АНАЛИЗ СВОЙСТВ СИММЕТРИИ В ФОКАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ПРИ НАЛИЧИИ В ФОКУСИРУЮЩЕМ ЭЛЕМЕНТЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ УГЛОВОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Хонина С.Н., Устинов А.В.
Институт систем обработки изображений РАН,
Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

Аннотация

Проведён анализ свойств симметрии распределения электромагнитного поля в фокальной области при фокусировке излучения с периодической фазовой угловой зависимостью вида $\sin(m\varphi)$ или $\cos(m\varphi)$. На основе такой фазовой зависимости можно описать большинство волновых аберраций. Аналитически показано, что при нечётных значениях m фокальное распределение будет действительной функцией, что обеспечивает простой способ генерации заданных волновых аберраций с помощью бинарных дифракционных оптических элементов. Такая возможность может быть полезна при острой фокусировке, когда наличие определённых волновых аберраций позволяет уменьшить размеры фокального пятна.

Численное моделирование подтверждает аналитические выкладки и показывает, что изменение радиальных параметров позволяет менять конфигурацию комплексного фокального распределения, но симметрия в центральной части в основном определяется чётностью m: для чётных m наблюдается симметрия порядка $2m$, а для нечётных – m.

Ключевые слова: периодическая угловая фазовая зависимость, волновые аберрации, симметрия фокального распределения электромагнитного поля.

Введение

Известно, что наличие различных аберраций в фокусирующей системе приводит к уширению, искажению и нарушению осевой симметрии фокального пятна [1]. Как правило, такое воздействие рассматривается как негативный фактор.

Однако, как было показано в работах [2, 3], некоторые типы волновых аберраций позволяют уменьшить размеры центрального светового пятна в фокальной плоскости при острой фокусировке. В статье [2] были рассмотрены только первичные (осесимметричные) аберрации, а в работе [3] анализировались также аберрации с вихревой фазовой зависимостью на основе полиномов Цернике [1].

Полиномы Цернике имеют полиномиальную зависимость от радиуса и тригонометрическую (периодическую) угловую зависимость. В работах [4, 5] рассмотрены оптические элементы с периодическими угловыми изменениями. В статье [4] показано, что такой элемент формирует в фокусе нулевую интенсивность, а в работе [5] исследуются также бездифракционные свойства сформированных пучков.

На основе разложения фазовой функции с косинусной угловой зависимостью по угловым гармоникам в работе [5] было показано, что функция пропускания вида $\exp\{ia\cos(m\varphi)\}$ порождает картину дифракции с $2m$ световыми пятнами, расположенными на окружности. Аналогичный результат получается при соосной интерференции двух вихревых пучков с одинаковыми топологическими зарядами и противоположными направлениями вращения [6, 7].

В то же время известно [1, 8, 9], что аберрации нечётного порядка, такие как дисторсия и кома, проявляются в картинах с нечётной симметрией. В частности, в присутствии комы ($m=3$) формируются распределения электромагнитного поля с симметрией третьего порядка [10], напоминающие двумерные пучки Эйри [11].

Также произведение трёх одномерных функций Эйри, повёрнутых относительно друг друга на 120° и обладающих симметрией третьего порядка, преобразуется в спектральной плоскости в функцию, пропорциональную $\exp\{iar^3\sin(3\varphi)\}$ [12].

В данной работе проведён анализ свойств симметрии распределения электромагнитного поля в фокальной области при наличии в фазе фокусирующего оптического элемента периодической угловой зависимости вида $\sin(m\varphi)$ или $\cos(m\varphi)$. На основе такой фазовой зависимости можно описать большинство волновых аберраций, которые, в свою очередь, могут быть представлены [13] через разложение по базису Цернике [1].

Аналитически показано, что при нечётных значениях m фокальное распределение будет действительной функцией, то есть фаза будет принимать только два значения – 0 и π. Получены аналитические оценки для центральной части фокального распределения электромагнитного поля при использовании во входной плоскости круглой апертуры.

Численное моделирование подтверждает аналитические выкладки. Численно показано, что изменение радиальных параметров позволяет менять конфигурацию фокального распределения электромагнитного поля, но симметрия в центральной части в основном определяется чётностью углового параметра m.

1. Преобразование Фурье от комплексной функции с периодической угловой зависимостью

Рассмотрим комплексное распределение с периодической угловой зависимостью общего вида:

$$f(r,\varphi)=\psi(r)\exp\left[-i\beta\left(\alpha r\right)^{q}\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}\right], \tag{1}$$

где $\psi(r)$ – некоторая осесимметричная функция, m – целое, q – положительное действительное, α, β – действительные параметры (α имеет размерность мм$^{-1}$).

Заметим, что различные комбинации функций $\sin(m\varphi)$ и $\cos(m\varphi)$ в фазовой функции (1) можно представить как произведение функций вида (1).

