ДИСКРЕТНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ КАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ

Чернов В.М., Каспарьян М.С.
Институт систем обработки изображений РАН,
Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

Аннотация

Анонсируются методы синтеза дискретных ортогональных преобразований на двумерных областях, ассоциированных с фундаментальными областями систем счисления в квадратичных кольцах.

Ключевые слова: ортогональные преобразования, фрактал, канонические системы счисления.

Введение

Первоначальный энтузиазм, вызванный появлением работ, посвящённых фракталам – объектам, которые в классических учебниках математического анализа фигурировали лишь в качестве «патологических» контрпримеров к теоремам («ковёр Серпинского», «сапог Шварца» и т.п.), постепенно пошёл на убыль. Между тем самоподобные ветвящиеся структуры/объекты на изображениях достаточно типичны и естественны. Эта естественность может объективно определяться как спецификой предметной области, так и субъективным визуальным восприятием или моделью наблюдений.

Именно такие структуры характерны, например, для наномасштабных изображений натурных образцов, для обработки которых приходится использовать традиционный, но всё же паллиативный, математический аппарат цифрового спектрального анализа: дискретные спектральные методы, хорошо зарекомендовавшие себя при обработке и анализе изображений, ориентированы, прежде всего, на применение к изображениям, определённым на прямоугольных областях. Хотя исследователя очень часто интересуют спектральные характеристики объекта, а не «объекта на фоне». В частности, особое место занимают изображения, для которых особенности психофизиологического восприятия человеком порождают оптические иллюзии из-за наличия фона, формирующего в сознании неадекватную интерпретацию изображения. Между тем даже при наличии априорной информации именно о «ветвистом», «самоподобном» характере анализируемого объекта его спектральная специфика может быть учтена только при предварительном «вырезании» этого объекта из малоинформативного (для анализа именно данного объекта) прямоугольного изображения с естественными для такого подхода искажениями спектральных характеристик.

Анонс адекватной для рассматриваемого класса изображений версии спектрального анализа, наследующей в т.ч. и развитую теорию быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований, является одной из основных задач работы.

Основную идею предлагаемого подхода проще всего объяснить на примере, указав отличия от традиционных методов и охарактеризовав новые математические идеи, лежащие в основе.

Как известно, дискретное преобразование Фурье (ДПФ) содержит в показателях экспонент билинейную форму, осуществляющую спаривание исходного пространства, на котором определён сигнал, и сопряжённого. Широко известный алгоритм Кули–Тьюки (БПФ) при его реализации осуществляет пространственное или частотное «прореживание» индексов входного или выходного сигнала. В случае преобразования длины, равной степени двойки, эти прореживания могут быть охарактеризованы значением младшего или старшего бита в представлении входных/выходных индексов в обычной двоичной системе счисления. В предлагаемом подходе входные/выходные индексы суть элементы многомерной решётки целых элементов того или иного кольца алгебраических чисел, представленных в т.н. «канонической системе счисления» (КСС) (т.е. системе счисления, основанием которой является не «обычное» целое рациональное, а целое алгебраическое число). При такой интерпретации структурные особенности быстрых алгоритмов сохраняются, но возникают дискретные ортогональные преобразования с базисными функциями, отличными от экспонент, фигурирующих в ДПФ.

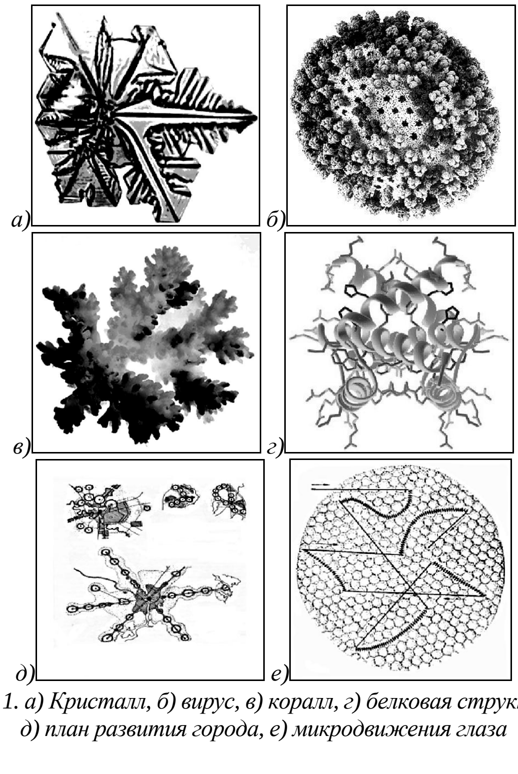


Рис. 1. а) Кристалл, б) вирус, в) коралл, г) белковая структура, д) план развития города, е) микродвижения глаза

