

## ОБОБЩЁННАЯ ЛИНЗА: АНАЛИЗ ОСЕВОГО И ПОПЕРЕЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Устинов А.В., Хонина С.Н.

Институт систем обработки изображений РАН

### Аннотация

В работе аналитически и численно рассмотрено действие обобщённой линзы – дифракционного оптического элемента, фаза которого описывается степенной зависимостью от радиальной координаты с произвольным показателем. Частными случаями обобщённой линзы являются аксикон и параболическая линза. Предложена модификация метода стационарной фазы, и на её основе получены аналитические выражения для осевого распределения комплексной амплитуды, формируемой обобщённой линзой в параксиальном приближении. Два типа аналитических выражений обеспечивают высокую точность расчёта в различных диапазонах значений показателя степени обобщённой линзы. Анализ поперечного распределения, выполненный на основе классического метода стационарной фазы, показал, что при использовании обобщённой линзы с показателем степени меньше единицы можно формировать световой пучок, поперечный размер которого меньше, чем обеспечивает линейный аксикон.

**Ключевые слова:** аксикон, параболическая линза, фраксикон, обобщённая линза, модифицированный метод стационарной фазы.

### Введение

Под аксиконом [1] понимается любой оптический элемент, обладающий осевой симметрией, который за счёт отражения и/или преломления преобразует свет от точечного источника, расположенного на оптической оси, в осевую отрезок. В этом состоит отличие аксикона от линзы, которая изображает точечный источник в точку, и его преимущество. К сожалению, это преимущество аксикона сопровождается низким качеством изображения при использовании его как отдельного изображающего элемента [2, 3]. Другое преимущество аксикона – изображение точки с меньшим поперечным дифракционным пределом (меньшим расплыванием) [4] – имеет своим продолжением в качестве недостатка более высокий уровень боковых лепестков, что также препятствует получению качественного изображения.

В работе [5] было показано, что при использовании средств дифракционной оптики tandem «линза + аксикон» можно заменить одним дифракционным элементом (названным фраксиконом), фаза которого имеет дробную степенную зависимость от радиальной координаты. В этой же работе было показано, что за счёт вариации параметров можно получить не только аналог линзакон [6], но и логарифмического аксикона [7], но без сингулярности в центральной части оптического элемента. Дифракционное исследование аксикона в сходящемся сферическом пучке было проведено в работах [8, 9].

Рефракционные аналоги таких элементов исследовались в работе [10] в рамках геометрооптической модели. Оптический элемент назван обобщённой линзой, так как при конкретных параметрах он сводится к классическим элементам, таким как параболическая линза или аксикон. Однако вариации параметров позволяют получать в одном элементе комбинированные свойства набора из двух и более оптических элементов.

Исследование фокусирующих свойств обобщённой линзы по сравнению с классическими оптиче-

скими элементами является актуальным для многих приложений, так как позволит заменить набор оптических элементов одним дифракционным элементом.

В данной работе на основе метода стационарной фазы получены аналитические выражения для осевого распределения, формируемого обобщённой линзой в параксиальном приближении. Два типа аналитических выражений обеспечивают высокую точность расчёта в различных диапазонах значений степени обобщённой линзы.

На основе классического метода стационарной фазы выполнен анализ поперечного распределения, который показал возможность формирования с помощью обобщённой линзы более узкого светового пучка, чем обеспечивает линейный аксикон с той же числовой апертурой.

### 1. Анализ осевого распределения

Рассмотрим радиально-симметричный дифракционный оптический элемент, фаза которого имеет произвольную степенную зависимость от радиальной координаты. Комплексная функция пропускания фазового элемента имеет следующий вид:

$$\tau(r) = \exp\left[-i(k\alpha_0 r)^\gamma\right], \quad r \leq R, \quad (1)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  – длина волны,  $\gamma$  – положительное действительное число,  $\alpha_0$  – безразмерный коэффициент, связанный с числовой апертурой оптического элемента и определяющий максимальный угол наклона лучей к оптической оси.

Дифракция плоской волны на оптическом элементе (1) в параксиальном случае вычисляется по формуле:

$$U(\rho, z) = \frac{k}{iz} \exp\left[ikz + \frac{ik\rho^2}{2z}\right] \times \int_0^R \tau(r) \exp\left[\frac{ikr^2}{2z}\right] J_0\left(\frac{k\rho r}{z}\right) r dr. \quad (2)$$

На оптической оси формула (2) примет вид:

$$U(\rho=0, z) = \frac{k}{iz} \exp(ikz) \times \int_0^R \exp\left[-i(k\alpha_0 r)^\gamma + \frac{ikr^2}{2z}\right] r dr. \tag{3}$$

Для вычисления интеграла в формуле (3) воспользуемся методом стационарной фазы (МСФ) [11]. Этот метод основан на том, что при быстроосциллирующей подынтегральной функции главный вклад дают окрестности точек, в которых частота (производная от фазы) равна нулю. Поэтому выполним разложение фазовой функции в (3) в ряд Тейлора и запишем приближённое равенство:

$$\exp\{if(r)\} \approx \exp\left\{i\left[f(r_0) + f''(r_0)(r-r_0)^2/2\right]\right\}, \tag{4}$$

в котором точка  $r_0$  определяется из условия:

$$f'(r_0) = 0. \tag{5}$$

Если стационарных точек несколько, то производится разбиение отрезка интегрирования.

В классическом МСФ остальные множители в подынтегральной функции заменяются значениями при подстановке  $r=r_0$ , а пределы интегрирования расширяются до бесконечных. Естественно, предполагается, что стационарная точка лежит внутри отрезка интегрирования и не очень близко к его концу. Если она совпадает с концом отрезка, то соответствующий ей предел интегрирования заменяется нулём (а не бесконечностью).

В работах [8, 12] использовалось уточнение МСФ, состоящее в сохранении конечных пределов, однако подстановка  $r=r_0$  выполнялась в соответствии с классическим МСФ.

В данной работе мы и сохраняем конечные пределы интегрирования, и не делаем подстановки  $r=r_0$ . Будем называть это модифицированным МСФ.

В первом подходе произведём следующее преобразование показателя в (3):

$$f(r) = -(k\alpha_0 r)^\gamma + \frac{ikr^2}{2z} = -\beta(r^\gamma - ar^2), \tag{6}$$

где  $\beta = (k\alpha_0)^\gamma$ ,  $a = \frac{k^{1-\gamma}}{2z\alpha_0^\gamma}$ .

