ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ДИФРАКЦИОННЫХ ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ФОКУСИРОВКИ В ПЛОСКУЮ КРИВУЮ В НЕПАРАКСИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

Антон Юрьевич Дмитриев (стажер-исследователь,e-mail: tonydm@mail.ru),
Леонид Леонидович Досколович (ведущий научный сотрудник, e-mail: leonid@smr.ru),
Сергей Иванович Харитонов (старший научный сотрудник, e-mail: prognoz@smr.ru)
Учреждение Российской академии наук Институт систем обработки изображений РАН,
Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П. Королева

Аннотация

Получено общее аналитическое представление для эйконала дифракционного оптического элемента (ДОЭ) для фокусировки в произвольно ориентированную в пространстве плоскую кривую в непараксиальном случае. Эйконал записан в специальных криволинейных координатах. Расчет функции эйконала из условия фокусировки в линию с заданным распределением интенсивности сведен к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Проведен расчет ДОЭ для фокусировки в отрезок. Результаты моделирования показывают высокое качество фокусировки в отрезок.

Ключевые слова: эйконал, дифракционный оптический элемент, криволинейные координаты, интенсивность, световое поле, линейная плотность.

Введение

В работах [1-10] рассмотрен расчет ДОЭ для фокусировки в линию произвольной формы. Расчет ДОЭ производится в приближении геометрической оптики. Задача расчета ДОЭ формулируется как задача расчета эйконала (или фазовой функции) светового поля из условия фокусировки в линию. Ввиду сложности решения обратной задачи фокусировки аналитические решения получены только для фокусировки в параксиальном приближении в простые линии, такие как отрезок, кольцо, дуга окружности и т.п. [1, 2, 4, 8-10]. Требование параксиальности существенно ограничивает области применения ДОЭ. В общем непараксиальном случае расчет эйконала ДОЭ требует решения нелинейного уравнения для каждой точки апертуры [1, 2, 4-7].

В работах [1, 2] предложено использовать специальную криволинейную систему координат, значительно упрощающую расчет в параксиальном приближении. В работах [11, 12] рассматривается задача фокусировки в кривую, лежащую в плоскости, параллельной плоскости ДОЭ. Предложено использовать другую криволинейную систему координат, позволяющую получить простое аналитическое выражение для функции эйконала в общем, непараксиальном случае.

В данной работе получено общее аналитическое представление для эйконала ДОЭ для фокусировки в произвольно ориентированную в пространстве плоскую кривую в непараксиальном случае. Криволинейные координаты, в которых записан эйконал, являются обобщением координат, предложенных в [11,12]. Функция эйконала зависит от функции $a(\xi)$, определяющей углы прихода лучей в точки кривой $\mathbf{X}(\xi)$. Функция $a(\xi)$ определяет распределение энергии вдоль кривой фокусировки. Расчет функции $a(\xi)$ сведен к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. В качестве примера приведен расчет функции эйконала из условия фокусировки в отрезок.

1. Расчет эйконала ДОЭ в декартовой системе координат

Рассмотрим расчет ДОЭ для фокусировки в кривую (рис. 1). ДОЭ расположен в плоскости z=0 при $\mathbf{u} \in D$, где D – область апертуры, $\mathbf{u} = (u, v)$ - декартовы координаты. Комплексная амплитуда падающего на ДОЭ пучка имеет вид

$$w_0(\mathbf{u}) = \sqrt{I_0(\mathbf{u})}\exp(ik\psi_0(\mathbf{u})), \quad (1)$$

где $I_0(\mathbf{u})$ – интенсивность пучка, $\psi_0(\mathbf{u})$ – эйконал, $k = 2\pi/\lambda$, λ – длина волны. Линия фокусировки задана параметрическим уравнением

$$\mathbf{X}(\xi) = (X(\xi), Y(\xi), Z(\xi)), \quad (2)$$

где $\xi \in [0, d]$ – натуральный параметр. Вдоль линии требуется сформировать заданное распределение энергии $I(\xi)$, $\xi \in [0, d]$.

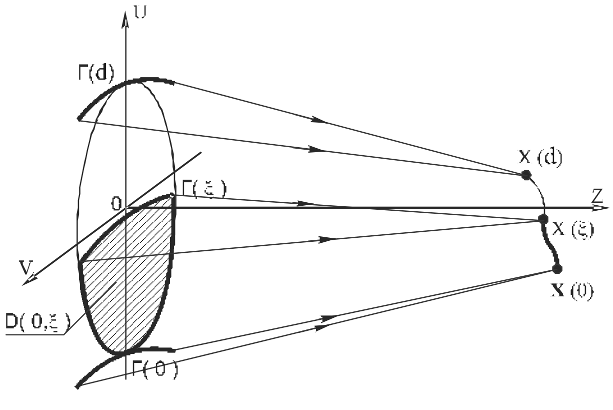

Рис. 1. Задача фокусировки в кривую

При расчете ДОЭ будем считать выполненным приближение тонкого оптического элемента. Тогда изменение эйконала светового пучка $\Delta\psi$ при его прохождении через ДОЭ пропорционально высоте микрорельефа ДОЭ, а амплитуда пучка сохраняется.