На основе комплексного распределения (1) можно описать большинство волновых аберраций, которые, в свою очередь, могут быть представлены [13] через разложение по базису Цернике [1].

Выберем для определённости в (1) $\sin(m\varphi)$. Если взять $\cos(m\varphi)$, то результаты будут аналогичными.

Пространственный Фурье-спектр для функции (1) записывается следующим образом:

$$F(\rho,\theta)= =-\frac{ik\exp(ikf)}{2\pi f}\int_0^\infty\psi(r)\left\{\int_0^{2\pi}\exp\left[-i\beta(\alpha r)^q\sin m\varphi\right]\times \times\exp\left[-i\frac{k}{f}r\rho\cos(\theta-\varphi)\right]\mathrm{d}\varphi\right\}r\,\mathrm{d}r, \quad (2)$$

где $k=2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны лазерного излучения, f – фокусное расстояние, (r,φ) и (ρ,θ) – полярные координаты во входной и выходной плоскостях соответственно.

Рассмотрим интеграл в фигурных скобках по углу:

$$\Phi(\rho,\theta,r)=\int_0^{2\pi}\exp\left[-i\beta(\alpha r)^q\sin m\varphi\right]\times \times\exp\left[-i\frac{k}{f}r\rho\cos(\theta-\varphi)\right]\mathrm{d}\varphi. \quad (3)$$

Для осевого распределения ($\rho=0$) получим выражение, не зависящее от m:

$$\Phi(0,0;r)= =\int_0^{2\pi}\exp\left[-i\beta(\alpha r)^q\sin m\varphi\right]\mathrm{d}\varphi=2\pi J_0\left[\beta(\alpha r)^q\right]. \quad (4)$$

Обозначим

$$a=\beta(\alpha r)^q,\ b=kr\rho/f. \quad (5)$$

При $m=1$ в (3) сделаем преобразование:

$$\begin{aligned}&a\sin\varphi+b\cos(\varphi-\theta)=\\&=(a+b\sin\theta)\sin\varphi+(b\cos\theta)\cos\varphi=\\&=\sqrt{(a+b\sin\theta)^2+(b\cos\theta)^2}\cos(\varphi-\theta')=\\&=\sqrt{a^2+b^2+2ab\sin\theta}\cos(\varphi-\theta'),\end{aligned} \quad (6)$$

где $\theta'=\mathrm{arctg}\left[(a+b\sin\theta)/b\cos\theta\right]$, тогда

$$\Phi(\rho,\theta;r)=2\pi\times \times J_0\left(\sqrt{\beta^2(\alpha r)^{2q}+\left(\frac{kr\rho}{f}\right)^2+2\beta(\alpha r)^q\left(\frac{kr\rho}{f}\right)\sin\theta}\right). \quad (7)$$

При выборе в (1) вместо $\sin\varphi$ (при $m=1$) $\cos\varphi$, формула (7) будет выглядеть аналогично с соответствующей заменой.

Рассмотрим более общий случай: m – целое. Разложим первую экспоненту в (3):

$$\begin{aligned}&\exp(-ia\sin m\varphi)=\\&=J_0(a)+2\sum_{p=1}^\infty J_{2p}(a)\cos(2pm\varphi)-\\&-2i\sum_{p=0}^\infty J_{2p+1}(a)\sin((2p+1)m\varphi).\end{aligned} \quad (8)$$

В (8) были использованы соотношения [14]:

$$\cos(z\sin t)=J_0(z)+2\sum_{p=1}^\infty J_{2p}(z)\cos(2pt), \quad (9а)$$

$$\sin(z\sin t)=2\sum_{p=1}^\infty J_{2p+1}(z)\sin\left[(2p+1)t\right]. \quad (9б)$$

Далее для вычисления интеграла (3) можно воспользоваться известными соотношениями:

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}\exp\left[-ib\cos(\theta-\varphi)\right]\mathrm{d}\varphi=\\&=2\pi(-i)^m\begin{Bmatrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{Bmatrix}J_m(b).\end{aligned} \quad (10)$$

В результате получим:

$$\begin{aligned}&\Phi(\rho,\theta;r)=2\pi J_0(a)J_0(b)+\\&+4\pi\sum_{p=1}^\infty(-1)^{pm}J_{2p}(a)J_{2pm}(b)\cos(2pm\theta)-\\&-4\pi i\sum_{p=0}^\infty(-1)^{pm}(-i)^m J_{2p+1}(a)\times\\&\times J_{(2p+1)m}(b)\sin((2p+1)m\theta).\end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что выражение (11) при нечётных m будет действительным, т.к. коэффициенты в третьей сумме $i(-i)^m=(-i)^{m-1}$ будут действительными при нечётных m.