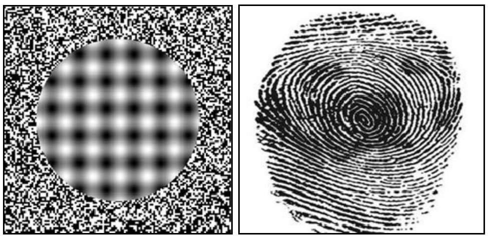


Рис. 2. Оптические иллюзии

Кроме того, целые квадратичные числа с представлением фиксированной длины в КСС образуют подмножество дискретной решётки со сложной непрямоугольной формой, достаточно часто рассматриваемой в теории фракталов. В частности, для кольца целых Гауссовых чисел и бинарной КСС с основанием $\alpha = (-1 \pm i)$ такой областью, т.е. фактически аналогом квадрата, является «дракон Хартера–Хейтуэя» [3] в его предфрактальной версии.

Системы счисления в кольцах целых алгебраических чисел

В 80–е годы появились работы [1], [2], опубликованные в малочитаемых венгерских журналах, в которых дана исчерпывающая классификация так называемых «канонических систем счисления» в кольцах целых квадратичных полей. Эти работы в своё время прошли почти незамеченными. За последующие 30 лет опубликовано более 1000 работ о канонических системах счисления, лишь незначительная часть которых имеет прикладную направленность.

Пусть $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ есть квадратичное поле:

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right) = \left\{ z = a + b\sqrt{d}; a, b \in \mathbb{Q} \right\},$$

где d – целое число, свободное от квадратов, $\mathbb{S}\left(\sqrt{d}\right)$ – кольцо целых элементов этого поля, то есть множество таких чисел $z = a + b\sqrt{d}; a, b \in \mathbb{Q}$, что их норма $Norm(z)$ и след $Tr(z)$ есть целые числа:

$$Norm(z) = \left(a + b\sqrt{d}\right)\left(a - b\sqrt{d}\right) = a^2 - b^2 d \in \mathbb{Z},$$

$$Tr(z) = \left(a + b\sqrt{d}\right) + \left(a - b\sqrt{d}\right) = 2a \in \mathbb{Z}.$$

Определение 1. Целое алгебраическое число $\alpha = A \pm \sqrt{d}$ называется основанием канонической системы счисления в кольце $\mathbb{S}\left(\sqrt{d}\right)$ целых элементов поля $\mathbb{Q}\left(\sqrt{d}\right)$, если любой целый элемент этого поля однозначно представим конечной суммой

$$z = \sum_{j=1}^{k(z)} a_j \alpha^j, a_j \in I = \left\{0, \ldots, \left|Norm(\alpha)\right| - 1\right\}.$$

Пара $\{\alpha, I\}$ называется канонической системой счисления в кольце $\mathbb{S}\left(\sqrt{d}\right)$, а I – алфавитом этой системы. В работах [1] и [2] описан также алгоритм определения цифр в представлении элемента квадратичного целого в канонической системе счисления. Этот алгоритм сводится к нелинейной, но простой рекуррентной процедуре.

Фундаментальные области, ассоциированные с системами счисления в квадратичных кольцах

Если $k=k(z)$ фиксировано, то множество чисел в определении 1, представимых не более, чем k-членной суммой, будем называть k – фундаментальной областью КСС.

Сужение множества «цифр» с I до I_0:

$$I_0 \subset I \in \left\{0, \ldots, \left|Norm(\alpha)\right| - 1\right\}$$

приводит к замене фундаментальных областей КСС на области, аналогичные «ковру Серпинского», а замена «канонического» множества цифр I на множество достаточно произвольных элементов кольца порождает области, примеры которых изображены на рис. 4.

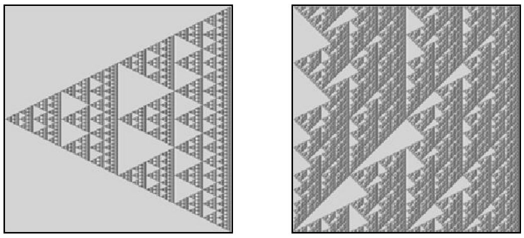


Рис. 3. Фундаментальные области при неполном алфавите $I_0 \subset I$

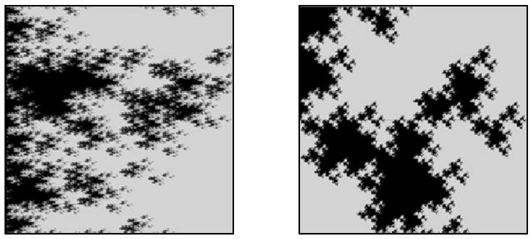


Рис. 4. Фундаментальные области при полном алфавите I

Дискретные ортогональные преобразования на фундаментальных областях КСС

При описании общего подхода синтеза дискретных ортогональных преобразований на k – фундаментальных областях КСС ограничимся иллюстративным примером, в котором основные идеи подхода реализуются в рафинированном виде.