В простейшем случае изменение эйконала можно записать в виде:

$$\Delta\psi(\mathbf{u}) = (n-1)h(\mathbf{u}), \tag{3}$$

где n – показатель преломления материала ДОЭ.

Таким образом, эйконал непосредственно после ДОЭ можно записать в виде

$$\psi(\mathbf{u}) = \psi_0(\mathbf{u}) + \Delta\psi(\mathbf{u}). \tag{4}$$

Распространение светового пучка после прохождения через ДОЭ определяется эйконалом этого пучка в плоскости z=0. Таким образом, расчет функции высоты микрорельефа ДОЭ сводится к расчету функции эйконала $\psi(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in D$ из условия фокусировки пучка с интенсивностью $I_0(\mathbf{u})$ в линию (2) с распределением энергии $I(\xi)$ [1-10].

Согласно общему уравнению эйконала единичный вектор луча, выходящего с апертуры, определяется производными эйконала в виде [13]:

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \left(p_x(\mathbf{u}), p_y(\mathbf{u}), p_z(\mathbf{u})\right) = \\ = \left(\frac{\partial\psi(\mathbf{u})}{\partial u}, \frac{\partial\psi(\mathbf{u})}{\partial v}, \sqrt{1 - \left(\frac{\partial\psi(\mathbf{u})}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi(\mathbf{u})}{\partial v}\right)^2}\right). \tag{5}$$

Так как при фокусировке все лучи с апертуры приходят на кривую (2), первые два компонента вектора $\mathbf{p}(\mathbf{u})$ можно записать в виде [1, 2]:

$$\begin{gathered} \frac{\partial\psi(\mathbf{u})}{\partial u} = p_x(\mathbf{u}) = \\ = \frac{\left(X(\xi(\mathbf{u})) - u\right)}{\sqrt{\left(X(\xi(\mathbf{u})) - u\right)^2 + \left(Y(\xi(\mathbf{u})) - v\right)^2 + Z^2(\xi(\mathbf{u}))}}, \\ \frac{\partial\psi(\mathbf{u})}{\partial v} = p_y(\mathbf{u}) = \\ = \frac{\left(Y(\xi(\mathbf{u})) - v\right)}{\sqrt{\left(X(\xi(\mathbf{u})) - u\right)^2 + \left(Y(\xi(\mathbf{u})) - v\right)^2 + Z^2(\xi(\mathbf{u}))}}. \end{gathered} \tag{6}$$

Функция $\xi(\mathbf{u})$ определяет лучевое соответствие между точками на апертуре и точками на кривой (2). Функция $\xi(\mathbf{u}) = \xi_0$ определяет линию $\Gamma(\xi_0)$ в плоскости $z=0$, лучи из точек которой приходят в точку кривой $\mathbf{X}(\xi_0)$ (рис.1). Линию $\Gamma(\xi_0)$ принято называть слоем [1-10].

Прямым дифференцированием легко показать, что функция эйконала, удовлетворяющая уравнениям (6), может быть записана в виде:

$$\psi(u,v) = \\ = -\sqrt{\left(u - X(\xi(\mathbf{u}))\right)^2 + \left(v - Y(\xi(\mathbf{u}))\right)^2 + Z^2(\xi(\mathbf{u}))} + \\ + \psi_l(\xi(\mathbf{u})), \tag{7}$$

$$\frac{\left(u - X(\xi)\right)\dfrac{dX(\xi)}{d\xi} + \left(v - Y(\xi)\right)\dfrac{dY(\xi)}{d\xi} - Z(\xi)\dfrac{dZ(\xi)}{d\xi}}{\sqrt{\left(u - X(\xi)\right)^2 + \left(v - Y(\xi)\right)^2 + Z^2(\xi(u,v))}} = \\ = c(\xi), \tag{8}$$

где $\psi_l(\xi) = -\int_0^{\xi} c(t)\,dt$, $c(\xi)$ определяет распределение энергии вдоль линии фокусировки. Уравнение (8) определяет функцию лучевого соответствия $\xi = \xi(u,v)$. На слое $\Gamma(\xi_0)$ уравнение (7) принимает вид:

$$\psi(u,v) = -\sqrt{\left(u - X(\xi_0)\right)^2 + \left(v - Y(\xi_0)\right)^2 + Z^2(\xi_0)} + \\ + \psi_l(\xi_0). \tag{9}$$

Уравнение (9) является эйконалом (в плоскости z=0) сходящегося сферического пучка с фокусом в точке $\mathbf{X}(\xi_0)$. Константа

$$\psi_l(\xi_0) = \psi(u,v) + \\ + \sqrt{\left(u - X(\xi_0)\right)^2 + \left(v - Y(\xi_0)\right)^2 + Z^2(\xi_0)} \tag{10}$$

равна оптической длине пути лучей, приходящих в точку $\mathbf{X}(\xi_0)$ и определяющих эйконал в точке $\mathbf{X}(\xi_0)$.