Аналогично будет, если выбрать в (1) $\cos m\varphi$:

$$\begin{aligned}&\exp(-ia\cos m\varphi)=\\&=J_0(a)+2\sum_{p=1}^\infty(-1)^p J_{2p}(a)\cos(2pm\varphi)-\\&-2i\sum_{p=0}^\infty(-1)^p J_{2p+1}(a)\cos((2p+1)m\varphi),\end{aligned} \quad (12)$$

где были использованы соотношения [14]:

$$\cos(z\cos t)= =J_0(z)+2\sum_{p=1}^\infty(-1)^p J_{2p}(z)\cos(2pt), \quad (13а)$$

$$\sin(z\cos t)= =2\sum_{p=1}^\infty(-1)^p J_{2p+1}(z)\cos\left[(2p+1)t\right]. \quad (13б)$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{2\pi} \exp\left(-ia\cos m\varphi\right)\exp\left[-ib\cos\left(\theta-\varphi\right)\right]\mathrm{d}\varphi =$$
$$= 2\pi J_0(a)J_0(b) +$$
$$+4\pi\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p(m+1)} J_{2p}(a)J_{2pm}(b)\cos\left(2pm\theta\right) - \quad (14)$$
$$-4\pi i\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^{p(m+1)}(-i)^m J_{2p+1}(a)\times$$
$$\times J_{(2p+1)m}(b)\cos\left((2p+1)m\theta\right).$$

При нечётных m выражение (14) будет действительным.

Подставим (11) в (2):

$$F\left(\rho,\theta\right) = -\frac{ik}{f}\exp(ikf)\times$$
$$\times\int\limits_0^{\infty}\psi(r)\left\{J_0\left[\beta\left(\alpha r\right)^q\right]J_0\left(\frac{k}{f}r\rho\right) - 2i(-i)^m\times\right.$$
$$\times J_1\left[\beta\left(\alpha r\right)^q\right]J_m\left(\frac{k}{f}r\rho\right)\sin\left(m\theta\right) + 2(-1)^m\times \quad (15)$$
$$\left.\times J_2\left[\beta\left(\alpha r\right)^q\right]J_{2m}\left(\frac{k}{f}r\rho\right)\cos\left(2m\theta\right) - \ldots\right\} r\,\mathrm{d}r.$$

Выражение (15) можно переписать в следующем виде:

$$F\left(\rho,\theta\right) = -\frac{ik}{f}\exp(ikf)\times$$
$$\times\left\{\Psi_0\left(\rho\right) - 2(-i)^{m-1}\Psi_1\left(\rho\right)\sin\left(m\theta\right) + \right. \quad (16)$$
$$\left. +2(-1)^m\Psi_2\left(\rho\right)\cos\left(2m\theta\right) - \ldots\right\},$$

где

$$\Psi_p\left(\rho\right) = \int\limits_0^{\infty}\psi(r)J_p\left[\beta\left(\alpha r\right)^q\right]J_{pm}\left(\frac{k}{f}r\rho\right) r\,\mathrm{d}r. \quad (17)$$

Оценим приблизительно интегралы (17), положив

$$\psi(r) = \begin{cases} 1, & r \le R \\ 0, & r > R \end{cases} \quad (18)$$

и считая

$$J_0(z) \approx 1 - z^2/4,$$
$$J_n(z) \approx \left(z/2\right)^n / n!.$$

Тогда

$$\Psi_0\left(\rho\right) =$$
$$= \int\limits_0^R J_0\left[\beta\left(\alpha r\right)^q\right]J_0\left(\frac{k}{f}r\rho\right) r\,\mathrm{d}r \approx$$
$$\approx \int\limits_0^R\left[1 - \frac{\beta^2\left(\alpha r\right)^{2q}}{4} - \frac{\left(kr\rho\right)^2}{4f^2}\right] r\,\mathrm{d}r = \quad (19а)$$
$$= \frac{R^2}{2} - \frac{\left(\beta R\right)^2\left(\alpha R\right)^{2q}}{8(q+1)} - \left(\frac{k\rho R^2}{4f}\right)^2,$$

$$\Psi_p\left(\rho\right) =$$
$$= \int\limits_0^R J_p\left[\beta\left(\alpha r\right)^q\right]J_{pm}\left(\frac{k}{f}r\rho\right) r\,\mathrm{d}r \approx$$
$$\approx \frac{1}{p!\left(pm\right)!}\int\limits_0^R\left[\frac{\beta\left(\alpha r\right)^q}{2}\right]^p\left(\frac{k}{2f}r\rho\right)^{pm} r\,\mathrm{d}r = \quad (19б)$$
$$= \frac{\beta^p\alpha^{pq}\left(k\rho\right)^{pm}}{p!\left(pm\right)!2^p(2f)^{pm}}\cdot\frac{R^{p(q+m)+2}}{p(q+m)+2},\quad p > 0.$$

