

ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА, ОПТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

ВРАЩАЮЩИЕСЯ ЭЛЕГАНТНЫЕ ПУЧКИ БЕССЕЛЯ-ГАУССА

Котляр В.В., Ковалёв А.А., Скиданов Р.В., Сойфер В.А.

Институт систем обработки изображений РАН,

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва

(национальный исследовательский университет)

Аннотация

Рассмотрено новое трёхпараметрическое семейство вращающихся асимметричных пучков Бесселя-Гаусса (аБГ-пучки) с целым и дробным орбитальным угловым моментом (ОУМ). аБГ-пучки описываются произведением функции Гаусса и функции Бесселя первого рода n -го порядка с комплексным аргументом и имеют конечную энергию. Степень асимметрии аБГ-пучка зависит от вещественного параметра $c \geq 0$: при $c = 0$ аБГ-пучок совпадает с обычным радиально-симметричным пучком Бесселя-Гаусса; с ростом c аБГ-пучок приобретает форму полумесяца и при $c \gg 1$ вытягивается по вертикальной оси и смещается по горизонтальной оси. Распределение интенсивности асимметричных пучков Бесселя-Гаусса в начальной плоскости имеет счётное число изолированных нулей, расположенных на горизонтальной оси. На месте этих нулей находятся оптические вихри с единичными топологическими зарядами и противоположными знаками с разных сторон от начала координат. При распространении пучка центры этих вихрей вместе со всем пучком вращаются вокруг оптической оси с неравномерной скоростью (при большом $c \gg 1$): на расстоянии, равном длине Рэлея, они повернутся на 45 градусов, и на остальном расстоянии – ещё на 45 градусов. При разных значениях параметра c нули интенсивности в поперечном распределении интенсивности пучка меняют свои местоположения и изменяют ОУМ пучка. Изолированный ноль интенсивности на оптической оси порождает оптический вихрь с топологическим зарядом n . Лазерный пучок в виде вращающегося полумесяца был сформирован с помощью модулятора света.

Ключевые слова: лазерный пучок Бесселя-Гаусса, орбитальный угловой момент, вращение светового пучка, функция Бесселя с комплексным аргументом.

Введение

В 1987 году Гори [1] рассмотрел пучки Бесселя-Гаусса (БГ-пучки). Комплексная амплитуда таких пучков описывается произведением Гауссовой функции на функцию Бесселя первого рода n -го порядка и на фазовую функцию, описывающую угловую гармонику. Комплексная амплитуда БГ-пучка удовлетворяет параксиальному уравнению распространения. Эти пучки имеют радиально-симметричное распределение интенсивности и обладают орбитальным угловым моментом (ОУМ). Радиальная симметрия сохраняется при распространении пучка. Но БГ-пучки не являются модами свободного пространства, так как при распространении не только масштабно изменяются, но также перераспределяется световая энергия между различными кольцами в распределении интенсивности в поперечном сечении пучка. БГ-пучки обобщались в ряде работ [2–4]. Например, в [4] рассмотрены пучки Гельмгольца-Гаусса, частным случаем которых являются пучки Бесселя-Гаусса [1]. БГ-пучки имеют конечную энергию, но известны также моды Бесселя, не обладающие конечной энергией [5]. Моды Бесселя являются решением уравнения Гельмгольца [6] и при распространении в однородном пространстве сохраняют свою интенсивность, поэтому также называются бездифракционными пучками Бесселя [5]. Линейная комбинация мод Бесселя с произвольными коэффициентами также является решением уравнения Гельмгольца. В [7] предложен алгоритм

расчёта фазового оптического элемента, который формирует бездифракционные пучки Бесселя с заданным модовым составом. В [8] предложено рассматривать пучок Матье как альтернативу пучку Бесселя. В [9] показано, что линейная комбинация чётного и нечётного пучков Матье с комплексными коэффициентами обладает ОУМ. Но сами пучки Матье не обладают ОУМ. Интересно [10], что линейная комбинация двух мод Эрмита-Гаусса с комплексными коэффициентами, которые не обладают ОУМ, обладает ОУМ. Периодические функции Матье можно разложить в ряд Фурье [6]. Например, чётные функции Матье раскладываются по косинусам от полярного угла в цилиндрической системе координат, а нечётные – по синусам. Поэтому бездифракционный пучок Матье можно представить как линейную комбинацию мод Бесселя. Такие пучки рассматривались в [11].