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) длины $N = 2^t$

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) exp\left\{2\pi i \frac{nm}{N}\right\}, (1) \quad (1)$$

$$m = 0, \ldots, N-1$$

запишем в форме

$$X(m) = \sum_{n \in D} x(n) E\left(\overline{m} \odot \overline{n}\right), \quad (2)$$

$$m \in D = \{0, \ldots, N-1\},$$

где операция $\odot$ определяет характер «спаривания», т.е. умножения элементов $\overline{n} = \left(n_0, \ldots, n_{t-1}\right)$ и

$\bar{m} = (m_0, \ldots, m_{t-1})$ уже в 2^t-мерной алгебре битовых векторов, ассоциированных с представлением чисел

$$\bar{n} \leftrightarrow n = n_0 + \ldots + n_{t-1} 2^{t-1},$$

$$\bar{m} \leftrightarrow m = m_0 + \ldots + m_{t-1} 2^{t-1}$$

в обычной двоичной системе счисления.

Специфика функций $E(\bar{n}) = exp\left\{2\pi i \frac{n}{N}\right\}$ для ДПФ полностью определяется следующими условиями:

$$E(\bar{0}) = 1;$$

$$E(\bar{p} + \bar{q}) = E(\bar{p}) E(\bar{q}),$$

а также теми значениями, которые $E(\bar{n})$ принимает на векторах

$$\bar{\varepsilon}_k = (\delta_{0,k}, \ldots, \delta_{t-1,k}),$$

где $\delta_{i,j}$ – дельта функции Кронекера.

Заметим, что для ДПФ справедливы равенства

$$E(\bar{\varepsilon}_t) = 1, \; E(\bar{\varepsilon}_{t-1}) = -1 \text{ и } E(2\bar{\varepsilon}_t) = \left(E(\bar{\varepsilon}_t)\right)^2. \quad (3)$$

Последнее соотношение индуцирует равенство $exp\left\{2\pi i \frac{2^{k+1}}{N}\right\} = \left(exp\left\{2\pi i \frac{2^k}{N}\right\}\right)^2$, которое уже перестаёт быть верным, если векторы $\bar{n}$ и $\bar{m}$ ассоциированы с элементами квадратичного кольца $\mathbb{S}(\sqrt{d})$, элементы которого представлены в бинарной системе счисления с основанием $\alpha \neq 2$.

Как известно [1], [2], существуют ровно три квадратичных кольца, в которых есть бинарные системы счисления, а именно: $\mathbb{S}(i)$, $\mathbb{S}(i\sqrt{2})$, $\mathbb{S}(i\sqrt{7})$. Основания бинарных КСС квадратичных колец $\mathbb{S}(i)$, $\mathbb{S}(i\sqrt{2})$, $\mathbb{S}(i\sqrt{7})$ удовлетворяют квадратным уравнениям:

$$\alpha_1^2 + 2\alpha_1 + 2 = 0,$$

$$\alpha_2^2 + 2 = 0, \quad (4)$$

$$\alpha_7^2 + \alpha_7 + 2 = 0.$$

Поэтому будем искать комплекснозначные базисные функции преобразования

$$X(w) = \sum_{z \in D_t} x(z) \text{Л}(\bar{z} \odot \bar{w}), w \in D_t \quad , \quad (5)$$

где D_t – t-фундаментальная область КСС для $\mathbb{S}(i\sqrt{d})$, удовлетворяющие условиям:

$$\Lambda(\bar{0}) = 1 = \Lambda(\overline{\varepsilon_t}),$$

$$\Lambda(\bar{p} + \bar{q}) = \Lambda(\bar{p}) \Lambda(\bar{q}),$$

$$\Lambda(\overline{\varepsilon_{t+1}}) = -1,$$

$$\begin{cases} \Lambda(\varepsilon_{k+1}) = \Lambda^2(\varepsilon_k)\Lambda(\varepsilon_{k-1}), & для\, S(i) \\ \Lambda(\varepsilon_{k+1}) = \Lambda^2(\varepsilon_k), & для\, S(i\sqrt{2}) \\ \Lambda(\varepsilon_{k+1}) = \Lambda(\varepsilon_k)\Lambda^2(\varepsilon_{k-1}), & для\, S(i\sqrt{7}) \end{cases}$$

с основаниями

$$\alpha_1 = -1 + i,$$

$$\alpha_2 = i\sqrt{2},$$

$$\alpha_7 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$$

соответственно.