Таким образом, подлежащий вычислению интеграл записывается в виде:

$$U^I(z) = -\frac{ik}{z} \exp(ikz) \times \int_0^R \exp\left[-i\beta(r^\gamma - ar^2)\right] r dr. \tag{7}$$

Так как при  $\gamma=1$  и  $\gamma=2$  функция фазы в (7) уже является квадратичной, то в результате применения модифицированного МСФ получим точные решения, рассмотренные в [13, 14]. Поэтому далее рассматриваем эти значения как границы исследуемых диапазонов значений:  $0 < \gamma \leq 1$ ,  $1 \leq \gamma < 2$ ,  $\gamma > 2$ . Заметим, что решение для  $\gamma=2$  нельзя получить непрерывным переходом из решений для соседних диапазонов.

В первом подходе надо проанализировать функцию (6). В этом случае имеем одну (при  $0 < \gamma < 1$ ) или две стационарные точки:

$$r_1 = 0; r_2 = \left(\frac{2a}{\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma-2}}. \tag{8}$$

При наличии двух стационарных точек (при  $\gamma > 1$ ) точка перегиба:

$$r_p = \left(\frac{2a}{\beta(\gamma-1)}\right)^{\frac{1}{\gamma-2}}. \tag{9}$$

Значения в стационарных точках:

$$\begin{aligned} f(r_1) &= 0, \\ f(r_2) &= a \left(\frac{2}{\beta} - 1\right) \left(\frac{2a}{\beta}\right)^{\frac{2}{\gamma-2}}, \\ f''(r_1) &= \begin{cases} -2a, & \gamma > 2, \\ +\infty, & 1 < \gamma < 2, \end{cases} \\ f''(r_2) &= 2a(\gamma - 2). \end{aligned} \tag{10}$$

Рассмотрим ещё один подход к вычислению интеграла в формуле (3). Сделаем замену переменной  $x = (k\alpha_0 r)^\gamma$  и после некоторых преобразований получим:

$$U^II(z) = -ib \exp(ikz) \times \int_0^{(k\alpha_0 R)^\gamma} \exp\left[-i(x^{\gamma/2} - bx)\right] dx, \tag{11}$$

где  $b = 1/(2kz\alpha_0^2)$ .

В этом случае под интегралом имеется только экспонента, и модификация МСФ будет состоять только в конечности пределов интегрирования. Ниже будет показано, что в зависимости от значения  $\gamma$  преимущества имеет либо первый подход (7), либо второй (11).

Показатель в (11) имеет одинаковые свойства при всех значениях  $\gamma$ , кроме  $\gamma=2$ . Имеется одна стационарная точка:

$$x_0 = \left(\frac{2b}{\beta}\right)^{\frac{2}{\gamma-2}}. \tag{12}$$

Точка перегиба отсутствует. Значения в стационарной точке:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= -\frac{bx_0(\gamma-2)}{\beta}, \\ f''(x_0) &= \frac{b(\gamma-2)}{2x_0}. \end{aligned} \tag{13}$$

Сравнивая (7) и (11), можно доказать, что при использовании классического МСФ получится одинаковый результат в обоих подходах.

Заметим, что второй подход (11) позволяет получить точное решение при  $\gamma=4$  [15]:

$$U^II(z) = -\frac{i \exp(ikz)}{2\alpha_0^2 kz} \times \exp\left(i \frac{kr_0^2}{4z}\right) \int_{r_1}^{r_2} \exp(-it^2) dt, \tag{14}$$

где  $T_1 = -\sqrt{\frac{k}{4z}} \cdot r_0$ ,  $T_2 = \sqrt{\frac{k}{4z}} \cdot \frac{R^2 - r_0^2}{r_0}$ .

Интеграл в (14) выражается через функции Френеля. Далее в тексте мы будем приводить выражения в форме, аналогичной (14), сохраняя знак интеграла, так как явное выражение через функции Френеля зависит от знаков нижнего и верхнего пределов.

Далее рассмотрим разные диапазоны параметра  $\gamma$ .

**2. Аналитические и численные оценки осевого распределения для различных диапазонов параметра  $\gamma$**

**2.1. Диапазон  $0 < \gamma < 1$**

В этом диапазоне сравнение вычислений с помощью первого и второго подходов наиболее просто и наглядно, так как в обоих вариантах имеется только одна стационарная точка.

При использовании выражения (7) получаем:

$$U^I(z) \approx \exp(ikz) \exp[-i\beta f(r_0)] \times \left\{ \frac{1}{\gamma-2} \exp\left[-i\frac{k(\gamma-2)}{2z}(R-r_0)^2\right] - \frac{1}{\gamma-2} \exp\left[-i\frac{k(\gamma-2)}{2z}r_0^2\right] - \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{(2-\gamma)}} \gamma^{\frac{1}{2-\gamma}} \alpha_0^{\frac{\gamma}{2-\gamma}} (kz)^{\frac{\gamma}{2(2-\gamma)}} \int_{T_1}^{T_2} \exp(it^2) dt \right\}, \tag{15}$$

где  $T_1 = -r_0\sqrt{\frac{k(2-\gamma)}{2z}}$ ,  $T_2 = (R-r_0)\sqrt{\frac{k(2-\gamma)}{2z}}$ .

При  $\gamma=1$  выражение (15) позволяет получить точное решение.

Использование второго подхода (14) приводит к следующему выражению:

$$U^{II}(z) \approx -\exp(ikz) \exp[-i\beta f(r_0)] \times \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{(2-\gamma)}} \gamma^{\frac{1}{2-\gamma}} \alpha_0^{\frac{\gamma}{2-\gamma}} (kz)^{\frac{\gamma}{2(2-\gamma)}} \int_{T_1}^{T_2} \exp(it^2) dt, \tag{16}$$

где  $T_1 = -r_0\sqrt{\frac{k(2-\gamma)}{8z}}$ ,  $T_2 = \frac{R^2 - r_0^2}{r_0} \sqrt{\frac{k(2-\gamma)}{8z}}$ .

Из сравнения формул (15) и (16) видно, что множитель перед интегралом в обеих формулах одинаковый, откуда становится очевидным совпадение «ли-

нии узлов» на графиках интенсивности (рис. 1), хотя сам характер осцилляций заметно отличается.