Интересно найти линейные комбинации БГ-пучков, которые описывались бы простыми аналитическими функциями, с помощью которых можно аналитически рассчитать некоторые свойства таких пучков. В данной работе рассматривается линейная комбинация БГ-пучков, которая описывается функцией Бесселя с комплексным аргументом. По аналогии с элегантными пучками Эрмита-Гаусса и Лагерра-Гаусса, комплексная амплитуда которых пропорциональна соответственно полиномам Эрмита и Лагерра от комплексного аргумента, рассматриваемые пучки были названы элегантными пучками Бесселя-Гаусса. Пока-

зано, что такой асимметричный пучок Бесселя–Гаусса (аБГ-пучок) имеет в начальной плоскости счётное число изолированных нулей интенсивности, расположенных на горизонтальной оси. Все эти нули (кроме осевого) порождают оптические вихри с единичным топологическим зарядом и противоположными знаками с разных сторон от начала координат. Ноль интенсивности на оптической оси порождает оптический вихрь с топологическим зарядом n . При распространении в свободном пространстве аБГ-пучки вращаются вокруг оптической оси. Показано, что такие пучки имеют ОУМ, который растёт с номером n , а также увеличивается с ростом параметра c асимметрии пучка. Причём ОУМ аБГ-пучков может быть как целым, так и дробным.

1. Линейная комбинация БГ-пучков

Запишем комплексную амплитуду БГ-пучка [1] в начальной плоскости $z=0$:

$$E_n(r, \varphi, z=0) = \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2} + i n \varphi\right) J_n(\alpha r), \tag{1}$$

где $\alpha = k \sin \theta_0 = (2\pi/\lambda) \sin \theta_0$ – масштабирующий множитель, ω_0 – радиус перетяжки Гауссова пучка, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число света с длиной волны λ , θ_0 – угол конической волны, формирующей пучок Бесселя. В любой другой плоскости z комплексная амплитуда (1) будет иметь вид:

$$E_n(r, \varphi, z) = q^{-1}(z) \exp\left(ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)}\right) \times \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2 q(z)} + i n \varphi\right) J_n\left[\frac{\alpha r}{q(z)}\right], \tag{2}$$

где $q(z) = 1 + iz/z_0$, $z_0 = k\omega_0^2/2$ – длина Рэлея, $J_n(x)$ – функция Бесселя первого рода n -го порядка. Пучки (2) не являются параксиальными модами свободного пространства, так как аргумент функции Бесселя комплексный. Рассмотрим следующую суперпозицию БГ-пучков $q=q(z)$:

$$E_n(r, \varphi, z; c) = q^{-1} \exp\left(ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq} - \frac{r^2}{q\omega_0^2}\right) \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^p \exp(in\varphi + ip\varphi)}{p!} J_{n+p}\left(\frac{\alpha r}{q}\right). \tag{3}$$

Поле (3) формирует параксиальный асимметричный пучок Бесселя–Гаусса (аБГ-пучок) при любых целых n и любой комплексной постоянной c . Но для простоты в дальнейшем будем считать постоянную c вещественной положительной величиной: $c \geq 0$. Хотя если рассмотреть c как комплексную величину $c = |c| \arg c$ или учесть, что она может быть отрицательной $c < 0$, то распределение интенсивности поля (3) повернётся на угол $\arg c$ вокруг оптической оси. При $c=0$ в (3) отличным от нуля остаётся только одно слагаемое при $p=0$, и аБГ-пучок становится обычным БГ-пучком (1), (2).

Здесь рассматривается линейная комбинация БГ-пучков в виде (3) потому, что этот ряд равен функции Бесселя с комплексным аргументом. Действительно, в [12] есть справочный ряд (выражение 5.7.6.1):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} J_{k+v}(x) = x^{v/2} (x-2t)^{-v/2} J_v\left(\sqrt{x^2-2tx}\right). \tag{4}$$

С помощью (4) преобразуем (3) и получим:

$$E_n(r, \varphi, z; c) = \frac{1}{q} \exp\left(ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq} - \frac{r^2}{q\omega_0^2} + i n \varphi\right) \times \left[\frac{\alpha r}{\alpha r - 2cq \exp(i\varphi)}\right]^{n/2} \times J_n\left\{q^{-1} \sqrt{\alpha r [\alpha r - 2cq \exp(i\varphi)]}\right\}. \tag{5}$$

Выражение (5) является замкнутой формой для комплексной амплитуды трёхпараметрического семейства параксиальных скалярных аБГ-пучков. Два непрерывных вещественных параметра аБГ-пучков управляют масштабом (α) и степенью асимметрии (c). Радиус Гауссова пучка ω_0 считается одинаковым для всего семейства аБГ-пучков. Целый параметр n вместе с непрерывным c определяют величину ОУМ. Когда знаменатель в (5) равен нулю, тогда и аргумент функции Бесселя равен нулю. Неопределённость ноль на ноль раскрывается.