Теорема 1. Преобразование (5) с базисными функциями, определёнными соотношением

$$\Lambda(\varepsilon_k) = \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{-\pi\bar{\alpha}^t\alpha^k + \pi\alpha^t\bar{\alpha}^k}{2^t}\right\}, & для\, S(i); \\ \exp\left\{\dfrac{-\pi\bar{\alpha}^t\alpha^k + \pi\alpha^t\bar{\alpha}^k}{2^t\sqrt{2}}\right\}, & для\, S(i\sqrt{2}); \\ \exp\left\{\dfrac{-\pi\bar{\alpha}^t\alpha^k + \pi\alpha^t\bar{\alpha}^k}{2^{t-1}\sqrt{7}}\right\}, & для\, S(i\sqrt{7}); \end{cases}$$

является ортогональным, т.е.

$$\sum_{n \in D_t} \Lambda(\bar{n}) \Lambda^*(\bar{k}) = 2^t \delta_{n,k},$$

где $*$ – знак комплексного сопряжения.

Быстрые алгоритмы

Ограничимся для наглядности иллюстрацией функций $\text{Л}(n \odot m)$, определённых на простейшей области («дракон Хартера–Хейтуэя»), являющейся фундаментальной областью для кольца целых Гауссовых чисел $\mathbb{S}(i)$. Нетрудно заметить, что условия (1)–(3) определяют характер аддитивной циклической группы $\mathbb{G} \cong \mathbb{C}_N, N = 2^t$, а условие (4) определяет специфику спаривания ассоциированного с этой группой 2^t-мерного «битового» пространства с сопряжением к нему. При выборе другой интерпретации ассоциированного пространства и другого принципа спаривания получится и другое преобразование, отличное от описанного выше «фурьеподобного» ДОП.

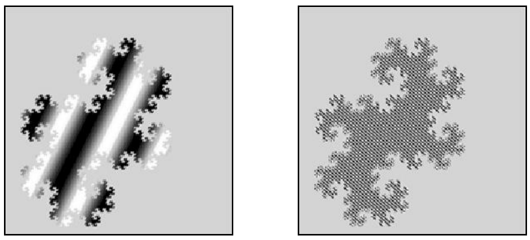


Рис. 5. Вещественные части базисных функций «фурьеподобных» преобразований

Например, при определении операции $\odot$ как побитового умножения векторов $\bar{n}$ и $\bar{m}$ получается «хаароподобное» ДОП, изображения базисных функций которого приведены ниже. Его базисные функции являются характерами группы $\mathbb{G} \cong \mathbb{C}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}_2$. При аналогичном рассмотрении группы

$$\mathbb{G} \cong \mathbb{C}_{2^{\alpha_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}_{2^{\alpha_s}}$$

получаются ДОП-аналоги преобразований Виленкина–Крестенсона и т.д. Заметим, что в силу метода построения базисных функций для рассмотренных преобразований наследуются все общие принципы синтеза быстрых алгоритмов ДОП [4].

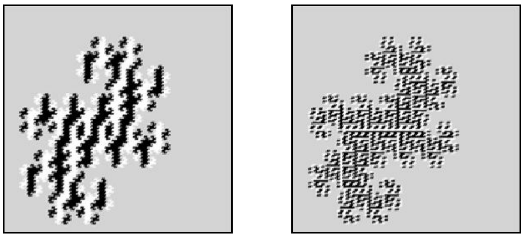


Рис. 6. Базисные функции «хаароподобных» преобразований

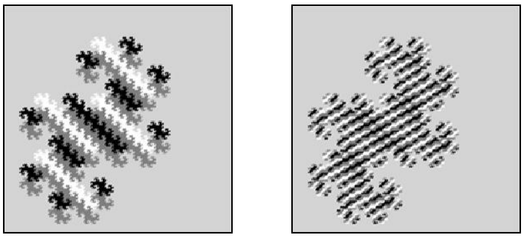


Рис. 7. Базисные функции аналогов преобразования Виленкина–Крестенсона

Заключение

Нетрудно заметить, что Теорема 1 легко обобщается на случай произвольной КСС, с ограничениями на «канонический» алфавит I, соответствующими связи параметров d и α, определёнными утверждениями работ [1], [2]. Также несложным является обобщение Теоремы 1 на случай «неполного» алфавита $I_0 \subset I$.