Для получения численных оценок был выполнен расчёт по формуле (3) численным интегрированием. Параметры расчёта:  $\lambda=1$  мкм,  $R=1$  мм,  $\gamma=0,5$ .  $\alpha_0$  определялось из условия, что числовая апертура на краю элемента равна заданному значению  $\eta$ :

$$NA(R) = \alpha_0^{\gamma} \gamma (kR)^{\gamma-1} = \eta. \tag{17}$$

Положив ( $\eta=0,1$ ), мы обеспечиваем условие параксиального распространения для периферийных лучей. При заданных выше параметрах из (17) получается  $\alpha_0 = 251,3$ .

Сравнение с результатом численного интегрирования выражения (3) показывает (рис. 1), что в данном диапазоне формула (15) является более точной (погрешность менее 7%), чем (16) (погрешность 11%).

Как видно из рис. 1, распределение интенсивности вдоль оптической оси имеет довольно равномерный характер. Таким образом, обобщённая линза при  $\gamma < 1$ , соответствующая в этом случае фраксикону [5], позволяет формировать распределение, аналогичное логарифмическому аксикону [7]. При этом фраксикон не имеет особенности в центральной части и не требует экранирования.

Зависимость средней линии интенсивности от расстояния при  $0 < \gamma < 1$  можно приблизительно описать функцией (до области тени):

$$I(z) \sim (kz)^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}. \tag{18}$$

Это выражение легко получается при использовании классического МСФ.

Из (18) очевидно, что при  $\gamma \rightarrow 1$  получается линейный рост интенсивности, а при  $\gamma \rightarrow 0$  средняя линия интенсивности будет постоянна. Однако последний случай означает отсутствие какого-либо элемента и соответствует дифракции на круглом отверстии, которая характеризуется высоким контрастом осцилляций интенсивности. Поэтому наиболее интересными являются «средние» значения  $\gamma$ . В частности, для  $\gamma=0,5$  средняя линия интенсивности довольно медленно меняется  $I(z) \sim (kz)^{1/3}$  при небольших осцилляциях интенсивности (см. рис. 1).

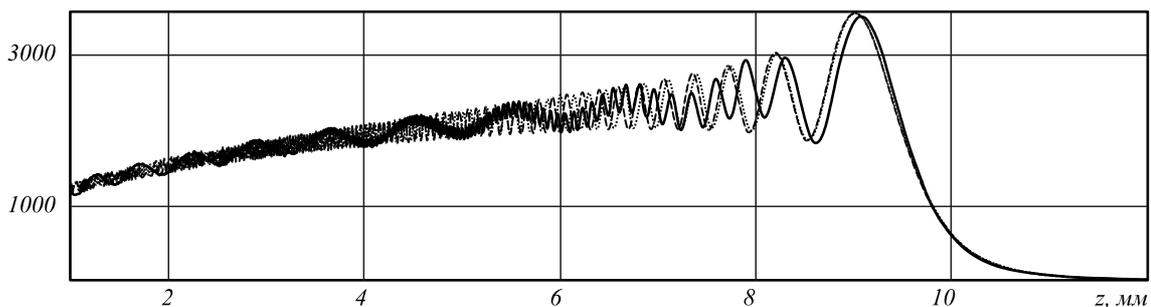


Рис. 1. График интенсивности вдоль оптической оси при  $\gamma=0,5$ : по формуле (15) (точечная линия), по формуле (16) (сплошная линия), численным интегрированием (3) (пунктирная линия)

2.2. Диапазон  $1 \leq \gamma < 2$

Первый способ вычислений в данном диапазоне был подробно рассмотрен в [14], поэтому приведём финальный ответ для случая  $R \geq r_p$  (это условие нарушается лишь на участке дальше максимума интенсивности, где она уже мала):

$$\begin{aligned}
 U^1(z) \approx & \frac{\exp(ikz)}{\mu} \left[ \exp\left(-i\frac{\mu k}{2z} r_p^2\right) - 1 \right] + \\
 & + \frac{\exp(ikz)}{\gamma - 2} \exp[-i\alpha f(r_0)] \times \\
 & \times \left\{ \exp\left[-i\frac{k(\gamma - 2)}{2z} (R - r_0)^2\right] - \right. \\
 & \left. - \exp\left[-i\frac{k(\gamma - 2)}{2z} (r_0 - r_p)^2\right] \right\} - \\
 & - \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{(2 - \gamma)}} \exp(ikz) \exp[-i\alpha f(r_0)] \times \\
 & \times \gamma^{\frac{1}{2-\gamma}} \alpha_0^{\frac{\gamma}{2-\gamma}} (kz)^{\frac{\gamma}{2(2-\gamma)}} \int_{T_1}^{T_2} \exp(it^2) dt,
 \end{aligned} \tag{19}$$

где  $\mu = \frac{10}{(\gamma + 3)\gamma(\gamma - 1)} - 1$ ,  $T_1 = -(r_0 - r_p) \sqrt{\frac{k}{2z}(2 - \gamma)}$ ,

$$T_2 = (R - r_0) \sqrt{\frac{k}{2z}(2 - \gamma)}.$$

При  $R < r_p$  остаётся только первое немного изменённое слагаемое:

$$\begin{aligned}
 U^1(z) = & \frac{k^{1-\gamma} \exp(ikz)}{2z\alpha_0^\gamma \mu^\gamma R^{\gamma-2} - k^{1-\gamma}} \times \\
 & \times \left[ \exp(-i\mu'(k\alpha_0 R)^\gamma) \exp\left(i\frac{k}{2z} R^2\right) - 1 \right],
 \end{aligned} \tag{20}$$

где  $\mu' = 5/(\gamma + 3)$ .

При  $\gamma = 1$  формула (19) становится точной, т.к.  $r_p \rightarrow 0$ , из-за чего первое слагаемое в (19) стремится к нулю, а остальные слагаемые дают формулу (15), которая, как уже упоминалось, при  $\gamma = 1$  является точной.

При вычислениях вторым способом сохраняет силу формула (16). Результаты вычислений по формулам (16) и (19) показаны на рис. 2. Параметры расчёта такие же, как в предыдущем разделе, за исключением двух параметров:  $\gamma = 1,5$ ,  $\alpha_0 = 0,0089$ .