Пучок (5) имеет счётное число изолированных нулей интенсивности, которые порождают оптические вихри с единичным топологическим зарядом, кроме осевого нуля, который порождает оптический вихрь с n -м топологическим зарядом. Для получения полярных координат нулей аБГ-пучка приравняем аргумент функции Бесселя в (5) корню функции Бесселя $\gamma_{np} (J_n(\gamma_{np})=0)$:

$$\alpha^2 r^2 - 2\alpha c q r \exp(i\varphi) = \gamma_{np}^2 q^2. \tag{6}$$

Выделим вещественную и мнимую части этого уравнения:

$$\begin{cases} \alpha^2 r^2 - 2\alpha c |q| r \cos(\varphi + \Psi) = \gamma_{np}^2 |q|^2 \cos(2\Psi), \\ -2\alpha c |q| r \sin(\varphi + \Psi) = \gamma_{np}^2 |q|^2 \sin(2\Psi), \end{cases} \tag{7}$$

где $\Psi = \arctg(z/z_0)$ – фаза Гоу. Из (7) находятся координаты точек с нулевой интенсивностью:

$$\begin{cases} \Phi_{np} = \frac{1}{2} \arccos\left[\cos(2\Psi) - \frac{\gamma_{np}^2}{2c^2} \sin^2(2\Psi)\right], \\ r_{np} = \frac{|q|}{\alpha} \sqrt{\gamma_{np}^2 \cos(2\Psi) + 2c^2 \pm 2\sqrt{D}}, \end{cases} \tag{8}$$

где $D = (c^2 - \gamma_{np}^2 \sin^2 \Psi)(c^2 + \gamma_{np}^2 \cos^2 \Psi)$. Из обоих уравнений (8) следует: чтобы координаты нулей были вещественными, необходимо выполнение условия:

$$\gamma_{np} \sin \Psi \leq c. \tag{9}$$

Из (9) следует, что если $c > \gamma_{np}$, то все нули интенсивности с номерами от $q=0$ до $q=p$ при распространении не исчезают (так как для этих нулей $\gamma_{nq} < c$ и неравенство (9) выполняется для любых расстояний z), однако остальные нули с номерами $q=p+1, p+2, \dots$ (для которых $c \leq \gamma_{nq}$) пропадают на некотором расстоянии $z = cz_0 / (\gamma_{nq}^2 - c^2)^{1/2}$.

При $z=0$ вместо (8) запишем:

$$\begin{cases} r_{p+} = \alpha^{-1} \left(c + \sqrt{c^2 + \gamma_{np}^2} \right), & \varphi_{np} = 2p\pi, \\ r_{p-} = \alpha^{-1} \left(\sqrt{c^2 + \gamma_{np}^2} - c \right), & \varphi_{np} = (2p+1)\pi. \end{cases} \quad (10)$$

Из (10) следует, что интенсивность в сечении аБГ-пучка несимметрична относительно начала координат, так как $r_{p+} > r_{p-}$. Причём, когда $c > 0$ растёт, асимметрия аБГ-пучка увеличивается, а при $c=0$ изолированные нули аБГ-пучка пропадают, а появляются кольца нулевой интенсивности радиально-симметричного пучка Бесселя-Гаусса. Все нули аБГ-пучка (кроме осевого при $r=0$) порождают оптические вихри с единичным топологическим зарядом и противоположными знаками с разных сторон от начала координат. Для нулей интенсивности с радиальными координатами r_{p+} топологический заряд оптических вихрей $+1$, для r_{p-} – топологический заряд -1 . Чтобы сменить знаки этих оптических вихрей на противоположные, надо вместо (5) взять комплексно сопряжённое выражение. Из (8) видно, что нули интенсивности в поперечной плоскости аБГ-пучка вращаются при распространении. Но вращение это достаточно сложное. Только когда $c \gg 1$, в первом уравнении в (8) можно пренебречь вторым слагаемым в квадратных скобках, и тогда картина интенсивности в поперечном сечении пучка вращается как единое целое. При этом полярный угол меняется с расстоянием z :

$$\varphi = \arctg \left(\frac{z}{z_0} \right). \quad (11)$$

Из (11) следует, что аБГ-пучок от начальной плоскости $z=0$ до расстояния Рэлея $z=z_0$ повернётся против часовой стрелки на $\pi/4$, а на остальном участке пути от $z=z_0$ до $z=\infty$ – ещё на $\pi/4$, и, таким образом, на всём протяжении пути пучок повернётся на $\pi/2$. Вращение аБГ-пучка не зависит от номера n , то есть вращаться будет и нулевой пучок при $n=0$.

