, которая характеризует рассогласование истинного и получаемого выходных сигналов, используем максимальную ошибку рассогласования.

ПФ для цифрового фильтра, реализующего обработку (11), как было показано ранее, имеет вид:

$$\frac{Y(Z)}{\tilde{Y}(z)} \equiv G(z)=\frac{1}{G_x(z)G_h(z)}.$$

Представим $G(z)$ в виде

$$G(z)=\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{K_h+K_x-2}\left(1-q_k z^{-1}\right)}= \prod_{k=1}^{K_h+K_x-2}\frac{1}{\left(1-q_k z^{-1}\right)}=\prod_{k=1}^{K_h+K_x-2}G_k(z).$$

Тогда вычисления в (11) можно произвести последовательно фильтрами $G_k(z)$ с ПФ вида:

$$G_k(z)=\frac{1}{\left(1-q_k z^{-1}\right)},\quad k=\overline{1,K_h+K_x-2}\,.$$

Для каждой такой ПФ соответствующее рекуррентное уравнение обработки имеет вид:

$$y_k(n)=q_k y_k(n-1)+y_{k-1}(n),\quad n=\overline{0,N-1},\quad k=\overline{1,K_h+K_x-2}; \quad (16)$$

где

$$y_0(n)\equiv\tilde{y}(n),\quad y(n)\equiv y_{K_h+K_x-2}(n),\quad n=\overline{0,N-1}.$$

Рекуррентное уравнение (16) справедливо только в аналитическом смысле. При реализации этих рекурсивных вычислений на ПЭВМ в отсчеты $y_k(n)$ $\left(k=\overline{0,K_h+K_x-2}\right)$ вносится погрешность, связанная как с ограниченным форматом хранения вещественных чисел, так и с погрешностями выполнения операций их умножения и сложения. Таким образом, наблюдаемое при обработке одного k-го сигнала в n-ой позиции значение имеет вид, указанный в выражении (17), приведенном ниже. Здесь:

– $\varepsilon_k(n)$ - (общая) погрешность операций умножения, сложения и представления в ПЭВМ значения, которое получено на k-ом шаге в n-ой позиции, то есть $y_k(n)$-го;
– $\varepsilon_k^y(n)$ - накопленная в значении $y_k(n)$ погрешность, которая включает в себя интегрально все предшествующие погрешности, связанные с получением этого значения, начиная с самого первого шага алгоритма.

$$y_k(n)+\varepsilon_k^y(n)=$$
$$=\begin{cases}\tilde{y}(n)+\varepsilon_0(n), & n\geq 0,\quad k=0,\\ y_{k-1}(0)+\varepsilon_{k-1}^y(0), & n=0,\quad k=\overline{1,K_h+K_x-2},\\ q_k\cdot\left(y_k(n-1)+\varepsilon_k^y(n-1)\right) & \\ \quad+\left(y_{k-1}(n)+\varepsilon_{k-1}^y(n)\right)+\varepsilon_k(n), & \\ & n>0,\quad k=\overline{1,K_h+K_x-2}.\end{cases} \quad (17)$$

Отсюда получаем следующее двумерное рекуррентное соотношение для ошибок вычисления в (16):

$$\varepsilon_k^y(n)=\begin{cases}\varepsilon_0(n), & n\geq 0,\quad k=0,\\ \varepsilon_{k-1}^y(0), & n=0,\quad k=\overline{1,K_h+K_x-2},\\ q_k\cdot\varepsilon_k^y(n-1)+\varepsilon_{k-1}^y(n)+\varepsilon_k(n), & \\ & n>0,\quad k=\overline{1,K_h+K_x-2}.\end{cases} \quad (18)$$

Полученное рекуррентное соотношение не позволяет получить аналитическое решение для $\varepsilon_k^y(n)$ в явном виде. Однако оно дает возможность получить верхнюю границу для $\varepsilon_k^y(n)$ в простых частных случаях, на основании которой можно дать рекомендации по использованию алгоритма модели CR для практически важных ситуаций.

Пусть далее $\varepsilon_{\max}$ - это максимальная погрешность ошибки $\varepsilon_k(n)$ для конкретных ПЭВМ, операционной системы и среды программирования. Примеры погрешностей представления вещественных чисел на IBM PC с операционной системой Windows и средой программирования Builder C++ приведены в таблице 1. Тогда можно получить оценки $\varepsilon_k^y(n)$ в следующих случаях.