Как видно из выражений (19), основной вклад в центральную часть фокальной плоскости (при $\rho \to 0$) вносят слагаемые с низкими порядками p. Если ограничиться в (16) двумя первыми членами, то интенсивность в центральной части фокальной плоскости можно оценить следующими выражениями для чётных m:

$$\left|F\left(\rho,\theta\right)\right|^2 = \left(\frac{k}{f}\right)^2\left[\Psi_0^2\left(\rho\right) + 4\Psi_1^2\left(\rho\right)\sin^2\left(m\theta\right)\right] \quad (20а)$$

и для нечётных m:

$$\left|F\left(\rho,\theta\right)\right|^2 = \left(\frac{k}{f}\right)^2\left[\Psi_0^2\left(\rho\right) + 4\Psi_1^2\left(\rho\right)\sin^2\left(m\theta\right) - \right.$$
$$\left. -4(-1)^{\frac{m-1}{2}}\Psi_0\left(\rho\right)\Psi_1\left(\rho\right)\sin\left(m\theta\right)\right\}, \quad (20б)$$

в которых первое слагаемое не зависит от угла, второе даёт $2m$ равномерно расположенных максимумов одинаковой величины (при $\sin(m\theta) = \pm 1$). Третье слагаемое присутствует только в случае нечётного m и корректирует эти максимумы: в зависимости от знака множителя при $\sin(m\theta)$ половина максимумов увеличивается, а другая половина уменьшается, и остаётся только m выраженных максимумов.

Таким образом, из выражений (20) видно, что симметрия в центральной части фокального распределения определяется чётностью m: для чётных m наблюдается симметрия порядка $2m$, а для нечётных – m.

За счёт параметров β, α, q и m можно варьировать значения коэффициентов в (20) и менять симметрию картины интенсивности в фокусе.

2. Численное моделирование

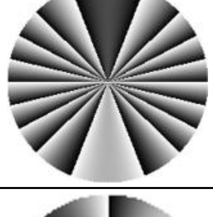
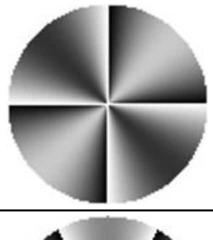
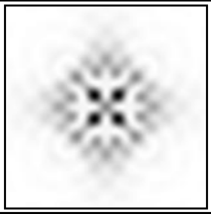
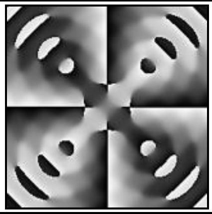
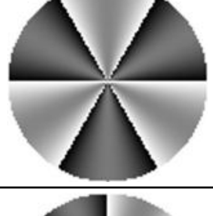
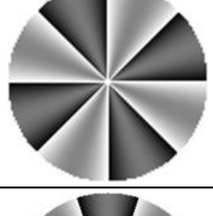
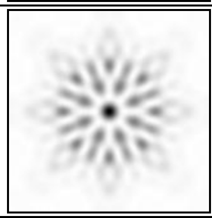
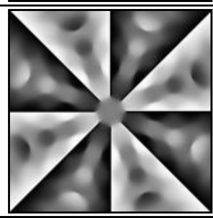
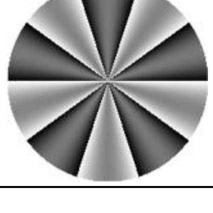
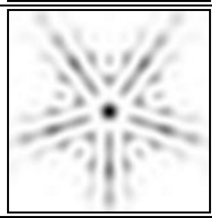
При численном моделировании в формуле (2) использовались следующие параметры: длина волны излучения $\lambda = 633$ нм, фокусное расстояние $f = 100$ мм.

В табл. 1 приведены результаты при использовании в формуле (1) $\sin(m\varphi)$ с различными значениями $m = \overline{1,5}$ при $q = 0$ и различными значениями β, в качестве $\psi(r)$ выбрана круглая диафрагма радиусом $R = 1$ мм из выражения (17). Как было замечено в предыдущем разделе, при нечётных значениях m распределение в фокальной плоскости является действительной функцией, что соответствует бинарному типу фазы.

Также можно видеть, что для чётных m в центральной части фокального распределения наблюдается симметрия порядка $2m$, а для нечётных – m.

В табл. 2 приведены результаты при использовании в формуле (1) $\sin(m\varphi)$ с $m=3$ и различных значениях параметров α, β и q, в качестве $\psi(r)$ выбран гауссов пучок $\exp(-r^2/\sigma^2)$ с радиусом перетяжки $\sigma=0{,}5$ мм. Как видно из приведённых результатов, изменение радиальных параметров позволяет менять конфигурацию фокального распределения, но симметрия в центральной части определяется значением углового параметра m.