На рис. 1 показаны распределение интенсивности и фазы аБГ-пучка (5) при разных значениях параметра асимметрии c . При моделировании были использованы следующие значения параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки Гауссова пучка $\omega_0 = 10\lambda$, масштабирующий множитель $\alpha = 1/(10\lambda)$, границы расчётной области $-40\lambda \leq x, y \leq 40\lambda$. На рис. 1 видно, что с ростом $c > 0$ интенсивность из кольцевой становится похожей на полумесяц, выпуклый в правую сторону. Можно записать выражение для аБГ-пучка, имеющего вид полумесяца, выпуклого в левую сторону. аБГ-пучок, имеющий распределение интенсивности,

зеркально-симметричное относительно оси $x=0$ по сравнению с пучком (5), имеет амплитуду вида:

$$\begin{aligned} E_n(r, \varphi, z=0; c) &= \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2}\right) \times \\ &\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-c)^p \exp[i(n+p)\varphi]}{p!} J_{n+p}(\alpha r) = \\ &= \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2}\right) \left[\frac{\alpha r}{\alpha r + 2c \exp(i\varphi)} \right]^{n/2} \times \\ &\times J_n \left\{ \sqrt{\alpha r [\alpha r + 2c \exp(i\varphi)]} \right\} \exp(in\varphi). \end{aligned} \quad (12)$$

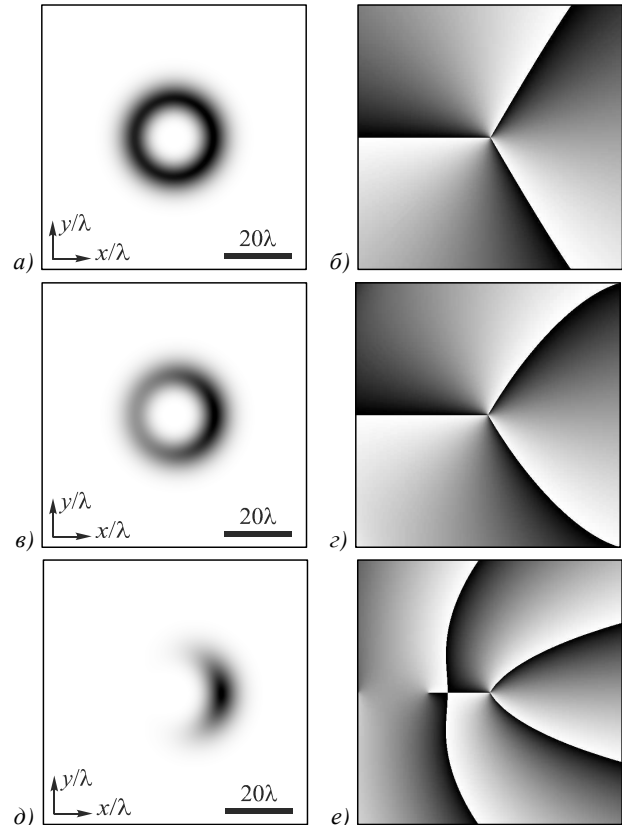


Рис. 1. Распределение интенсивности (негатив) (а, в, д) и фазы (б, з, е) светового пучка (5) третьего порядка ($n=3$) в начальной плоскости при $z=0$ для разных значений параметра асимметрии $c: 0,1$ (а, б); 1 (в, з); 10 (д, е)

Также на рис. 1 видно, что нули интенсивности, лежащие на оси $x < 0$, с ростом c приближаются к центру координат: на рис. 1б, з их ещё не видно, а на рис. 1е появился один ноль. Такое поведение нулей следует из второго уравнения (10) при больших $c \gg 1$. В центре рис. 1б, з, е расположен нуль интенсивности третьего порядка ($n=3$).

На рис. 2 показаны распределения интенсивности и фазы аБГ-пучка третьего порядка ($n=3$) при относительно большом значении параметра $c=10$ на разных расстояниях вдоль оптической оси в плоскостях $z=0$ (а, б), $z=z_0$ (в, з), $z=10z_0$ (д, е). На рис. 2 видно, что пучок вращается вокруг оптической оси. На расстоянии Рэлея z_0 картина интенсивности повернулась против часовой стрелки на 45 градусов (рис. 2в), а на

расстоянии $10z_0$ картина интенсивности повернулась почти на 90 градусов (рис. 2д).