Таблица 1 - Точность машинного представления числа «1/3» в C/C++

тип C/C++	пример представления	количество верных разрядов	
		десятичных	двоичных
float	0.3333333432674407959	7	23
double	0.3333333333333333148	16	53
long double	0.3333333333333333334	18	60

Случай 1. $q_k\neq 1,\quad k=\overline{0,1}$.

Если k=0, тогда очевидно:

$$\left|\varepsilon_0^y(n)\right|=\left|\varepsilon_0(n)\right|\leq\varepsilon_{\max}\qquad(n\geq 0).$$

Если k=1, тогда на основании (18) имеем:

$$\max\left|\varepsilon_1^y(n)\right|=\max\left|q_1\varepsilon_1^y(n-1)+\varepsilon_0^y(n)+\varepsilon_1(n)\right|=$$
$$\max\left(\left|q_1\right|\left|\varepsilon_1^y(n-1)\right|+2\varepsilon_{\max}\right)=\left|q_1\right|\max\left(\left|\varepsilon_1^y(n-1)\right|\right)+2\varepsilon_{\max}.$$

Полученное неоднородное линейное рекуррентное соотношение относительно функции $\max\left|\varepsilon_1^y(n)\right|$ имеет решение в виде:

$$\max\left|\varepsilon_1^y(n)\right|=$$
$$=\left|q_1\right|^n\max\left(\left|\varepsilon_1^y(0)\right|\right)+2\varepsilon_{\max}\frac{\left|q_1\right|^n-1}{\left|q_1\right|-1}\qquad\left(\left|q_1\right|\neq 1\right).$$

Учитывая начальные условия из (18) для величины $\varepsilon_1^y(0)$, имеем окончательно:

$$\max\left|\varepsilon_1^y(n)\right|=\varepsilon_{\max}\left(\left|q_1\right|^n+2\frac{\left|q_1\right|^n-1}{\left|q_1\right|-1}\right)=$$
$$=\varepsilon_{\max}\frac{\left|q_1\right|^{n+1}+\left|q_1\right|^n-2}{\left|q_1\right|-1}\qquad\left(\left|q_1\right|\neq 1\right).$$

Учитывая также тот очевидный факт, что ошибка вычислений при росте номера k функции не уменьшается, то есть

$$\forall k\geq 1\quad\max\left|\varepsilon_k^y(n)\right|\geq\max\left|\varepsilon_{k-1}^y(n)\right|,$$

на основании полученных соотношений можно сформулировать следующее предложение.

Предложение 5. *Для рекуррентного уравнения обработки (16) с параметрами* $\left|q_k\right|\neq 1\quad(k\geq 1)$ *максимальная погрешность результата удовлетворяет неравенству:*

$$\max\left|\varepsilon_k^y(n)\right|\geq\varepsilon_{\max}\frac{\left|q_1\right|^{n+1}+\left|q_1\right|^n-2}{\left|q_1\right|-1}. \quad (19)$$

Полученная формулировка, пригодная для любых $\left|q_k\right|\neq 1$, может быть использована для указания необходимых условий применимости алгоритма модели CR для обработки сигналов конкретных длин. А именно: необходимо, чтобы длина обрабатываемой последовательности удовлетворяла условию:

$$n^*:\frac{\left|q_1\right|^{n+1}+\left|q_1\right|^n-2}{\left|q_1\right|-1}\leq\frac{\Delta}{\varepsilon_{\max}},$$

где Δ - заданная максимальная погрешность результата.

В частности, при $\left|q_k\right|=2$, имеем

$$n^*\leq\log_2\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\Delta}{\varepsilon_{\max}}+2\right)\right)=\log_2\left(\frac{\Delta}{\varepsilon_{\max}}+2\right)-\log_2(3).$$

А при Δ=1 приблизительное максимальное значение $n_{\max}^*$ величины n^* имеет вид:

$$n^*_{\max} \approx \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon_{\max}}\right) - 1 \equiv r2 - 1,$$

где *r2* – указанное в таблице 1 количество верных двоичных разрядов в представлении вещественного числа. В частности, при представлении вещественных чисел в формате *float*, допустимая максимальная длинна обрабатываемого сигнала не может быть больше величины $n^*_{\max} \approx 22$. Очевидно, что практический интерес такие длины не представляют.