Таблица 1. Результаты при различных значениях m и β, q = 0, ψ(r) – круглая диафрагма

Параметры	Входное распределение (фаза)	Распределение в фокальной плоскости (интенсивность и фаза), $0{,}5\times0{,}5$ мм
$m=1$, $\beta=27$		 
$m=2$, $\beta=5$		 
$m=3$, $\beta=3$		 
$m=4$, $\beta=3$		 
$m=5$, $\beta=3$		 

В табл. 3 приведены результаты при $q=0$ и $\beta=5$, но различных значениях m и $\psi(r)$.

Также рассмотрено использование вместо осесимметричной $\psi(r)$ более общей функции $\psi(r)$, причём имеющей гармоническую зависимость от угла $\exp(il\varphi)$.

В первых 4 строках в качестве $\psi(r,\varphi)$ используются инвариантные к преобразованию Фурье моды Лагерра – Гаусса [14] различных порядков (n,l), в том числе имеющие вихревую зависимость $\exp(il\varphi)$. Интересно, что наличие этой дополнительной зависимости от угла не столь существенно влияет на структуру фокального распределения, как периодическая функция рассматриваемого вида $\sin(m\varphi)$. Если сравнить строки 1 и 3, то внесение фазовой вихревой зависимости в объектной плоскости приводит к появлению такой же зависимости в фокальной плоскости, не меняя основную структуру распределения (за исключением обнуления интенсивности в сингулярной точке).

При $m=1$ действие похоже на внесение в фокусирующую систему аберрации типа комы, а при $m=3$ – произведение трёх повёрнутых одномерных функций Эйри [12]. Хотя в последнем случае на самом деле имеет место произведение некоторых других одномерных функций.

В последних двух строках табл. 3 в качестве $\psi(r,\varphi)$ используются моды Бесселя $J_l(\gamma r)\exp(il\varphi)$, Фурье-спектр которых выглядит как узкое кольцо с радиусом, пропорциональным γ. Результаты моделирования показывают, что кольцевая фокальная структура бесселевых мод под влиянием периодического углового изменения в фокальной системе существенно преобразуется.

Заключение

В работе проведён анализ свойств симметрии распределения электромагнитного поля в фокальной области при фокусировке излучения с периодической фазовой угловой зависимостью вида $\sin(m\varphi)$ или $\cos(m\varphi)$.

Аналитически показано, что при нечётных значениях m фокальное распределение электромагнитного поля будет действительной функцией. Таким образом, аналогично работе [12], можно формировать с помощью бинарных дифракционных оптических элементов в фокальной плоскости обычной сферической линзы фазовые распределения, соответствующие заданным типам аберраций. Такая возможность может быть полезна при острой фокусировке, когда наличие определённых волновых аберраций позволяет уменьшить размеры фокального пятна [2, 3].

В частности, для светового излучения с круговой поляризацией таким фактором является присутствие комы ($m=3$), соответствующее двумерным суперпозициям пучков Эйри [11, 12].

Численное моделирование подтверждает аналитические выкладки и показывает, что изменение радиальных параметров позволяет менять конфигурацию фокального распределения электромагнитного поля, но симметрия в центральной части в основном определяется значением углового параметра m: для чётных m в центральной части фокального распределения наблюдается симметрия порядка $2m$, а для нечётных – m. Причём внесённая фазовая вихревая зависимость вида $\exp(il\varphi)$ сохраняется в фокальной плоскости, но не так существенно влияет на структуру фокального распределения электромагнитного поля, как периодическая функция рассматриваемого вида $\sin(m\varphi)$.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки (ГК № 07.514.11.4055), грантов РФФИ 10-07-00109-а, 10-07-00438-а и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-7414.2010.9.

Таблица 2. Результаты при различных значениях α, β и q, $m=3$, $\psi(r)$ – гауссов пучок