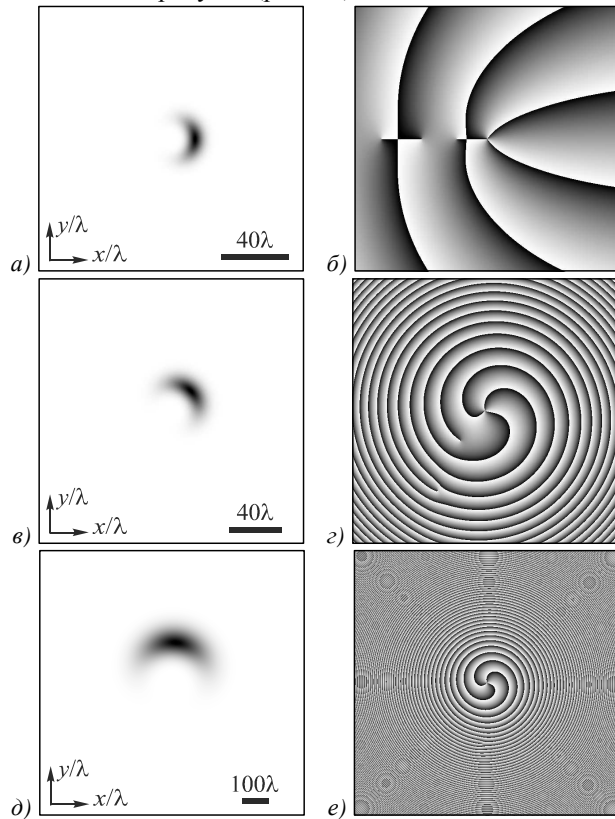


Рис. 2. Распределение интенсивности (негатив) (а, в, д) и фазы (б, г, е) светового пучка (5) третьего порядка ($n = 3$) на разных расстояниях: $z = 0$ (а, б), $z = z_0$ (в, г), $z = 10z_0$ (д, е)

Размер картинок на рис. 2 разный: $-80\lambda \leq x, y \leq 80\lambda$ (а, б); $-100\lambda \leq x, y \leq 100\lambda$ (в, г) и $-500\lambda \leq x, y \leq 500\lambda$ (д, е). Остальные параметры те же, что и для рис. 1. На рис. 2 также видно, что нули интенсивности, лежащие на оси x при $z = 0$, тоже начинают вращаться против часовой стрелки с увеличением z . На рис. 2б видны три изолированных нуля интенсивности на оси x слева от центрального нуля 3-го порядка. На рис. 2г видно, что при $z = z_0$ осталось только два нуля, которые повернулись на 45 градусов, а на рис. 2е ($z = 10z_0$) эти два нуля объединились в один ноль 2-го порядка и повернулись почти на 90 градусов.

Из неравенства (9) следует, что, так как $\gamma_{n1} > 1$ для всех целых n , при $c \leq 1$ все изолированные нули интенсивности, лежащие на оси x (кроме центрального нуля), будут «пропадать» по мере распространения пучка, начиная с самых дальних нулей ($\gamma_p \gg 1$). Последним «пропадёт» первый ноль интенсивности γ_1 при z , равном:

$$z = z_0 \operatorname{tg} \left[\arcsin \left(\frac{c}{\gamma_1} \right) \right]. \quad (13)$$

Нули интенсивности «пропадают» в том смысле, что значения их координат, согласно (8) и при условии (9), становятся комплексными, а не действительными.

На рис. 3 показаны распределения интенсивности и фазы аБГ-пучка при небольшом параметре асимметрии $c = 1$. Остальные параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки Гауссова пучка $\omega_0 = 100\lambda$,

масштабирующий множитель $\alpha = 1/(10\lambda)$, границы расчётной области $-300\lambda \leq x, y \leq 300\lambda$ (рис. 3а, б) и $-1000\lambda \leq x, y \leq 1000\lambda$ (рис. 3в, г). При этих параметрах вращение аБГ-пучка уже не описывается простой формулой (11), так как параметр асимметрии c небольшой. На рис. 3 видно, что картина интенсивности поворачивается на расстоянии $z = z_0$ почти на 90 градусов против часовой стрелки. А изолированные нули интенсивности, которые лежат на оси x и видны на рис. 3б, при распространении пучка «пропадают»: на рис. 3г при $z = z_0$ не видно нулей интенсивности, кроме центрального.