Случай 2. $q_k = 1$.

Случай $q_k = 1$ имеет большое практическое значение, поскольку он соответствует выбору представления КИХ в виде многочлена (полинома или полиномиального сплайна в ситуации, когда первоначальное представление получено для непрерывной КИХ). Для случаев $k = 0, k = 1$ имеем:

$$\left|\varepsilon_0^y(n)\right| = \left|\varepsilon_0(n)\right| \le \varepsilon_{\max} \qquad (n \ge 0), \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \max\left|\varepsilon_1^y(n)\right| &= \max\left|\varepsilon_1^y(n-1) + \varepsilon_0^y(n) + \varepsilon_1(n)\right| = \\ &= \max\left(\left|\varepsilon_1^y(n-1)\right|\right) + 2\varepsilon_{\max} = (2n+1)\varepsilon_{\max}. \end{aligned} \tag{21}$$

Для $k = 2$ имеем:

$$\begin{aligned} \max\left|\varepsilon_2^y(n)\right| &= \max\left|\varepsilon_2^y(n-1) + \varepsilon_1^y(n) + \varepsilon_2(n)\right| = \\ &= \max\left(\left|\varepsilon_2^y(n-1)\right|\right) + \max\left(\left|\varepsilon_1^y(n)\right|\right) + \varepsilon_{\max} = \\ &= \max\left(\left|\varepsilon_2^y(n-1)\right|\right) + 2(n+1)\varepsilon_{\max}. \end{aligned}$$

Полученное неоднородное линейное рекуррентное соотношение относительно функции $\max\left|\varepsilon_2^y(n)\right|$ имеет решение в виде:

$$\begin{aligned} \max\left|\varepsilon_2^y(n)\right| &= \max\left(\left|\varepsilon_2^y(0)\right|\right) + \varepsilon_{\max} n(n+3) = \\ &= \varepsilon_{\max}\left(n^2 + 3n + 1\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Для $k = 3$ получаем:

$$\begin{aligned} \max\left|\varepsilon_3^y(n)\right| &= \max\left|\varepsilon_3^y(n-1) + \varepsilon_2^y(n) + \varepsilon_3(n)\right| = \\ &= \max\left(\left|\varepsilon_3^y(n-1)\right|\right) + \max\left(\left|\varepsilon_2^y(n)\right|\right) + \varepsilon_{\max} = \\ &= \max\left(\left|\varepsilon_2^y(n-1)\right|\right) + \varepsilon_{\max}\left(n^2 + 3n + 2\right). \end{aligned}$$

Решая это неоднородное линейное рекуррентное соотношение относительно $\max\left|\varepsilon_3^y(n)\right|$, имеем:

$$\begin{aligned} \max\left|\varepsilon_3^y(n)\right| &= \max\left(\left|\varepsilon_3^y(0)\right|\right) + \varepsilon_{\max}\left(\frac{n}{3}\left(n^2 + 11\right) + 2n^2\right) = \\ &= \varepsilon_{\max}\left(\frac{n^3}{3} + 2n^2 + \frac{11}{3}n + 1\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Учитывая практическую важность кубических сплайнов, последнее соотношение оформим в виде предложения.

Предложение 6. *Для рекуррентного уравнения обработки (16) с параметрами* $|q_k| = 1$ $\left(k = \overline{0,3}\right)$ *максимальная погрешность выходного сигнала задается выражением (23).*

Вводя обозначение для многочлена порядка K над $\mathbf{Q}$ в виде

$$p_K(m) = \sum_{j=0}^{K} \xi_j m^j, \quad \left(\xi_j \in \mathbf{Q}\right),$$

можно показать, что для произвольного k имеет место следующее предложение.