Так же, как и в предыдущем диапазоне, сравнение с численным интегрированием показывает, что формула (19) является более точной (погрешность менее 10%), чем (16) (погрешность 16%).

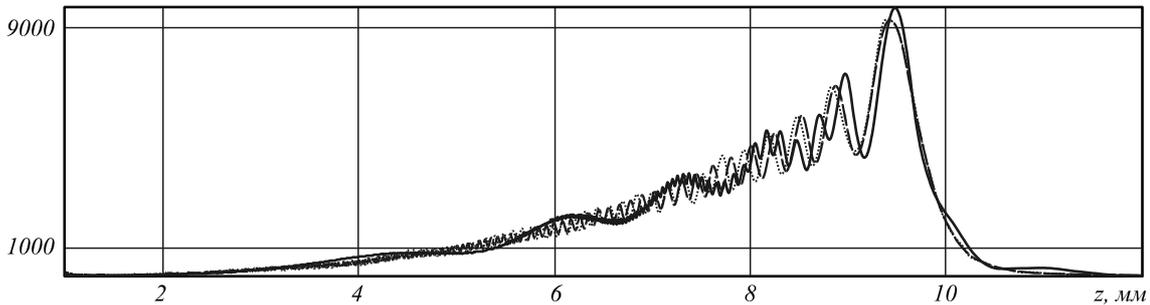


Рис. 2. График интенсивности вдоль оптической оси при  $\gamma = 1,5$ : по формуле (19) (точечная линия), по формуле (16) (сплошная линия), численным интегрированием (3) (пунктирная линия)

Как следует из рис. 2, в диапазоне  $1 < \gamma < 2$  характер зависимости интенсивности от расстояния совсем иной, чем при  $0 < \gamma < 1$ , но аппроксимируется также функцией (18). В частности, при  $\gamma = 1,5$  средняя линия интенсивности имеет зависимость  $I(z) \sim (kz)^3$  (рис. 2).

Заметим, что при  $\gamma < 2$  область тени начинается за условной границей:

$$z_s = R / NA, \tag{21}$$

которая при рассматриваемых параметрах равна  $z_s = 10$  мм.

В случае параболической линзы  $\gamma = 2$  граница (21) соответствует геометрическому фокусу.

2.3. Диапазон  $\gamma > 2$

В этом диапазоне ситуация существенно иная. Вычисление первым способом, как будет показано ниже, оказалось довольно сложной задачей. Рассуждая ана-

логично другим диапазонам, при  $R \geq r_p$  получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 U^1(z) \approx & -\exp(ikz) \left[ \exp\left(-i\frac{k}{2z} r_p^2\right) - 1 \right] + \\
 & + \frac{\exp(ikz)}{\gamma - 2} \exp[-i\beta f(r_0)] \times \\
 & \times \left\{ \exp\left[-i\frac{k(\gamma - 2)}{2z} (R - r_0)^2\right] - \right. \\
 & \left. - \exp\left[-i\frac{k(\gamma - 2)}{2z} (r_0 - r_p)^2\right] \right\} - \\
 & - \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{(2 - \gamma)}} \exp(ikz) \exp[-i\beta f(r_0)] \times \\
 & \times \gamma^{\frac{1}{2-\gamma}} \alpha_0^{\frac{\gamma}{2-\gamma}} (kz)^{\frac{\gamma}{2(2-\gamma)}} \int_{T_1}^{T_2} \exp(-it^2) dt,
 \end{aligned} \tag{22}$$

где  $T_1 = -(r_0 - r_p) \sqrt{\frac{k(\gamma-2)}{2z}}$ ,  $T_2 = (R - r_0) \sqrt{\frac{k(\gamma-2)}{2z}}$ .

В случае  $R < r_p$  остаётся только первое слагаемое:

$$U'(z) \approx -\exp(ikz) \left[ \exp\left(-i \frac{k}{2z} R^2\right) - 1 \right]. \quad (23)$$

Заметим, что ответ в данном приближении не зависит от  $\gamma$ .

К сожалению, результаты численных расчётов показали, что при малом  $z$  (в области геометрической тени) формула (22) даёт очень завышенные значения интенсивности. Причина в неполной корректности применения модифицированного МСФ. Сохранение конечных пределов вполне возможно, но без замены  $r$  на  $r_0$  в (22) появляется второе слагаемое, которое не имеет предела при увеличении  $R$  и намного больше остальных слагаемых. Это слагаемое является ложным, так как получено при квадратичной аппроксимации вблизи  $r = r_0$ .

В силу вышесказанного возможны два варианта коррекции:

- применить метод стационарной фазы полуклассическим способом, ограничиваясь только сохранением конечных пределов, тогда второе слагаемое не появляется;
- это слагаемое оставить, но верхний предел  $R$  заменить на такое значение  $r_u$ , где квадратичная аппроксимация ещё правомерна. Если же взять  $r_u = 2r_0 - r_p$ , что соответствует симметричному отрезку интегрирования с центром в  $r_0$ , то второе слагаемое обратится в нуль.

Действуя по второму варианту, интеграл по отрезку  $[r_u, R]$  положим равным нулю (это оправдано как идеей классического МСФ, так и численными исследованиями).

Первое слагаемое в (22) также следует несколько скорректировать в соответствии с рассуждениями, подробно описанными в работе [14].

Таким образом, после поправок при  $R \leq r_u$  (22) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} U'(z) = & -\frac{\exp(ikz)}{\mu} \left[ \exp\left(-i \frac{k\mu}{2z} r_p^2\right) - 1 \right] + \\ & + \frac{\exp(ikz)}{\gamma-2} \exp[-i\beta f(r_0)] \times \\ & \times \left\{ \exp\left[-i \frac{k(\gamma-2)}{2z} (R-r_0)^2\right] - \right. \\ & \left. - \exp\left[-i \frac{k(\gamma-2)}{2z} (r_0-r_p)^2\right] \right\} - \\ & - \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{(2-\gamma)}} \exp(ikz) \exp[-i\beta f(r_0)] \times \\ & \times \gamma^{\frac{1}{2-\gamma}} \alpha_0^{\frac{\gamma}{2-\gamma}} (kz)^{\frac{\gamma}{2(2-\gamma)}} \int_{T_1}^{T_2} \exp(-it^2) dt, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\mu = 1 - \frac{10}{(\gamma+3)\gamma(\gamma-1)}$ ,  $T_1 = -(r_0 - r_p) \sqrt{\frac{k(\gamma-2)}{2z}}$ ,

$T_2 = (R - r_0) \sqrt{\frac{k(\gamma-2)}{2z}}$ .