Определим тип линий, которые образуют слои. Слой является пересечением плоскости z=0 и кругового конуса

$$\frac{\left(u - X(\xi)\right)\dfrac{dX(\xi)}{d\xi} + \left(v - Y(\xi)\right)\dfrac{dY(\xi)}{d\xi} - Z(\xi)\dfrac{dZ(\xi)}{d\xi}}{\sqrt{\left(u - X(\xi)\right)^2 + \left(v - Y(\xi)\right)^2 + Z^2(\xi)}} = \\ = c(\xi), \tag{11}$$

где $c(\xi)$ - косинус угла при вершине конической поверхности [1, 2, 5, 7]. Вершиной конуса является точка $\mathbf{X}(\xi)$. Ось конуса совпадает с касательной к фокальной кривой $\mathbf{t} = \left(\dfrac{dX(\xi)}{d\xi}, \dfrac{dY(\xi)}{d\xi}, \dfrac{dZ(\xi)}{d\xi}\right)$. Вектор $\mathbf{t}$ является единичным, т.к. ξ – натуральный параметр.

Чтобы получить необходимое распределение интенсивности $I(\xi)$, $\xi \in [0,d]$ на кривой фокусировки, необходимо определить функцию $c(\xi)$ в уравнениях (7), (8) из закона сохранения энергии. Для этого приравняем световой поток, падающий на часть апертуры фокусатора $D(0,\xi)$, заключенную между начальным и текущим слоями $\Gamma(0)$ и $\Gamma(\xi)$, к световому потоку, проходящему через часть фокальной кривой, заключенную между точками $\mathbf{X}(0)$ и $\mathbf{X}(\xi)$ (рис. 1):

$$\iint\limits_{D(0,\xi)} I_0(u,v)\,du\,dv = \int\limits_0^{\xi} I(\xi)\,d\xi\,. \qquad (12)$$

Функция $c(\xi)$ входит в (12) неявно, она содержится в границах области интегрирования $D(0,\xi)$ (рис.1).

В общем случае расчет функции $c(\xi)$ из уравнения сохранения энергии (12) и функции $\xi(\mathbf{u})$ из уравнения слоя (8) являются сложными вычислительными задачами, состоящими в решении нелинейных уравнений. При этом расчет функции $\xi(\mathbf{u})$ требует решения нелинейного уравнения слоя для каждой точки апертуры ДОЭ.

2. Расчет эйконала ДОЭ в криволинейной системе координат

Расчет ДОЭ может быть существенно упрощен введением специально выбранных криволинейных координат.

Будем рассматривать задачу фокусировки в плоскую кривую

$$\mathbf{X}(\xi) = \left(X(\xi), Y(\xi), Z\left(X(\xi), Y(\xi)\right)\right), \qquad (13)$$

лежащую в плоскости с вектором нормали $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ и проходящую через точку $\mathbf{x}_0 = (0, 0, f)$.

Так как кривая (13) является плоской, $Z(\xi)$ зависит от $X(\xi)$ и $Y(\xi)$.

Уравнение плоскости фокусировки запишем в виде:

$$b_x x + b_y y + b_z (z - f) = 0\,, \qquad (14)$$

Подставив кривую (13) в (14), получим выражение для $Z(\xi)$:

$$Z(X(\xi), Y(\xi)) = -\frac{b_x X(\xi) + b_y Y(\xi)}{b_z} + f\,, \qquad (15)$$

$$\frac{dZ(\xi)}{d\xi} = -\frac{b_x \dfrac{dX(\xi)}{d\xi} + b_y \dfrac{dY(\xi)}{d\xi}}{b_z}\,. \qquad (16)$$

Вектор нормали к кривой в плоскости фокусировки может быть представлен векторным произведением нормали к плоскости $\mathbf{b}$ и касательной к кривой $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{n} = \mathbf{b}\times\mathbf{t} = \left(N_x(\xi), N_y(\xi), N_z(\xi)\right) =$$
$$= \left(-b_z \frac{dY(\xi)}{d\xi} + b_y \frac{dZ(\xi)}{d\xi}; b_z \frac{dX(\xi)}{d\xi} - b_x \frac{dZ(\xi)}{d\xi} - \right. \qquad (17)$$
$$\left. -b_y \frac{dX(\xi)}{d\xi} + b_x \frac{dY(\xi)}{d\xi}\right).$$

Разложим вектор образующей конуса (11) $\mathbf{q}$ по векторам $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{q} = \mathbf{t}\cos\omega + \mathbf{n}\sin\omega\sin\psi - \mathbf{b}\sin\omega\cos\psi\,, \qquad (18)$$

где ω – угол при вершине конической поверхности, ψ – угол, определяющий положение луча на образующей конуса. Угол ψ отсчитывается от плоскости $\mathbf{n}$=0.

Найдем пересечение образующей конуса с плоскостью ДОЭ:

$$\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{X}(\xi) - \mathbf{q}\cdot l\,. \qquad (19)$$

Из уравнений (17), (18) и (19) получим:

$$u(\xi) = X(\xi) - \left(\frac{dX(\xi)}{d\xi}\cos\omega + \right. \qquad (20.1)$$
$$\left. + N_x(\xi)\sin\omega\sin\psi - b_x\sin\omega\cos\psi\right)\cdot l,$$

$$v(\xi) = Y(\xi) - \left(\frac{dY(\xi)}{d\xi}\cos\omega + \right. \qquad (20.2)$$
$$\left. + N_y(\xi)\sin\omega\sin\psi - b_y\sin\omega\cos\psi\right)\cdot l,$$

$$z(\xi) = Z(\xi) - \left(\frac{dZ(\xi)}{d\xi}\cos\omega + \right. \qquad (20.3)$$
$$\left. + N_z(\xi)\sin\omega\sin\psi - b_z\sin\omega\cos\psi\right)\cdot l = 0$$