Предложение 7. *Для рекуррентного уравнения обработки (16) с параметрами* $|q_k| = 1$ $(k \ge 0)$ *максимальная погрешность выходного сигнала удовлетворяет соотношению*

$$\max\left|\varepsilon_k^y(n)\right| = \varepsilon_{\max} p_k(n). \tag{24}$$

На основании полученных соотношений можно указать границы применимости алгоритма модели CR для случая КИХ, заданной в виде полинома или полиномиального сплайна *K*-ого порядка. А именно: в общем случае для рекуррентного уравнения обработки (16) с параметрами $|q_k| = 1$ $\left(k = \overline{1,K}\right)$ максимальная погрешность результата не превышает заданную максимальную погрешность Δ, если максимальная длина обрабатываемого сигнала не превышает величины

$$n^*_{\max} = \max_{n \in \left\{n:\ n \in \mathbf{N} \wedge \left(p_K(n) \le \frac{\Delta}{\varepsilon_{\max}}\right)\right\}} n. \tag{25}$$

В важном частном случае КИХ в виде кубических сплайнов, то есть для *K*=3, выражение (25) можно конкретизировать для практического использования, воспользовавшись явным выражением для многочлена $p_K(m)$ из (23). Результаты представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Допустимая длина входного сигнала в алгоритме модели CR для заданной максимальной погрешности Δ выходного сигнала

Допустимая погрешность Δ	Тип C/C++	Количество верных разрядов: десятичных	Количество верных разрядов: двоичных	Размеры сигнала
1	float	7	23	215
	double	16	53	215 443
	long double	18	60	1000000
0,1	float	7	23	100
	double	16	53	100 000
	long double	18	60	464 158
0,01	float	7	23	46
	double	16	53	46 415
	long double	18	60	215 443

0,001	float	7	23	21
	double	16	53	21 544
	long double	18	60	100 000

Как видно из этой таблицы, форматов *double* и *long double* для вещественных чисел хватает для получения достаточно точных результатов ЛЛФ для сигналов с длиной до 100 000 отсчетов. То есть эти форматы годятся для использования в алгоритме модели CR для большинства реальных приложений.

Практические рекомендации по выбору КИХ $\{g_h(k)\}$, $\{g_x(k)\}$ в алгоритме модели CR

Леммы 2 и 3, предложения 5-7 и следствие 2 позволяют сформулировать конструктивные правила, которых следует придерживаться при задании допустимых параметров алгоритма модели CR, в частности, отсчетов КИХ $\{g_h(k)\}_{k=0}^{K_h-1}$ и $\{g_x(k)\}_{k=0}^{K_x-1}$. Эти правила оформлены в виде следствия.

Следствие 3

(правила выбора КИХ $\{g_h(k)\}_{k=0}^{K_h-1}$, $\{g_x(k)\}_{k=0}^{K_x-1}$).

- Если в используемой ПЭВМ и операционной системе представление данных (сигналов, КИХ и др.) и операции с ними производятся абсолютно точно (например, заданы сигналы над $\mathbf{GF}(p)$), тогда выбор КИХ произволен и индуцированный алгоритм (модели CR) всегда является устойчивым.
- Если в используемой ПЭВМ и операционной системе либо представление данных, либо операции с ними производятся с погрешностями (например, заданы сигналы над $\mathbf{R}$ или над $\mathbf{C}$), тогда для устойчивости индуцированного алгоритма модели CR выбор КИХ следует ограничить. А именно: нули ПФ $G_x(z), G_h(z)$ должны быть расположены внутри или на границе единичной окружности Z-плоскости.
- В последнем случае, если хотя бы один из нулей расположен на границе единичной окружности Z-плоскости, тогда выбор формата представления вещественных чисел производится исходя из допустимой максимальной погрешности результата на основании предложений 6-7 и соотношения (25).

В простейших ситуациях для выбора формата представления вещественных чисел и определения максимально возможной длины обрабатываемых сигналов можно руководствоваться таблицей 2.

Заключение

Представлен анализ устойчивости эффективных алгоритмов ЛЛФ сигналов с помощью двух способов. Первый из них использует традиционно применяемый подход, основанный на анализе ПФ ЛПП системы. Во втором способе используется подход, основанный на анализе максимальной погрешности выходного сигнала. Для второго способа указаны допустимые длины входных сигналов, обработка которых может производиться «устойчиво» эффективными алгоритмами с КИХ определенного типа.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проекты: № 06-01-00616-а, 09-01-00434-а; российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE), гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-3086.2008.9) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий», проект 2.12.