По-настоящему сложной и интересной задачей является синтез ДОП на фундаментальных областях для алфавитов достаточно произвольной природы, что является предметом специального перспективного исследования.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках постановления Правительства Российской Федерации от 9.04.2010 г. № 218: договор № 02.Г36.31.0001 от 12.2.2013 и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 12-01-00822-а, 13-01-97007-р_поволжье_а, 12-01-31316 мол_а).

Литература

1. **Katai, I.** Kanonische Zahlensysteme in der Theorie der quadratischen algebraischen Zahlen / I. Katai, B. Kovacs // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1980. – B. 42. – P. 99-107.
2. **Katai, I** Canonical Number Systems in Imaginary Quadratic Fields / I. Katai, J. Szabo // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1975. – V. 37. – P. 255-260.
3. **Кнут, Д.** Искусство программирования для ЭВМ Т. 2. Получисленные алгоритмы. – М.: Мир, 1977. – 727 с.
4. **Чернов, В.М.** Арифметические методы синтеза быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований. – М.: Физматлит, 2007.

References

1. **Katai, I.** Kanonische Zahlensysteme in der Theorie der quadratischen algebraischen Zahlen / I. Katai, B. Kovacs // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1980. – B. 42. – P. 99-107.
2. **Katai, I** Canonical Number Systems in Imaginary Quadratic Fields / I. Katai, J. Szabo // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1975. – V. 37. – P. 255-260.
3. **Knuth, D. E.** The Art of Computer Programming. Vol. 2 Semi-numerical Algorithms / D. E. Knuth – 3rd edition – London: Addison Wesley, 1998.
4. **Chernov, V. M.** Arithmetical methods of synthesis of fast algorithms of Discrete orthogonal Transforms / V.M. Chernov. – Moscow: “Fizmatlit” Publisher, 2007. – 264 p. – (in Russian).

DISCRETE ORTHOGONAL TRANSFORMS ON FUNDAMENTAL DOMAINS OF CANONICAL NUMBER SYSTEMS

V.M. Chernov, M.S. Kasparyan

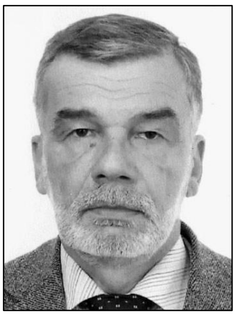
Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences,
S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (National Research University)

Abstract

Advertised methods for the synthesis of discrete orthogonal transformations on two-dimensional fields associated with the fundamental domains of number systems in quadratic rings.

Key words: orthogonal transforms, fractal, canonical number system.

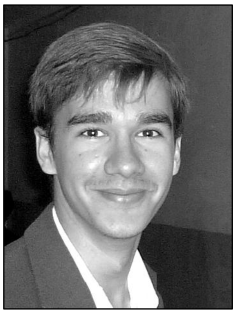
Сведения об авторах



Чернов Владимир Михайлович, 1949 года рождения, математик, доктор физико-математических наук. Главный научный сотрудник Института систем обработки изображений РАН. Профессор кафедры геоинформатики и информационной безопасности Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва. Область научных интересов: алгебраические методы в цифровой обработке сигналов, криптография, машинная арифметика.

E-mail: vche@smr.ru .

Vladimir Mikhailovich Chernov (b. 1949) mathematician, Doctor of Physical and Mathematical Sciences. Chief researcher of Image Processing Systems Institute of the RAS. Professor of department of *Geo-Information Science and Information Security of* S. P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU). Research interests are algebraic methods in digital signal processing, cryptography, computer arithmetic.



Михаил Суренович Каспарьян, 1988 года рождения. В 2011 году с отличием окончил Адыгейский государственный университет по специальности «Прикладная математика». В данный момент является аспирантом Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва. Стажёр-исследователь института систем обработки изображений РАН.

E-mail: *kasparyanm@gmail.com* .

Mikhail Surenovich Kasparyan (b. 1988) graduated with honours (2011) from the Adyghe State University, majoring in Applied Mathematics, postgraduate of S. P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU). Trainee researcher of Image Processing Systems Institute of the RAS. Research interests are image processing, programming, applied mathematics.

Поступила в редакцию 23 октября 2012 г.