Из (20.3) найдем параметр l:

$$l = \frac{Z(\xi)}{\left(\dfrac{dZ(\xi)}{d\xi}\cos\omega + N_z(\xi)\sin\omega\sin\psi - b_z\sin\omega\cos\psi\right)}\,. \qquad (21)$$

Подставив (21) в (20.1) и (20.2), нетрудно получить:

$$u(\xi) = X(\xi) - \frac{Z(\xi)\left(\dfrac{dX(\xi)}{d\xi}\operatorname{ctg}\omega\dfrac{1}{\cos\psi} + N_x(\xi)\operatorname{tg}\psi - b_x\right)}{\left(\dfrac{dZ(\xi)}{d\xi}\operatorname{ctg}\omega\dfrac{1}{\cos\psi} + N_z(\xi)\operatorname{tg}\psi - b_z\right)}, \qquad (22.1)$$

$$v(\xi) = Y(\xi) - \frac{Z(\xi)\left(\dfrac{dY(\xi)}{d\xi}\operatorname{ctg}\omega\dfrac{1}{\cos\psi} + N_y(\xi)\operatorname{tg}\psi - b_y\right)}{\left(\dfrac{dZ(\xi)}{d\xi}\operatorname{ctg}\omega\dfrac{1}{\cos\psi} + N_z(\xi)\operatorname{tg}\psi - b_z\right)}. \qquad (22.2)$$

Введем следующие переменные:

$$\eta = f\operatorname{tg}\psi\,,\ a(\xi) = \operatorname{ctg}\omega = \frac{c(\xi)}{\sqrt{1 - c^2(\xi)}}\,, \qquad (23.1)$$

тогда

$$\sqrt{f^2 + \eta^2} = \frac{f}{\cos\psi} = K(\eta)\,. \qquad (23.2)$$

Подставив (23) в (22), получим криволинейные координаты в плоскости задания эйконала ДОЭ:

$$u(\xi,\eta) = X(\xi) - \frac{Z(\xi)\left(\dfrac{dX(\xi)}{d\xi}a(\xi)\sqrt{f^2 + \eta^2} + N_x(\xi)\eta - fb_x\right)}{\dfrac{dZ(\xi)}{d\xi}a(\xi)\sqrt{f^2 + \eta^2} + N_z(\xi)\eta - fb_z}, \qquad (24.1)$$

$$v(\xi,\eta)=Y(\xi)-$$
$$-\frac{Z(\xi)\left(\dfrac{dY(\xi)}{d\xi}a(\xi)\sqrt{f^2+\eta^2}+N_y(\xi)\eta-fb_y\right)}{\dfrac{dZ(\xi)}{d\xi}a(\xi)\sqrt{f^2+\eta^2}+N_z(\xi)\eta-fb_z}. \quad (24.2)$$

Координата ξ в (24) определяет слой, а координата η - положение точки на слое $\Gamma(\xi)$.

Подставим координаты (24) в уравнения (9) и получим функцию эйконала в криволинейных координатах:

$$\psi\left(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta)\right)=$$
$$=-\left(\left(u(\xi,\eta)-X(\xi)\right)^2+\left(v(\xi,\eta)-Y(\xi)\right)^2+\right. \quad (25)$$
$$\left.+Z^2\left(X(\xi),Y(\xi)\right)\right)^{0.5}+\psi_l(\xi),$$

где $\psi_l(\xi)=-\int\limits_0^{\xi}\frac{a(t)}{\sqrt{1+a^2(t)}}dt$.

3. Формирование заданной линейной плотности энергии вдоль кривой фокусировки

Эйконал (25) зависит от функции $a(\xi)$, задающей углы раствора конусов лучей, приходящих на линию фокусировки. Рассмотрим расчет $a(\xi)$ из условия формирования заданного распределения энергии вдоль кривой фокусировки. Световой поток, заключенный между слоями $\Gamma(\xi),\Gamma(\xi+\Delta\xi)$, имеет вид

$$\Delta\Phi=\Delta\xi\int\limits_{\eta_1(\xi)}^{\eta_2(\xi)}I_0(\xi,\eta)J(\xi,\eta)d\eta, \quad (26)$$

где

$$J(\xi,\eta)=\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\xi}\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial\eta}-\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\eta}\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial\xi}=$$
$$=\frac{da(\xi)}{d\xi}S_1(\xi,\eta)+S_2(\xi,\eta) \quad (27)$$