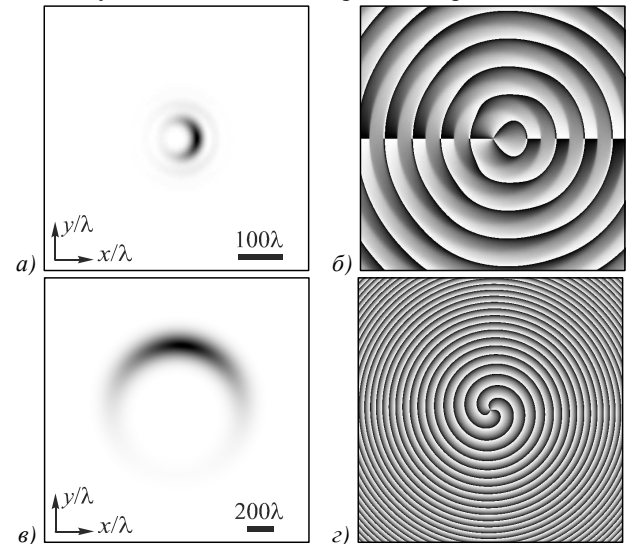


Рис. 3. Распределение интенсивности (негатив) (а, в) и фазы (б, г) аБГ-пучка третьего порядка ($n = 3$) при $c = 1$ на разных расстояниях z : 0 (а, б) и z_0 (в, г)

На рис. 4 показаны интенсивность и фаза аБГ-пучка нулевого порядка при следующих параметрах: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки Гауссова пучка $\omega_0 = 10\lambda$, масштабирующий множитель $\alpha = 1/(10\lambda)$, параметр асимметрии $c = 10$, границы расчётной области $-40\lambda \leq x, y \leq 40\lambda$.

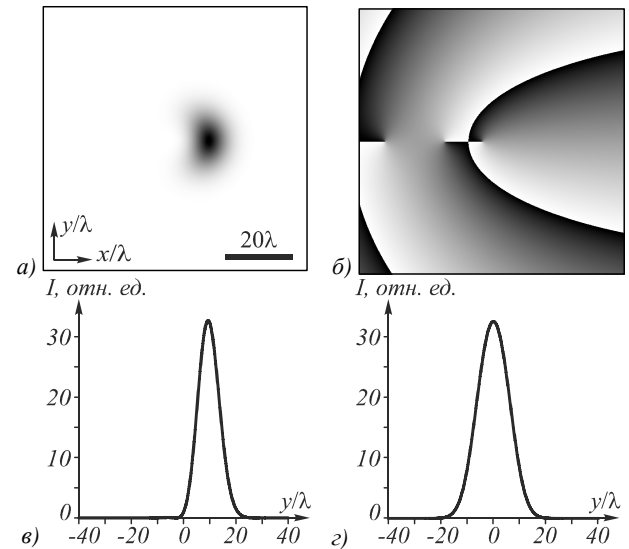


Рис. 4. Интенсивность (негатив) (а) и фаза (б) светового пучка (5) нулевого порядка ($n = 0$) в начальной плоскости, а также сечения интенсивности при $z = y = 0$ (в) и $z = 0$, $x = x_{\max}$ (x_{\max} – координата максимума) (г)

В случае нулевого порядка аБГ-пучок (рис. 4) обладает интересным свойством: имеет максимум интенсивности вблизи оптической оси и ОУМ, отличный от нуля. Это свойство можно использовать при манипулировании диэлектрическими микрочастицами. Частица, которая по размерам в несколько раз больше основного максимума интенсивности пучка на рис. 4, может удерживаться этим максимумом интенсивности и одновременно вращаться вокруг своей оси.

2. Фурье-спектр аБГ-пучка

Угловой спектр обычного БГ-пучка известен [4]:

$$A_n(\rho, \phi) = (-i)^n \exp\left[-\left(\frac{k\rho\omega_0}{2f}\right)^2\right] \times \times I_n\left(\frac{k\alpha\rho\omega_0^2}{2f}\right) \exp(in\phi), \tag{14}$$

где $I_n(x)$ – модифицированная функция Бесселя n -го порядка, ρ – радиальная координата в Фурье-плоскости, f – фокусное расстояние сферической линзы, формирующей пространственный спектр БГ-пучка. Рассмотрим линейную комбинацию, аналогичную (3), но состоящую из функций (14), получим угловой спектр аБГ-пучка:

$$A_n(\rho, \phi) = \exp\left[-\left(\frac{k\rho\omega_0}{2f}\right)^2\right] \times \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-ic)^p \exp[i(n+p)\phi]}{p!} I_p\left(\frac{k\alpha\rho\omega_0^2}{2f}\right). \tag{15}$$

Используя справочное соотношение [12]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} I_{k+v}(x) = = x^{v/2} (x+2t)^{-v/2} I_v(\sqrt{x^2+2tx}), \tag{16}$$

получим окончательное выражение для Фурье-спектра аБГ-пучка:

$$A_n(\rho, \phi) = \exp\left[-\left(\frac{k\rho\omega_0}{2f}\right)^2 + in\phi\right] \times \times \left(\frac{\xi}{\xi + 2ce^{i(\phi-\pi/2)}}\right)^{n/2} \times I_p\left\{\sqrt{\xi[\xi + 2ce^{i(\phi-\pi/2)}]}\right\}, \tag{17}$$