Литература

1. **Мясников, В.В.** Эффективный алгоритм над множеством алгоритмов вычисления свертки / В.В. Мясников // Компьютерная оптика. - 2006. – Вып. 29. - С. 78-117.
2. **Myasnikov, V.V.** Efficient Algorithm under the set of convolution algorithms / V.V. Myasnikov // 8-th International Conference on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies (PRIA-8’2007): Conference Proceedings in 3 volumes. Vol. 2 / Mari State Technical University. - Yoshkar-Ola, the Russian Federation, 2007. - P. 128-132.
3. Introduction to digital filtering / edited by R.E.Bogner and A.G.Constantinides. - New York: Wiley, 1975. – 198 p.
4. Gold, B. Digital Processing of Signals / B.Gold, C.M.Rader. - New York: McGraw-Hill Book Company, 1969.
5. Методы компьютерной обработки изображений. Под редакцией В.А. Сойфера / М.В. Гашников, Н.И. Глумов, Н.Ю.Ильясова, В.В. Мясников [и др.]; Под ред. В.А. Сойфера. - 2-е изд., испр. - М.: Физматлит, 2003. - 784 с. - ISBN 5-9221-0270-2.
6. **Oppenheim, A.V.** Discrete-Time Signal Processing (Second Edition) / A.V. Oppenheim and R.W. Schafer, with J.R. Buck. - Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1999.
7. **Rabiner, L.R.** Theory and Application of Digital Signal Processing/ L. R. Rabiner, B. Gold. - Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1975.
8. **Журавлев, Ю.И.** Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации / Ю.И. Журавлев // Проблемы кибернетики. – 1978. - № 33. - С. 5–68.

References

9. **Myasnikov, V.V.** Efficient algorithm over the set of the convolution algorithms / V.V. Myasnikov // Computer optics. - 2006. – Vol. 29. - P. 78-117. – (In Russian).
10. **Myasnikov, V.V.** Efficient Algorithm under the set of convolution algorithms / V.V. Myasnikov // 8-th International Conference on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies (PRIA-8’2007): Conference Proceedings in 3 volumes. Vol. 2 / Mari State

Technical University. - Yoshkar-Ola, the Russian Federation, 2007. - P. 128-132.

11. **Bogner, R.E.** Introduction to digital filtering / edited by R.E.Bogner and A.G.Constantinides. -London, New York: Wiley, 1975. – 198 p.
12. **Gold, B.** Digital Processing of Signals / B.Gold, C.M.Rader. - New York: McGraw-Hill Book Company, 1969.
13. Computer image processing methods (Secondary Edition) / edited by V.A. Soifer. - Moscow: Fizmatlit, 2003. - 784 p. - ISBN 5-9221-0270-2. – (In Russian).
14. **Oppenheim, A.V.** Discrete-Time Signal Processing (Second Edition) / A.V. Oppenheim and R.W. Schafer, with J.R. Buck. - Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1999.
15. **Rabiner, L.R.** Theory and Application of Digital Signal Processing/ L. R. Rabiner, B. Gold. - Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1975.
16. **Zhuravlev, Yu.I.** On the algebraic approach to solve the recognition and classification tasks / Yu.I. Zhuravlev // Cybernetics problems. – 1978. - № 33. - P. 5–68. – (In Russian).

STABILITY ANALYSIS OF THE EFFICIENT SIGNAL LINEAR LOCAL FILTRATION ALGORITHM

Vladislav Valerievich Myasnikov (leading researcher, e-mail: vmyas@smr.ru),
Image Processing Systems Institute of the RAS

Abstract

The stability analysis of a new class of efficient algorithms for signal linear local filtration is presented in the work. The analysis is performed on two ways. The first one uses well-known approach (which is used in digital signal processing) that is based on the analysis of transfer function of linear system with fixed parameters. The second approach which is proposed in the current work is based on the analysis of the maximal deviation of the output signal. Advantage of the second approach consists in the opportunity of linear processing system stability analysis for the case of finite input and output signals. The analysis task statement that takes into account the signal finiteness is relevant specifically for efficient algorithms as they are directed on the work with such signals.

Key words: linear local filtering, efficient algorithm, stability analysis.

В редакцию поступила 29.05.2009 г