– якобиан преобразования координат,
где

$$S_1(\xi,\eta)=Z(\xi)K(\eta)\times$$
$$\times\left[\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial\eta}\frac{\eta Q_2(\xi)+fN_y(\xi)}{Q_1^2(\xi,\eta)}-\right. \quad (28)$$
$$\left.-\frac{\partial u(\xi,\eta)}{d\eta}\frac{\eta Q_3(\xi)-fN_x(\xi)}{Q_1^2(\xi,\eta)}\right],$$

$$S_2(\xi,\eta)=\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial\eta}\times$$
$$\times\left[\frac{-\eta Q_2(\xi)-fN_y(\xi)}{Q_1(\xi,\eta)}+\right.$$
$$+\frac{Z(\xi)\left(\dfrac{d^2X(\xi)}{d\xi^2}a(\xi)K(\eta)+\eta\dfrac{\partial N_x(\xi)}{\partial\xi}\right)}{Q_1(\xi,\eta)}+$$
$$+\frac{Z(\xi)\left(\dfrac{dX(\xi)}{d\xi}a(\xi)K(\eta)+\eta N_x(\xi)-fb_x\right)}{Q_1^2(\xi,\eta)}\times$$
$$\left.\times\frac{\left(\dfrac{d^2Z(\xi)}{d\xi^2}a(\xi)K(\eta)+\eta\dfrac{dN_z(\xi)}{d\xi}\right)}{Q_1^2(\xi,\eta)}\right]-$$
$$-\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\eta}\left[\frac{-\eta Q_3(\xi)+fN_x(\xi)}{Q_1(\xi,\eta)}+\right.$$
$$+\frac{Z(\xi)\left(\dfrac{d^2Y(\xi)}{d\xi^2}a(\xi)K(\eta)+\eta\dfrac{\partial N_y(\xi)}{\partial\xi}\right)}{Q_1(\xi,\eta)}+$$
$$+\frac{Z(\xi)\left(\dfrac{dY(\xi)}{d\xi}a(\xi)K(\eta)+\eta N_y(\xi)-fb_y\right)}{Q_1^2(\xi,\eta)}\times$$
$$\left.\times\frac{\left(\dfrac{d^2Z(\xi)}{d\xi^2}a(\xi)K(\eta)+\eta\dfrac{dN_z(\xi)}{d\xi}\right)}{Q_1^2(\xi,\eta)}\right], \quad (29)$$

$$Q_1(\xi,\eta)=\frac{dZ(\xi)}{d\xi}a(\xi)K(\eta)+N_z(\xi)\eta-fb_z,$$
$$Q_2(\xi)=-\frac{dX(\xi)}{d\xi}N_z(\xi)+\frac{dZ(\xi)}{d\xi}N_x(\xi),$$
$$Q_3(\xi,)=-\frac{dY(\xi)}{d\xi}N_z(\xi)+\frac{dZ(\xi)}{d\xi}N_y(\xi).$$

Пределы интегрирования $\eta_1(\xi),\eta_2(\xi)$ в (26) определяют точки пересечения слоя $\Gamma(\xi)$ с границей апертуры ДОЭ. В частности, для круглой апертуры радиуса R функции $\eta_1(\xi),\eta_2(\xi)$ в (7) находятся из уравнения

$$u^2(\xi,\eta)+v^2(\xi,\eta)=R^2. \quad (30)$$

По построению элемента световой поток $\Delta\Phi$, заключенный между слоями $\Gamma(\xi),\Gamma(\xi+\Delta\xi)$, переходит в элемент кривой длины $\Delta\xi$, заключенный между точками $\mathbf{X}(\xi)$, $\mathbf{X}(\xi+\Delta\xi)$. Соответственно, световой поток, приходящийся на единицу длины кривой фокусировки, имеет вид

$$I(\xi)=\lim_{\Delta\xi\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta\xi}=\int_{\eta_1(\xi)}^{\eta_2(\xi)} I_0(\xi,\eta)J(\xi,\eta)d\eta . \qquad (31)$$

Функцию (31) будем называть линейной плотностью энергии вдоль кривой [1, 2, 4-7]. Уравнение (31) позволяет определить функцию $a(\xi)$ из условия формирования заданной линейной плотности $I(\xi)$. Действительно, подставив (27) в (31), получим для $a(\xi)$ следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{da(\xi)}{d\xi}=\frac{I(\xi)-\int_{\eta_1(\xi)}^{\eta_2(\xi)} I_0(\xi,\eta)S_2(\xi,\eta)d\eta}{\int_{\eta_1(\xi)}^{\eta_2(\xi)} I_0(\xi,\eta)S_1(\xi,\eta)d\eta} . \qquad (32)$$

Таким образом, задача фокусировки в кривую с заданной линейной плотностью $I(\xi)$ сведена к решению дифференциального уравнения первого порядка (32), разрешенного относительно производной. Для решения уравнения (32) могут быть использованы стандартные численные методы типа метода Рунге-Кутта.