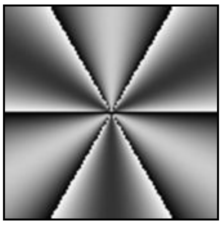
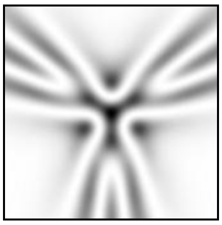
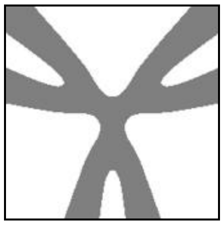
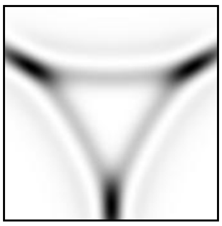
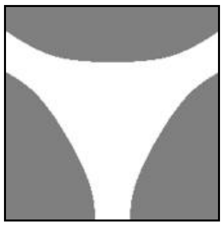
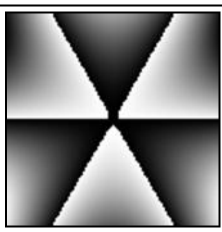
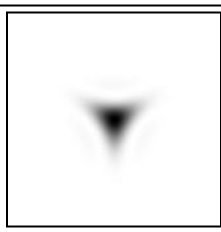
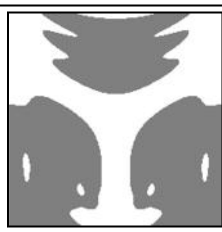
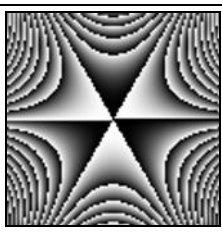
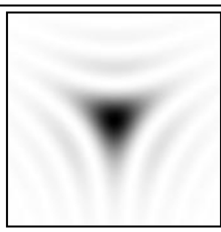
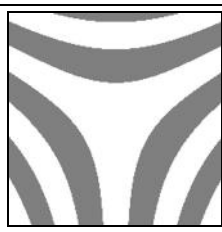
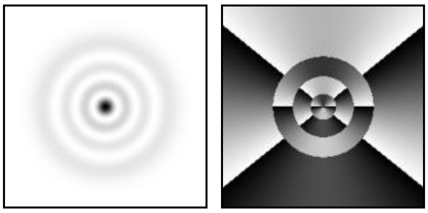
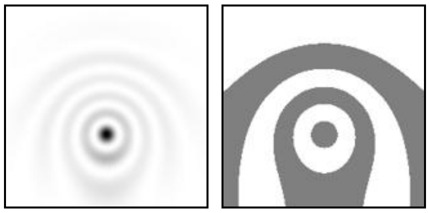
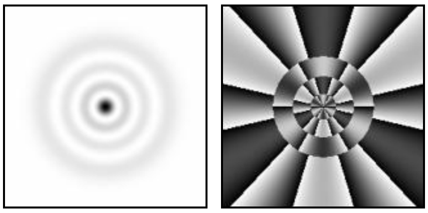
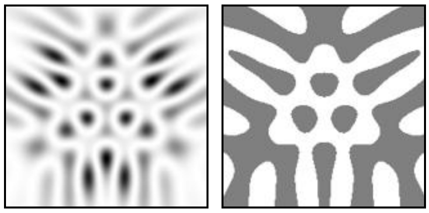
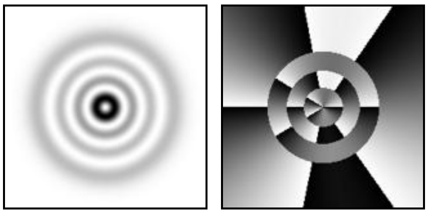
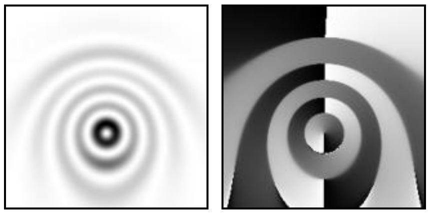
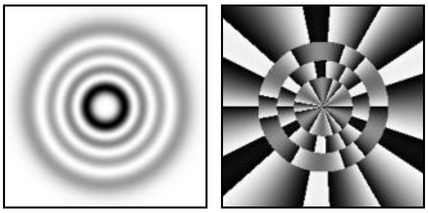
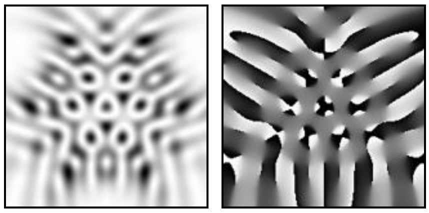
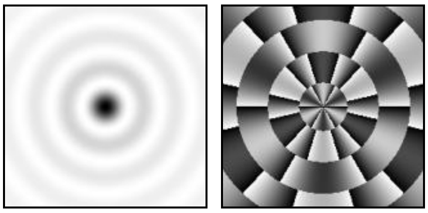
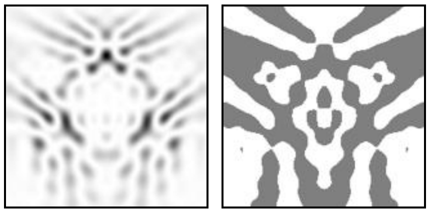
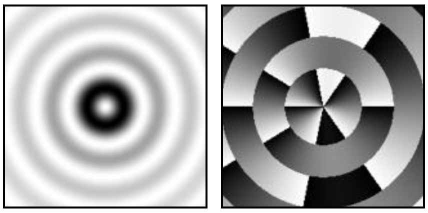
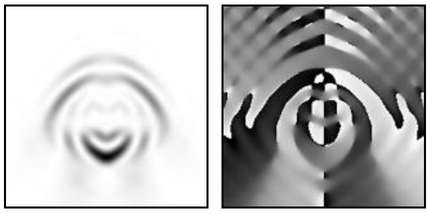
Параметры	Входное распределение (фаза)	Распределение в фокальной плоскости (интенсивность и фаза), $0{,}5\times0{,}5$ мм
$q=0$, $\alpha=1$ мм$^{-1}$, $\beta=3$		 
$q=1$, $\alpha=1$ мм$^{-1}$, $\beta=10$		 
$q=2$, $\alpha=2$ мм$^{-1}$, $\beta=1$		 
$q=3$, $\alpha=3$ мм$^{-1}$, $\beta=1$		 