где $\xi = \alpha k \rho \omega_0^2 / (2f)$. Угловой спектр (17) асимметричный: при $\phi = \pi/2$ и на кольце фиксированного радиуса $\rho = \rho_0$ модуль амплитуды (17) имеет максимум, а при $\phi = -\pi/2$ – минимум. Вид углового спектра (17) похож на вид амплитуды аБГ-пучка (5) (с точностью до замены функции Бесселя модифицированной функцией Бесселя), но повернут на 90 градусов. Поэтому асимметрия спектра (17) будет похожа на асимметрию аБГ-пучка (5).

3. Орбитальный угловой момент аБГ-пучка

Орбитальный угловой момент J_z (проекция ОУМ на оптическую ось) и суммарная интенсивность I светового пучка в плоскости, поперечной оптической оси, определяются по формулам [6]:

$$J_z = \text{Im} \left\{ \iint_{\Omega} E^* \frac{\partial E}{\partial \phi} r dr d\phi \right\}, \tag{18}$$

$$I = \iint_{\Omega} E^* E r dr d\phi. \tag{19}$$

Подставив в (18), (19) комплексную амплитуду (3) при $z=0$, получим орбитальный угловой момент и суммарную интенсивность аБГ-пучка:

$$J_z = 2\pi \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^{2p} (n+p)}{(p!)^2} \times \times \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) J_{n+p}^2(\alpha r) r dr, \tag{20}$$

$$I = 2\pi \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^{2p}}{(p!)^2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) J_{n+p}^2(\alpha r) r dr. \tag{21}$$

Интегралы в этих выражениях описаны в [12]:

$$\int_0^{\infty} x \exp(-px^2) J_\nu(bx) J_\nu(cx) dx = = (2p)^{-1} \exp\left(-\frac{b^2+c^2}{4p}\right) I_\nu\left(\frac{bc}{2p}\right). \tag{22}$$

Используя интеграл (22) и разделив (20) на (21), получим выражение для орбитального углового момента, нормированного на интенсивность:

$$\frac{J_z}{I} = n + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^{2p} p I_{n+p}(y)}{(p!)^2} \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^{2p} I_{n+p}(y)}{(p!)^2} \right]^{-1}, \tag{23}$$

где $y = \alpha^2 \omega_0^2 / 4$. Выражение (23) дальше упростить не удаётся. Из (23) следует, что ОУМ аБГ-пучков больше n , так как все слагаемые рядов в (23) положительные. То есть с ростом параметра c растёт асимметрия аБГ-пучка и почти линейно растёт его ОУМ, как видно из рис. 5. Так как параметры α и c являются действительными положительными числами, то второе слагаемое в (23) может быть как целым, так и дробным положительным числом. Поэтому из (23) также следует, что аБГ-пучок нулевого порядка ($n=0$) может иметь любой ОУМ. Заметим также, что в (23) масштабные параметры пучка Бесселя α и Гауссова пучка ω_0 входят в виде произведения, поэтому у разных аБГ-пучков, у которых $\alpha\omega_0 = \text{const}$, ОУМ будет одинаковым (при равных n и c).

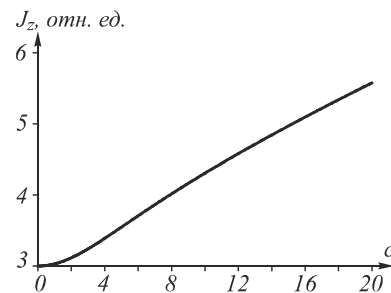


Рис. 5. Зависимость ОУМ от параметра асимметрии c при $n=3$, $\omega_0=10\lambda$, $\alpha=1/(10\lambda)$

4. Взаимная неортогональность функций, описывающих семейство аБГ-пучков

Подобно тому, как был вычислен орбитальный угловой момент, можно вычислить скалярное произведение комплексных амплитуд двух ЭБ-пучков – пучка n -го порядка с параметрами α и c и пучка m -го порядка с параметрами β и d :

$$\begin{aligned} (E_{n\alpha c}, E_{m\beta d}) &= \frac{\pi\omega_0^2}{2} \left(\frac{d^*}{c}\right)^{\frac{n-m}{2}} \times \\ &\times \exp\left[-\frac{\omega_0^2}{8}(\alpha^2 + \beta^2)\right] \times \\ &\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(cd^*)^{p+\frac{|n-m|}{2}}}{p!(p+|n-m|)!} I_{p+\max(m,n)}\left(\frac{\omega_0^2\alpha\beta}{4}\right), \end{aligned} \tag{24}$$

где $I_\nu(x)$ – модифицированная функция Бесселя. Из выражения (24) видно, что в отличие от мод Бесселя [5] аБГ-пучки не ортогональны ни по масштабирующему множителю, ни по порядку функции Бесселя, ни по параметру асимметрии. В (24) параметры асимметрии c и d считались комплексными, а «*» – комплексное сопряжение.