4. Фокусировка в отрезок

Рассмотрим фокусировку в отрезок

$$\mathbf{X}(\xi)=\left(0,\xi-\frac{d}{2},Z(Y(\xi))\right),\ \xi\in[0,d] \qquad (33)$$

с постоянной линейной плотностью $I(\xi)=I$, расположенный в плоскости с вектором нормали $\mathbf{b}=(0,\sin\alpha,\cos\alpha)$ и проходящей через точку $\mathbf{x}_0=(0,0,f)$. Апертуру будем считать эллипсом с полуосями $l_1=R$, $l_2=R/\cos\alpha$, а интенсивность падающего пучка – постоянной $I_0(\xi,\eta)=I_0$. Уравнение плоскости можно представить в виде:

$$y\sin\alpha+z\cos\alpha=f\cos\alpha . \qquad (34)$$

Из (34) получим выражения для $Z(\xi)$:

$$Z(\xi)=-Y(\xi)\operatorname{tg}\alpha+f . \qquad (35)$$

$$\frac{dZ(\xi)}{d\xi}=-\operatorname{tg}\alpha . \qquad (36)$$

Для отрезка (33) криволинейные координаты (24) имеют вид:

$$u(\xi,\eta)=-\frac{Z(\xi)\eta/\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\, a(\xi)\sqrt{f^2+\eta^2}+f\cos\alpha} , \qquad (37.1)$$

$$v(\xi,\eta)=Y(\xi)+ \\ +\frac{Z(\xi)\left(a(\xi)\sqrt{f^2+\eta^2}-f\sin\alpha\right)}{\operatorname{tg}\alpha\, a(\xi)\sqrt{f^2+\eta^2}+f\cos\alpha} . \qquad (37.2)$$

Дифференциальное уравнение (31) для отрезка принимает вид:

$$\frac{da}{d\xi}=\left(-\frac{\pi R^2}{d}-\right. \\ \left.-\int_{\eta_1(\xi)}^{\eta_2(\xi)}\frac{\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial\eta}\eta\operatorname{tg}\alpha-\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\eta}f}{a(\xi)\operatorname{tg}\alpha\sqrt{f^2+\eta^2}+f\cos\alpha}d\eta\right)\times \\ \times\left(\int_{\eta_1(\xi)}^{\eta_2(\xi)} Z(\xi)\sqrt{f^2+\eta^2}\times\right. \\ \left.\times\frac{\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial\eta}\eta\operatorname{tg}\alpha-\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\eta}f}{\left(a(\xi)\operatorname{tg}\alpha\sqrt{f^2+\eta^2}+f\cos\alpha\right)^2}d\eta\right)^{-1} . \qquad (38)$$

Пределы интегрирования $\eta_1(\xi),\eta_2(\xi)$ в (38) находятся из уравнения:

$$u^2(\xi,\eta)+\frac{v^2(\xi,\eta)}{\cos^2\alpha}=R^2 . \qquad (39)$$

На основе формул (25), (38) был проведен расчет эйконала для фокусировки в отрезок (33) при следующих параметрах: $\alpha=\pi/4$, $d=45\lambda$, $R=50\lambda$, $f=40\lambda$, длина волны λ = 1мкм. Полученная функция эйконала в декартовых координатах, взятая по модулю λ, приведена на рис. 2.

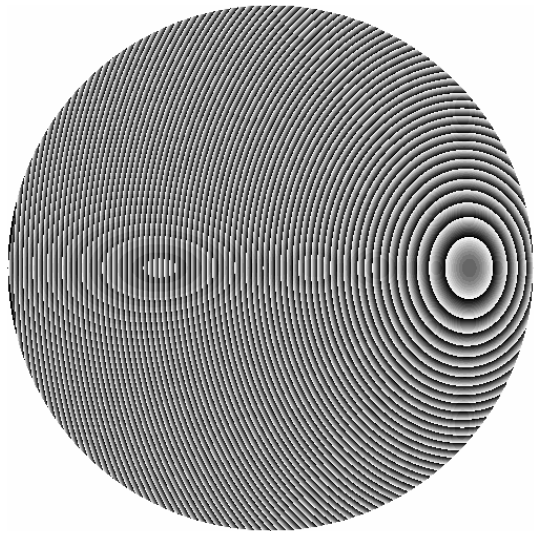

Рис. 2. Функция эйконала для фокусировки в отрезок

Для проверки качества фокусировки в отрезок был произведен расчет освещенности, получаемой в плоскости фокусировки при рассчитанном эйконале, в рамках геометрической оптики. В работах [14-16] предложено использовать усредненное интегральное представление для освещенности в плоскости фокусировки, справедливое в приближении геометрической оптики. Указанное представление имеет вид:

$$E(\mathbf{x})=\iint_D I_0(\mathbf{u}_e)\delta_\sigma(\mathbf{x}-\mathbf{x}(\mathbf{u}_e))d\mathbf{u}_e , \qquad (40)$$

где D – область апертуры фокусатора, $\mathbf{u}_e = (u_e, v_e)$ - декартовы координаты в плоскости эйконала, $\delta_\sigma(\mathbf{x})$ - аппроксимация δ-функции в виде гауссовой функции

$$\delta_\sigma(x, y) = \frac{1}{\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{\sigma^2}\right). \tag{41}$$

Функция $\mathbf{x}(\mathbf{u}_e)$ в (7) определяет координаты точек прихода лучей в плоскость фокусировки

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}_e) = \mathbf{u}_e + \nabla\psi(\mathbf{u}_e)\times \times\frac{f - v_e\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\dfrac{\partial\psi}{\partial v_e}\mathrm{tg}\,\alpha + \sqrt{1-\left(\nabla\psi(\mathbf{u}_e)\right)^2}}, \tag{42}$$

где $\nabla\psi(\mathbf{u}_e)$ - градиент эйконала. Выражение (40) ориентировано на расчет освещенности с использованием метода трассировки лучей [17]. В этом случае формула (40) дает усредненное значение освещенности по окрестности, определяемой «эффективной» шириной функции $\delta_\sigma(\mathbf{x})$. Величина этой окрестности обычно определяется шагом дискретизации в области наблюдения.