Таблица 3. Результаты при различных значениях параметров и вида $\psi(r,\varphi)$, $q=0$

Параметры	Входное распределение (интенсивность и фаза)	Распределение в фокальной плоскости (интенсивность и фаза), $0{,}5\times0{,}5$ мм
$m=1$, $\psi(r)$ – мода Лагерра – Гаусса (3, 0), $\sigma=0{,}2$ мм		
$m=3$, $\psi(r)$ – мода Лагерра – Гаусса (3, 0), $\sigma=0{,}2$ мм		
$m=1$, $\psi(r,\varphi)$ – мода Лагерра – Гаусса (3, 1), $\sigma=0{,}2$ мм		
$m=3$, $\psi(r,\varphi)$ – мода Лагерра – Гаусса (3, 3), $\sigma=0{,}2$ мм		
$m=3$, $\psi(r)=J_0(\gamma r)$, $\gamma=10\,мм^{-1}$		
$m=1$, $\psi(r,\varphi)=$ $=J_1(\gamma r)\exp(i\varphi)$, $\gamma=10\,мм^{-1}$		

Литература

1. **Born, M.** Principlies of Optics / M. Born, E. Wolf. – Oxford: Pergamon Press, 1968.
2. **Kant, R.** Superresolution and increased depth of focus: an inverse problem of vector diffraction / R. Kant // J. Mod. Opt. – 2000. – Vol. 47(5). – P. 905-916.
3. **Хонина, С.Н.** Анализ влияния волновых аберраций на уменьшение размеров фокального пятна в высокоапертурных фокусирующих системах / С.Н. Хонина, А.В. Устинов, Е.А. Пелевина // Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 35, № 2. – С. 203-219.
4. **Ojeda-Castañeda, J.** Zero axial irradiance by annular screens with angular variation / J. Ojeda-Castañeda, P. Andrés and M. Martínez-Corral // Appl. Opt. – 1992. – Vol. 31. – P. 4600-4602.
5. **Topuzoski, S.** Diffraction characteristics of optical elements designed as phase layers with cosine-profiled periodicity in azimuthal direction / S. Topuzoski and L. Janicijevic // J. Opt. Soc. Am. A. – 2011. – Vol. 28, N 12. – P. 2465-2472.
6. **Khonina, S.N.** Generation and selection of laser beams represented by a superposition of two angular harmonics /

S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, K. Jefimovs and J. Turunen // J. Mod. Opt. – 2004. – Vol. 51. – P. 761-773.

7. **Kotlyar, V.V.** Rotation of laser beams with zero of the orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, R.V. Skidanov and V.A. Soifer // Optics Communications. – 2007. – Vol. 274. – P. 8-14.
8. **Love, G.D.** Wave-front correction and production of Zernike modes with a liquid-crystal spatial light modulator / G.D. Love // Appl. Opt. – 1997. – Vol. 36, N 7. – P. 1517-1524.
9. **Boruah, B.R.** Susceptibility to and correction of azimuthal aberrations in singular light beams / B.R. Boruah and M.A.A. Neil // Opt. Express. – 2006. – Vol. 14, N 22. – P. 10377-10385.
10. **Budgor, A.B.** Exact solutions in the scalar diffraction theory of aberrations / A.B. Budgor // Appl. Opt. – 1980. – Vol. 19, N 10. – P. 1597-1600.
11. **Хонина, С.Н.** Эйри-подобные двумерные распределения / С.Н. Хонина // Вестник СГАУ. – 2010. – № 4. – С. 299-311.
12. **Abramochkin, E.** Product of three Airy beams E. Abramochkin, E. Razueva // Opt. Lett. – 2011. – Vol. 36, N 19. – P. 3732-3734.
13. **Khonina, S.N.** Diffractive optical element matched with Zernike basis / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, Ya. Wang // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2001. – Vol. 11(2). – P. 442-445.
14. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Т. 2. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 753 с.