При  $R > r_u$  (22) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} U'(z) = & -\frac{\exp(ikz)}{\mu} \left[ \exp\left(-i \frac{k\mu}{2z} r_p^2\right) - 1 \right] + \\ & - \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{(2-\gamma)}} \exp(ikz) \exp[-i\beta f(r_0)] \times \\ & \times 2\gamma^{\frac{1}{2-\gamma}} \alpha_0^{\frac{\gamma}{2-\gamma}} (kz)^{\frac{\gamma}{2(2-\gamma)}} \int_0^T \exp(-it^2) dt, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $T = (r_0 - r_p) \sqrt{\frac{k(\gamma-2)}{2z}}$ ,

Если результат находится по формуле (23), то делается аналогичная коррекция. При  $R < r_p$ :

$$\begin{aligned} U'(z) = & -\frac{a \exp(ikz)}{\mu' R^{\gamma-2} - a} \times \\ & \times \left[ \exp(-i\beta \mu' R^\gamma) \exp\left(i \frac{k}{2z} R^2\right) - 1 \right], \end{aligned} \quad (26)$$

где  $\mu' = 5/(\gamma+3)$ ,  $a = \frac{1}{2\alpha_0^\gamma z k^{\gamma-1}}$ .

Эта формула совпадает с аналогичной в диапазоне  $1 \leq \gamma < 2$ .

При вычислениях вторым способом получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} U''(z) \approx & -\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma-2}} \exp(ikz) \exp[-i\beta f(r_0)] \times \\ & \times \gamma^{\frac{1}{2-\gamma}} \alpha_0^{\frac{\gamma}{2-\gamma}} (kz)^{\frac{\gamma}{2(2-\gamma)}} \int_{T_1}^{T_2} \exp(-it^2) dt, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $T_1 = -r_0 \sqrt{\frac{k(\gamma-2)}{8z}}$ ,  $T_2 = \frac{R^2 - r_0^2}{r_0} \sqrt{\frac{k(\gamma-2)}{8z}}$ .

При  $\gamma = 4$  формула (27) становится точной. Результаты вычислений по формулам (24)–(27) показаны на рис. 3. Чтобы имело смысл сравнение с квадратурной формулой, выбрано  $\gamma = 3$ , когда (27) не является точной. Из (17) параметр  $\alpha_0 = 9,46 \cdot 10^{-4}$ .

Сравнение с результатом численного интегрирования показывает, что формула (27) является более точной (погрешность менее 13%), чем (24)–(26) (погрешность 15%), что отличает данный диапазон от предшествующих. Также видно, что область тени теперь располагается до границы (21).

Зависимость интенсивности от расстояния такая же, как (18). В частности, при  $\gamma = 3$  средняя линия интенсивности имеет зависимость  $I(z) \sim (kz)^{-3}$  (рис. 3).

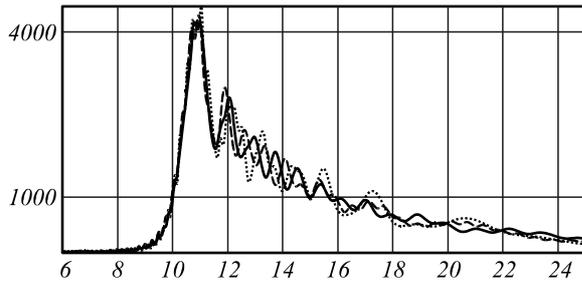


Рис. 3. График интенсивности вдоль оптической оси при  $\gamma=3$ : по формулам (24)–(26) (точечная линия), по формуле (27) (пунктирная линия), численным интегрированием (3) (сплошная линия)

### 3. Анализ фокального распределения

Выражение (2) можно приблизительно оценить, используя классический МСФ:

$$U(\rho, z) \approx -i \exp(ikz) \exp[-i\beta f(r_0)] \times \sqrt{\frac{2\pi}{|\gamma-2|}} (\gamma\alpha_0^\gamma)^{\frac{1}{2-\gamma}} (kz)^{\frac{\gamma}{2(2-\gamma)}} J_0\left(\frac{kr_0\rho}{z}\right). \quad (28)$$

Интенсивность в этом случае имеет следующий вид:

$$I(\rho, z) \approx \frac{2\pi}{|\gamma-2|} (\gamma\alpha_0^\gamma)^{\frac{2}{2-\gamma}} (kz)^{\frac{\gamma}{2(2-\gamma)}} J_0^2\left(\frac{kr_0\rho}{z}\right). \quad (29)$$

Как следует из рассуждений предыдущих разделов, максимальное значение на оптической оси (фокальная область) находится вблизи границы тени (21). Используя выражение (17), можно записать общее выражение максимального (фокального) значения для всех диапазонов  $\gamma$  через числовую апертуру NA:

$$I(0, z_s) \approx \frac{2\pi}{|\gamma-2|} kR \cdot NA. \quad (30)$$

Из полученной оценки следует, что максимальное значение в фокусе получается при  $\gamma=2$ , т.е., как и следовало ожидать, параболическая линза обеспечивает наилучшую концентрацию энергии в фокальной области. Однако поперечный размер фокального пятна при этом не является минимально возможным. Считается, что аксикон ( $\gamma=1$ ), формирующий беселевый пучок [4], обеспечивает наиболее протяжённое и компактное фокальное распределение.

Рассмотрим поперечное распределение, которое формирует обобщённая линза (1). Используя выражение (29), поперечный размер можно оценить по первому нулю функции Бесселя:

$$\rho_0(z) = \frac{2,4z}{kr_0}, \quad (31)$$

$$\text{где } r_0 = \left(\frac{k^{1-\gamma}}{z\alpha_0^\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-2}} = \left(\frac{\gamma R^{\gamma-1}}{z \cdot NA}\right)^{\frac{1}{\gamma-2}}. \quad (32)$$

Для удобства анализа переписем (31) в следующем виде:

$$\rho_0(z) = \frac{2,4}{k} \left(\frac{NA}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-2}} \left(\frac{z}{R}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma-2}}. \quad (33)$$

При  $\gamma=1$  размер светового пятна имеет постоянную величину, не зависящую от радиуса оптического элемента и расстояния:

$$\rho_{0,\gamma=1} = \frac{2,4}{k \cdot NA}. \quad (34)$$

Анализ выражения (33) предсказывает уменьшение размера светового пятна при  $z \rightarrow 0$  для  $\gamma < 1$  и  $\gamma > 2$ , а для  $1 < \gamma < 2$  – при  $z \rightarrow \infty$ .