На рис. 3 представлена расчетная функция освещенности вдоль отрезка фокусировки.

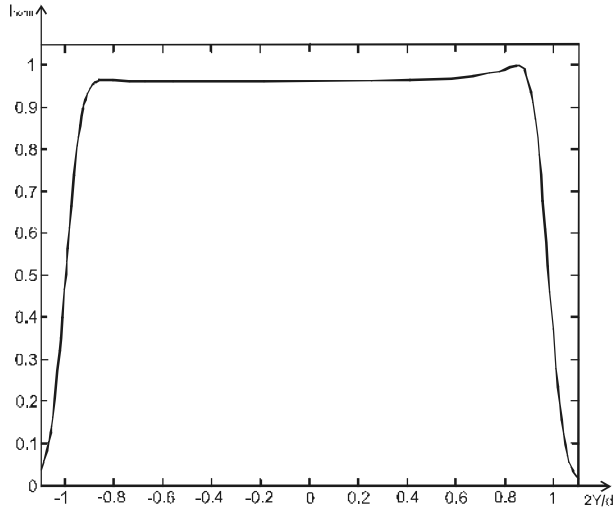

Рис. 3. Нормированная освещенность вдоль отрезка фокусировки

Рис. 3 показывает, что рассчитанный эйконал обеспечивают хорошее качество фокусировки в отрезок.

Заключение

Расчет функции эйконала из условия фокусировки в произвольно ориентированную в пространстве плоскую кривую в непараксиальном случае сведен к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Проведен расчет эйконала из условия фокусировки в отрезок для случая равномерного освещающего пучка. Показано, что рассчитанный эйконал обеспечивает хорошее качество фокусировки в отрезок.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке фонда «Фундаментальные исследования и высшее образование» (PG08-014-1), грантов РФФИ № 08-07-99005, 09-07-12147, 09-07-92421, 07-07-00210, Фонда содействия отечественной науке и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-3086.2008.9).

Литература

1. Methods for Computer Design of Diffractive Optical Elements. Edited by Victor A. Soifer // A Wiley Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2002, 764 p.
2. Дифракционная компьютерная оптика / под ред. В.А. Сойфера - М.: Физмалит, 2007. – Глава 3.
3. **Doskolovich L.L.,** Kazanskiy N.L., Soifer V.A., Kharitonov S.I., Perlo P. A DOE to form a line-shaped directivity diagram // Journal of Modern Optics, 2004, Vol. 51, № 13, pp. 1999-2005.
4. **V. Soifer,** V. Kotlyar, L. Doskolovich. *Iterative Methods for Diffractive Optical Elements Computation* // Taylor&Francis LTD, 1997, 244 p.
5. **Данилов В.А.** Теория когерентных фокусаторов / Б.Е.Кинбер, А.Е. Шилов // Компьютерная оптика. - М.: МЦНТИ, 1987. - Вып.1. - С.40-52.
6. **Гончарский А.В.** Решение обратной задачи фокусировки лазерного излучения в произвольную кривую / А.В. Гончарский, В.А. Данилов, В.В. Попов, А.М. Прохоров, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер, В.В. Степанов // Доклады АН СССР, 1983, Т.273, № 3. - С.605-608.
7. **Гончарский А.В.** Плоские фокусирующие элементы видимого диапазона / А.В. Гончарский, В.А. Данилов, В.В. Попов, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер, В.В. Степанов // Квантовая электроника, -1986. -Т.13. -№ 3. - С.660-662.
8. **Soifer V.A.,** Golub M.A. Diffractive micro-optical elements with non-point response // Proceedings SPIE. - 1992. - Vol.1751. - P.140-154.
9. **Doskolovich L.L.** Comparative analysis of different focusators into segment / L.L. Doskolovich N.L. Kazanskiy, V.A. Soifer // Optics and Laser Technology. - 1995. - Vol.27, №4. - P.207-213.
10. **Гончарский А.В.** Математические модели в задачах синтеза плоских оптических элементов // Компьютерная оптика. - М.: МЦНТИ, 1987. - Вып.1. - С.19-31.
11. **Дмитриев А.Ю.** Геометрооптический расчет фокусатора в линию в непараксиальном случае / А.Ю. Дмитриев, Л.Л. Досколович, С.И. Харитонов // Компьютерная оптика. – 2008. – Т.32, №4. – С. 343-347.
12. **Дмитриев А.Ю.** Геометрооптический расчет оптических элементов для фокусировки в линию в непараксиальном случае / А.Ю. Дмитриев, Л.Л. Досколович, С.И. Харитонов, М.А. Моисеев // Компьютерная оптика, -Т. 33. -№ 2. -2009. -С. 122-128.
13. **Борн, М.** Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф – М.: Наука, 1973.
14. **Белоусов А.А.** Градиентный метод решения задачи фокусировки в двумерную область при протяженном источнике / А.А. Белоусов, Л.Л. Досколович // Компьютерная оптика, -2007. -Т. 31. -№3. -С. 20-26.
15. **Belousov A. A.** A gradient method of designing optical elements for forming a specified irradiance on a curved surface / A. A. Belousov, L. L. Doskolovich, and S. I. Kharitonov // Journal of Optical Technology, Vol. 75, Issue 3, 2008, pp. 161-165

16. **Белоусов А.А.** Градиентный метод расчет эйконала для фокусировки в заданную область / А.А. Белоусов, Л.Л. Досколович, С.И. Харитонов // Автометрия, - 2007. -Т. 43. -№1. -С. 98-106.
17. **Young C., Wells D.** Ray Tracing Creations, 2d Ed. London. Waite Group Press, 1994.