References

1. **Born, M.** Principlies of Optics / M. Born, E. Wolf. – Oxford: Pergamon Press, 1968.
2. **Kant, R.** Superresolution and increased depth of focus: an inverse problem of vector diffraction / R. Kant // J. Mod. Opt. – 2000. – Vol. 47(5). – P. 905-916.
3. **Khonina, S.N.** Analysis of wave aberration influence on reducing focal spot size in a high-aperture focusing system / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, E.A. Pelevina // Computer Optics. – 2011. Vol. 35, N 2. – P. 203-219. – (In Russian).
4. **Ojeda-Castañeda, J.** Zero axial irradiance by annular screens with angular variation / J. Ojeda-Castañeda, P. Andrés and M. Martínez-Corral // Appl. Opt. – 1992. – Vol. 31. – P. 4600-4602.
5. **Topuzoski, S.** Diffraction characteristics of optical elements designed as phase layers with cosine-profiled periodicity in azimuthal direction / S. Topuzoski and L. Janicijevic // J. Opt. Soc. Am. A. – 2011. – Vol. 28, N 12. – P. 2465-2472.
6. **Khonina, S.N.** Generation and selection of laser beams represented by a superposition of two angular harmonics / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, K. Jefimovs and J. Turunen // J. Mod. Opt. – 2004. – Vol. 51. – P. 761-773.
7. **Kotlyar, V.V.** Rotation of laser beams with zero of the orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, R.V. Skidanov and V.A. Soifer // Optics Communications. – 2007. – Vol. 274. – P. 8-14.
8. **Love, G.D.** Wave-front correction and production of Zernike modes with a liquid-crystal spatial light modulator / G.D. Love // Appl. Opt. – 1997. – Vol. 36, N 7. – P. 1517-1524.
9. **Boruah, B.R.** Susceptibility to and correction of azimuthal aberrations in singular light beams / B.R. Boruah and M.A.A. Neil // Opt. Express. – 2006. – Vol. 14, N 22. – P. 10377-10385.
10. **Budgor, A.B.** Exact solutions in the scalar diffraction theory of aberrations / A.B. Budgor // Appl. Opt. – 1980. – Vol. 19, N 10. – P. 1597-1600.
11. **Khonina, S.N.** Airy-like two-dimensional distributions / S.N. Khonina // Vestnik SSAU. – 2010. – N 4. – P. 299-311. – (In Russian).
12. **Abramochkin, E.** Product of three Airy beams E. Abramochkin, E. Razueva // Opt. Lett. – 2011. – Vol. 36, N 19. – P. 3732-3734.
13. **Khonina, S.N.** Diffractive optical element matched with Zernike basis / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, Ya. Wang // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2001. – Vol. 11(2). – P. 442-445.
14. **Prudnikov, A.P.** Integrals and Series. Vol. 2. Special Functions / A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov and O.I. Marichev. – New York: Gordon & Breach Sci. Publ., 1990.

ANALYSIS OF SYMMETRY PROPERTIES IN FOCAL AREA AT PRESENCE IN A FOCUSING ELEMENT WITH PERIODIC ANGULAR DEPENDENCE

S.N. Khonina, A.V. Ustinov

Image Processing Systems Institute of Russian Academy of Sciences,

S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (National Research University)

Abstract

The analysis of symmetry properties of distribution in focal area is carried out at focusing of light with periodic phase angular dependence of a kind $\sin(m\varphi)$ or $\cos(m\varphi)$. On the basis of such phase dependence it is possible to describe the majority of wave aberrations. It is analytically shown that at odd values *m* focal distribution will be the real function that provides a simple way of generation of the set wave aberrations by means of binary diffractive optical elements. Such possibility can be useful at sharp focusing when presence of certain wave aberrations allows to reduce the sizes of a focal spot.

Numerical modeling confirms analytical calculations and shows that change of radial parameters allows to change a configuration of focal distribution but symmetry in the central part basically is defined by parity *m*: for even *m* is observed symmetry of $2m$ order, and for odd – the symmetry is *m* order.

<u>*Key words:*</u> periodic angle phase dependence, wave aberrations, symmetry of focal distribution.

Сведения об авторах

Сведения об авторе ***Хонина Светлана Николаевна*** *см. стр. 26 этого номера*

Устинов Андрей Владимирович, 1968 года рождения, в 1991 году окончил Куйбышевский авиационный институт имени академика С.П. Королёва (КуАИ) по специальности «Прикладная математика», работает ведущим программистом в Учреждении Российской академии наук Институт систем обработки изображений РАН; является аспирантом Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва. Область научных интересов: дифракционная оптика, разработка программ моделирования работы оптических элементов; обработка изображений, в частности, гидродинамических процессов и биомедицинских.

E-mail: *andr@smr.ru* .

Andrey Vladimirovich Ustinov, (b. 1968) graduated from Kuibyshev Aviation Institute named after academician S.P. Korolyov (KuAI) on a specialty “Applied mathematics”, works as the leading programmer in the Image Processing Systems Institute of the RAS; postgraduate student of the Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov. Research interests: diffractive optics, software design for modeling of optical elements operating; images processing, particularly images of hydrodynamic processes and biomedical images.

Поступила в редакцию 19 декабря 2011 г.