На рис. 4 показаны зависимости радиуса светового пятна (33) от расстояния  $z$  при нескольких значениях параметра  $\gamma$ .

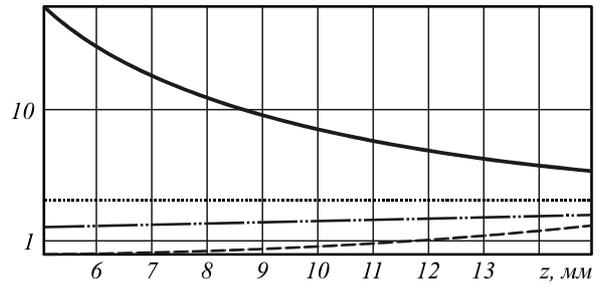


Рис. 4. Зависимость радиуса светового пятна (33) от расстояния при  $\gamma=0,5$  (штрихпунктирная линия),  $\gamma=1$  (точечная линия),  $\gamma=1,5$  (сплошная линия),  $\gamma=2,5$  (пунктирная линия)

Из рис. 4 следует, что при  $\gamma < 1$  и  $\gamma > 2$  обобщённая линза обеспечивает формирование светового пятна меньшего размера, чем аксикон. Причём уменьшение размера наиболее значительно при  $z \rightarrow 0$  для  $\gamma > 2$ , что соответствует области тени и является мало интересным с практической точки зрения результатом.

Поэтому рассмотрим размер светового пятна в максимуме интенсивности, который достигается вблизи границы области тени (21):

$$\rho_0(z_s) = \frac{2,4}{k \cdot NA \cdot \gamma^{1/(\gamma-2)}}. \quad (35)$$

Из выражения (35) следует, что при  $\gamma^{1/(\gamma-2)} > 1$  даже в области максимальной интенсивности размер светового пятна может быть меньше, чем формирует аксикон (34). На рис. 5 показана зависимость  $\gamma^{1/(\gamma-2)}$ , из которой наглядно видно, что при  $\gamma < 1$  и  $\gamma > 2$  размер светового пятна (35) будет меньше (34).

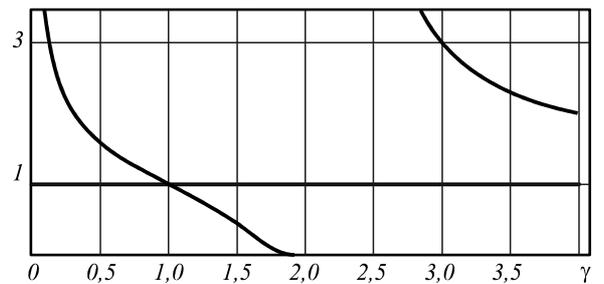


Рис. 5. Зависимость функции  $\gamma^{1/(\gamma-2)}$  от  $\gamma$

К сожалению, классический МСФ позволяет получить довольно приближённые оценки. На рис. 6 показаны зависимости размера светового пятна по полуспаду интенсивности (FWHM) от расстояния, рассчитанные методом численного интегрирования выражения (2).

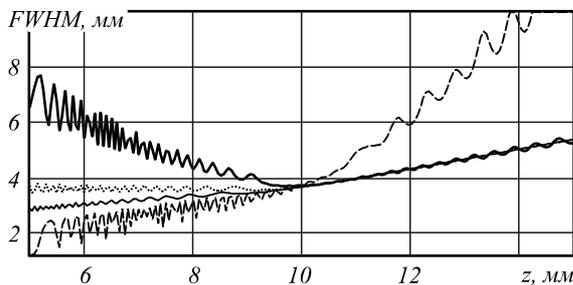


Рис. 6. Зависимость размера светового пятна (FWHM) (33) от расстояния при  $\gamma=0,5$  (тонкая сплошная линия),  $\gamma=1$  (точечная линия),  $\gamma=1,5$  (сплошная линия),  $\gamma=2,5$  (пунктирная линия)

Как видно из рис. 6, действительно, при  $\gamma < 1$  и  $\gamma > 2$  в области  $z < z_s$  обобщённая линза (1) позволяет формировать световое пятно меньшего размера, чем при использовании аксикона. Однако при  $\gamma > 2$  это область тени, поэтому более перспективным является использование параметра  $\gamma < 1$ . Заметим, что в плоскости  $z = z_s$  численное моделирование показывает одинаковый размер светового пятна для рассмотренных значений  $\gamma$ .

На рис. 7 показаны графики поперечного сечения интенсивности в плоскости  $z = z_s / 2$  для  $\gamma=0,5$  и  $\gamma=1$ .

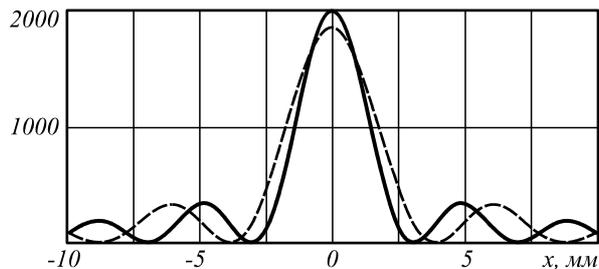


Рис. 7. Графики поперечного сечения интенсивности в плоскости  $z = z_s / 2$  при  $\gamma=0,5$  (сплошная линия),  $\gamma=1$  (пунктирная линия)

Как видно из рис. 7, фраксикон ( $\gamma=0,5$ ) в этом случае обеспечивает как меньший размер светового пятна, так и большее значение интенсивности, чем аксикон ( $\gamma=1$ ).

Объяснить этот эффект можно структурой обобщённой линзы при  $\gamma < 1$ . В отличие от обычной линзы, у которой значение числовой апертуры максимально в периферийной области, у фраксикона числовая апертура увеличивается с уменьшением радиуса оптического элемента. На рис. 8 показаны фазы дифракционных оптических элементов, соответствующих (1) при  $NA=0,1$  и  $R=1$  мм для различных значений параметра  $\gamma$ . Таким образом, если мы согласовываем значения числовой апертуры на краю элементов в периферийной части  $NA(R)$  в соответствии с (17), то при  $\gamma < 1$  в центральной части элемента будет достигаться более высокое значение числовой апертуры, которое и обеспечивает меньшее значение светового пятна.