References

1. Methods for Computer Design of Diffractive Optical Elements. Edited by Victor A. Soifer // A Wiley Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2002, 764 p.
2. Diffractive Computer Optics / edited by V.A. Soifer – Moscow: Fizmatlit, 2007. Chapter 3. – (in Russian)
3. **Doskolovich L.L.,** Kazanskiy N.L., Soifer V.A., Kharitonov S.I., Perlo P. A DOE to form a line-shaped directivity diagram // Journal of Modern Optics, 2004, Vol. 51, № 13, pp. 1999-2005.
4. **V. Soifer,** V. Kotlyar, L. Doskolovich. Iterative Methods for Diffractive Optical Elements Computation // Taylor&Francis LTD, 1997, 244 p.
5. **Danilov V.A.** Theory of coherent focusers / B.E. Kinber, A.E. Shilov // Computer optics. - Moscow, 1987. - Vol. 1, №1. - pp. 40-52.
6. **Goncharsky A.V.** Solving the inverse problem of focusing the laser light into an arbitrary curve / A.V. Goncharsky et al. // Dokl. USSR Acad Sci. 1983. Vol. 273, №3. pp. 605-608. – (in Russian)
7. **Goncharsky A.V.** Planar focusing elements of visible range / A.V. Goncharsky et al. // J. Quant. Electron, 1986, Vol.13, № 3. – pp. 660-662. – (in Russian)
8. **Soifer V.A.,** Golub M.A. Diffractive micro-optical elements with non-point response // Proceedings SPIE. - 1992. - Vol.1751. - P.140-154.
9. **Doskolovich L.L.** Comparative analysis of different focusators into segment / L.L. Doskolovich N.L. Kazanskiy, V.A. Soifer // Optics and Laser Technology. - 1995. - Vol.27, №4. - P.207-213.
10. **Goncharsky A.V.** Mathematical models in the design of flat optics elements // Computer optics - Moscow, 1989. - Vol. 1, №1. - pp. 13-20
11. **Dmitriev A.Yu.** Geometric-optics design of focusators into a line in noparaxial case / A.Yu. Dmitriev, L.L. Doskolovich, S.I. Kharitonov // Computer optics, 2008, Vol.32, №4, pp. 343-347. – (in Russian)
12. **Dmitriev A.Yu.** Geometric-optics design of optical elements into a line in noparaxial case / A.Yu. Dmitriev, L.L. Doskolovich, S.I. Kharitonov, M.A. Moiseev // Computer optics, 2009, Vol.33, №2, pp. 122-128. – (in Russian)
13. **Born M.** Principles of optics / M. Born, E. Wolf – Moscow: Nauka, 1973.
14. **Belousov A. A.** A gradient method of designing optical elements for forming into 2-D domain in case of distant radiation source / A. A. Belousov, L. L. Doskolovich // Computer optics, 2007, Vol. 31, №3, pp. 20-26. – (in Russian)
15. **Belousov A. A.** A gradient method of designing optical elements for forming a specified irradiance on a curved surface / A. A. Belousov, L. L. Doskolovich, and S. I. Kharitonov // Journal of Optical Technology, Vol. 75, Issue 3, 2008, pp. 161-165
16. **A. A. Belousov** Gradient method of calculating the eikonal for focusing in a given region / A. A. Belousov, L. L. Doskolovich, and S. I. Kharitonov // Avtometriya Vol. 43, №1, 2007, pp. 98-106 – (in Russian)
17. **Young C., Wells D.** Ray Tracing Creations, 2d Ed. London. Waite Group Press, 1994.

GEOMETRIC-OPTICS DESIGN OF DIFFRACTIVE OPTICAL ELEMENTS TO FOCUS INTO A PLANE LINE

Anton Yurievich Dmitriev (apprentice researcher, tonydm@mail.ru),
Leonid Leonidovich Doskolovich (leading researcher , leonid@smr.ru),
Sergei Ivanovich Kharitonov (senior researcher prognoz@smr.ru)
Image Processing Systems Institute of the RAS,
S. P. Korolyov Samara State Aerospace University

Abstract

We derive general non-paraxial analytical representation of the eikonal function for design of diffractive optical element (DOE) to focus into a arbitrary oriented plane line. The eikonal is given in special curvilinear coordinates. The calculation of the eikonal on condition of focusing into a line with prescribed intensity distribution is reduced to solving of a first-order differential equation solved for the derivative. We design DOEs to generate a line-segment focus. The simulation data shows that the DOE produces high performance focal lines.

Key words: eikonal, diffractive optical element, curvilinear coordinates, intensity, light field, line density.

Поступила в редакцию 28.10.2009 г.