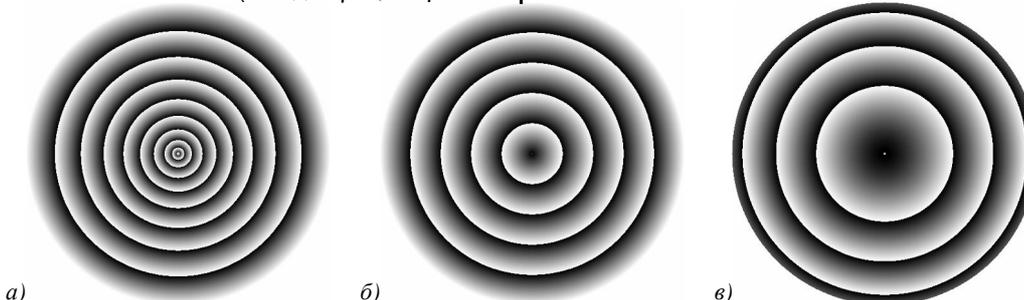


Рис. 8. Вид фазы обобщённой линзы (1) при  $NA=0,1$  и  $R=1$  мм для  $\gamma=0,5$  (а);  $\gamma=1$  (б) и  $\gamma=1,5$  (в)

**Заключение**

Предложена модификация метода стационарной фазы, на основе которой получены два типа аналитических выражений для осевого распределения комплексной амплитуды, формируемого обобщённой линзой в параксиальном приближении. Каждое из полученных выражений обеспечивает высокую точность расчёта в различных диапазонах значений степени обобщённой линзы  $\gamma$ .

Средняя линия интенсивности вне области тени имеет зависимость

$$I(z) \sim (kz)^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}$$

Границей области тени, которая располагается справа при  $\gamma < 2$  и слева при  $\gamma > 2$ , является геометрический фокус параболической линзы ( $\gamma=2$ ). Максимальное значение интенсивности для любых значений  $\gamma$  достигается вблизи границы области тени.

При  $0 < \gamma < 1$  обобщённая линза соответствует фраксикону (дробному аксикону) и позволяет формировать практически равномерное распределение интенсивности. Такое действие аналогично логарифмическому аксикону, но при этом фраксикон не имеет особенности в центральной части и не требует экранирования.

При  $1 < \gamma < 2$  фраксикон обеспечивает рост интенсивности вдоль оптической оси быстрее линейного (до области тени).

При  $\gamma > 2$  обобщённая линза формирует интенсивность, которая имеет максимальное значение вблизи области тени, и при дальнейшем увеличении расстояния убывает.

В диапазоне  $\gamma < 2$  первый тип аналитических выражений является более точным и позволяет получить точное выражение для  $\gamma=1$ , а при  $\gamma > 2$  более точным является второй тип аналитических выражений, который позволяет получить точное выражение для  $\gamma=4$ .

В диапазоне  $\gamma < 1$  обобщённая линза позволяет сформировать более узкий световой пучок, чем обеспечивает линейный аксикон с той же числовой апертурой. Это связано с тем, что в этом случае числовая апертура увеличивается от периферии к центру оптического элемента.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 13-07-97004-р\_поволжье\_a, гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-4128.2012.9, а также Министерства образования и науки Российской Федерации.

### Литература

1. **McLeod, J.H.** The axicon: a new type of optical element / J.H. McLeod // *J. Opt. Soc. Am.* – 1954. – Vol. 44. – P. 592-597.
2. **Mikula, G.** Diffractive elements for imaging with extended depth of focus / G. Mikula, A. Kolodziejczyk, M. Makowski, C. Prokopowicz, M. Sypek // *Optical Engineering.* – 2005. – Vol. 44(5). – P. 058001–058008.
3. **Хонина, С.Н.** Применение аксиконов в изображающих системах для увеличения глубины фокуса / С.Н. Хонина, Д.А. Савельев // *Известия Самарского научного центра РАН.* – 2011. – Т. 13, № 6. – С. 7-15.
4. **Durnin, J.** Diffraction-free beams / J. Durnin, J.J. Miceli and J.H. Eberly // *Phys. Rev. Lett.* – 1987. – V. 58, N 15. – P. 1499-1501.
5. **Хонина, С.Н.** Фраксикон – дифракционный оптический элемент с конической фокальной областью / С.Н. Хонина, С.Г. Волоотовский // *Компьютерная оптика.* – 2009. – Т. 33, № 4. – С. 401-411.
6. **Koronkevich, V.P.** Lensacon / V.P. Koronkevich, I.A. Mikhailsova, E.G. Churin and Yu.I. Yurlov // *Appl. Opt.* – 1995. – Vol. 34, N 25. – P. 5761-5772.
7. **Sochacki, J.** Annular-aperture logarithmic axicon / J. Sochacki, Z. Jaroszewicz, L.R. Staronski and A. Kolodziejczyk // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1993. – V. 10. – P. 1765-1768.
8. **Голуб, М.А.** Дифракционный расчёт оптического элемента, фокусирующего в кольцо / М.А. Голуб, Н.Л. Казанский, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер, С.И. Харитонов // *Автоматрия.* – 1987. – № 6. – С. 8-15.
9. **Казанский, Н.Л.** Исследование дифракционных характеристик фокусатора в кольцо методом вычислительного эксперимента // *Компьютерная оптика.* – М.: МЦНТИ, – 1992. – Вып. 10-11. – С. 128-144.
10. **Устинов, А.В.** Геометрооптический анализ обобщённой рефракционной линзы / А.В. Устинов, С.Н. Хонина // *Известия СНЦ РАН.* – 2012. – Т. 14, № 4. – С. 29-37.
11. **Федорюк, М.В.** Асимптотика: Интегралы и ряды / М.В. Федорюк. – М.: Наука, 1987. – 544 с.
12. **Голуб, М.А.** Дифракционный расчёт интенсивности светового поля вблизи фокальной линии / М.А. Голуб, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер, С.И. Харитонов // *Компьютерная оптика.* – 1992. – № 10-11. – С. 122-127.
13. **Устинов, А.В.** Сравнительный анализ параболической линзы и аксикона в моделях геометрической и скалярной параксиальной оптики / А.В. Устинов, А.В. Карсаков, С.Н. Хонина // *Вестник СГАУ.* – 2012. – № 4(35). – С. 230-239.
14. **Устинов, А.В.** Анализ осевого распределения, формируемого фраксиконом в параксиальном и непараксиальном случаях / А.В. Устинов, С.Н. Хонина, А.В. Карсаков // *Известия СНЦ РАН.* – 2013. – Т. 15, № 4. – С.18-25.
15. **Хонина, С.Н.** Расчёт линз для формирования параксиального продольного распределения в соответствии с их пространственным спектром / С.Н. Хонина, А.В. Устинов // *Компьютерная оптика.* – 2013. – Т. 37, № 2. – С. 193-202.

### References

1. **McLeod, J.H.** The axicon: a new type of optical element / J.H. McLeod // *J. Opt. Soc. Am.* – 1954. – Vol. 44. – P. 592-597.
2. **Mikula, G.** Diffractive elements for imaging with extended depth of focus / G. Mikula, A. Kolodziejczyk, M. Makowski, C. Prokopowicz, M. Sypek // *Optical Engineering.* – 2005. – Vol. 44(5). – P. 058001–058008.
3. **Khonina, S.N.** Axicons application in imaging systems for increasing depth of focus / S.N. Khonina, D.A. Savelyev // *Izv. SNC RAS.* – 2011. – V. 13, N 6. – P. 7-15. – (In Russian).
4. **Durnin, J.** Diffraction-free beams / J. Durnin, J.J. Miceli and J.H. Eberly // *Phys. Rev. Lett.* – 1987. – V. 58, N 15. – P. 1499-1501.
5. **Khonina, S.N.** Fracxicon – diffractive optical element with conical focal domain / S.N. Khonina, S.G. Volotovskiy // *Computer optics.* – 2009. – V. 33, N 4. – P. 401-411. – (In Russian).
6. **Koronkevich, V.P.** Lensacon / V.P. Koronkevich, I.A. Mikhailsova, E.G. Churin and Yu.I. Yurlov // *Appl. Opt.* – 1995. – Vol. 34, N 25. – P. 5761-5772.
7. **Sochacki, J.** Annular-aperture logarithmic axicon / J. Sochacki, Z. Jaroszewicz, L.R. Staronski and A. Kolodziejczyk // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1993. – V. 10. – P. 1765-1768.
8. **Golub, M.A.** Diffraction calculation for an optical element which focuses into a ring / M.A. Golub, N.L. Kazanskiy, I.N. Sisakyan, V.A. Soifer, S.I. Kharitonov // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing.* – 1987. – № 6. – P. 7-14.
9. **Kazanskiy, N.L.** Numerical investigation of the diffraction characteristics of a focusator in the ring // *Computer Optics.* – 1992. – No. 10-11. – P. 128-144. – (In Russian).
10. **Ustinov, A.V.** Geometrooptical analysis of generalized refractive lenses / A.V. Ustinov, S.N. Khonina // *Izv. SNC RAS.* – 2012. – V. 14, N 4. – P. 29-37. – (In Russian).
11. **Fedoruk, M.V.** Asymptotics Integral and Series / M.V. Fedoruk. – Moscow: "Nauka" Publisher, 1987. – 544 p. – (In Russian).
12. **Golub, M.A.** Diffraction calculation of the intensity of the light field near the focal line / M.A. Golub, L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, I.N. Sisakyan, V.A. Soifer, S.I. Kharitonov // *Computer Optics.* – 1992. – No. 10-11. – P. 122-127. – (In Russian).
13. **Ustinov, A.V.** Comparative analysis of parabolic lens and axicon in geometric and scalar paraxial optical models / A.V. Ustinov, A.V. Karsakov, S.N. Khonina // *Vestnik SSAU.* – 2012. – N 4(35). – P. 230-239. – (In Russian).
14. **Ustinov, A.V.** Analysis of the axial distribution formed by a fracxicon in the paraxial and nonparaxial cases / A.V. Ustinov, S.N. Khonina, A.V. Karsakov // *Izv. SNC RAS.* – 2013. – V. 15, N 4. – P. 18-25. – (In Russian).
15. **Khonina, S.N.** Design lenses forming paraxial longitudinal distribution according to their spatial spectra / S.N. Khonina, A.V. Ustinov // *Computer optics.* – 2013. – V. 37, N 2. – P. 193-202. – (In Russian).

**GENERALIZED LENS: CALCULATION OF DISTRIBUTION ON THE OPTICAL AXIS**

A.V. Ustinov, S.N. Khonina

*Image Processing Systems Institute of Russian Academy of Sciences***Abstract**

We analytically and numerically consider action of the generalized lens – a diffractive optical element with arbitrary degree of dependence of a phase function. Special cases of the generalized lens are axicon and a parabolic lens. On the basis of the modified stationary phase method analytical expressions for the axial distribution formed by the generalized lens in paraxial approach are received. Two types of analytical expressions provide high accuracy of calculation in various ranges of a degree of the generalized lens.

**Key words:** axicon, parabolic lens, fracxicon, generalized lens, modified stationary phase method.

**Сведения об авторах**

**Устинов Андрей Владимирович**, 1968 года рождения, в 1991 году окончил Куйбышевский авиационный институт имени академика С.П. Королёва (КуАИ) по специальности «Прикладная математика», работает ведущим программистом в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт систем обработки изображений РАН; является аспирантом Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва. Область научных интересов: дифракционная оптика, разработка программ моделирования работы оптических элементов; обработка изображений, в частности, гидродинамических процессов и биомедицинских.

E-mail: [andr@smr.ru](mailto:andr@smr.ru).

**Andrey Vladimirovich Ustinov**, (b. 1968) graduated from Kuibyshev Aviation Institute named after academician S.P. Korolyov (KuAI) on a specialty “Applied mathematics”, works as the leading programmer in the Image Processing Systems Institute of the RAS; postgraduate student of the Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov. Research interests: diffractive optics, software design for modeling of optical elements operating; images processing, particularly images of hydrodynamic processes and biomedical images.

*Сведения об авторе Хонина Светлана Николаевна – см. стр. 306 этого выпуска.*

*Поступила в редакцию 20 июня 2013 г.*