Заметим, что аБГ-пучки при стремлении радиуса Гауссова пучка к бесконечности $\omega_0 \rightarrow \infty$ переходят в бездифракционные асимметричные элегантные моды Бесселя [13, 14].

5. Эксперимент

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 6. В эксперименте был использован фазовый пространственный модулятор PLUTO VIS. Свет твердотельного лазера с длиной волны 532 нм расширяется коллиматором, ограничивается диафрагмой диаметром 8 мм. В результате получается равномерное распределение интенсивности, которое можно считать плоской волной. Далее свет проходит через светоделительный кубик и попадает на пространственный модулятор света, отражается от него и отклоняется светоделительным кубиком на ПЗС-камеру. На полутоновой модулятор с компьютера передаётся фаза для формирования аБГ-пучка в комбинации с фазой параболической линзы с фокусным расстоянием 960 мм.

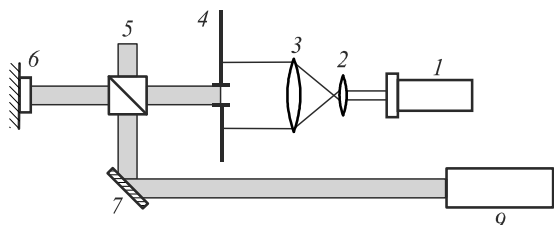


Рис. 6. Схема экспериментальной установки.

- 1 – твердотельный лазер с длиной волны 532 нм,
- 2, 3 – коллиматор, 4 – диафрагма, 5 – светоделительный кубик, 6 – модулятор PLUTO VIS, 7 – зеркало, 9 – ПЗС-камера

ПЗС-камера перемещается на небольшом отрезке в непосредственной близости от фокуса. На рис. 7 показаны фазовое распределение (а), сформированное на

модуляторе (без добавленной фазы линзы), и распределения интенсивности, зарегистрированные ПЗС-матрицей на расстоянии 850 мм (б), 900 мм (в) и 950 мм (г) от модулятора. Размерность модулятора составляет 1920×1080 пикселей, размер одного чувствительного элемента – 8 мкм. Фаза, представленная на рис. 7, имела размерность 1024×1024 пикселей и формировалась в центре модулятора. Таким образом, точный размер сформированного фазового распределения составлял 8,2 мм.

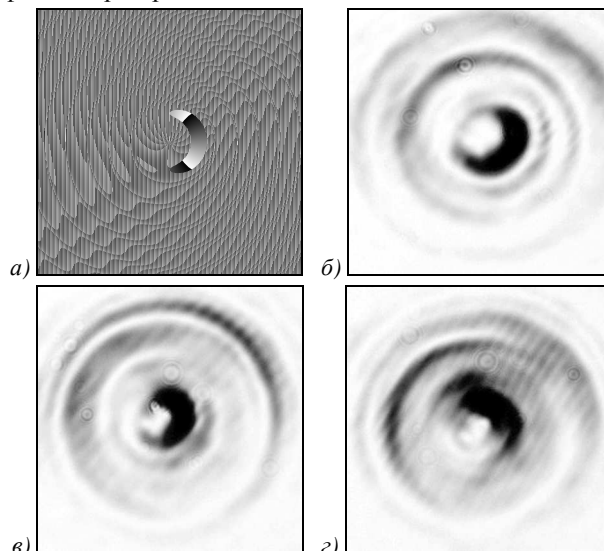


Рис. 7. Распределение фазы, сформированной на модуляторе PLUTO VIS (а), и распределения интенсивности (негативы), зарегистрированные на расстояниях от модулятора: 850 мм (б), 900 мм (в) и 950 мм (г)

На рис. 7 видно, что сформированное модулятором распределение интенсивности в форме полумесяца не только вращается в сходящемся лазерном пучке (за 100 мм пути пучок повернулся почти на 90 градусов против часовой стрелки), но и искажается. Это искажением связано с тем, что фазовое распределение (рис. 7а) только частично учитывает амплитудное распределение аБГ-пучка (5).

Заключение

Таким образом, в работе получены следующие результаты:

- получено новое решение парааксиального уравнения Гельмгольца, описывающее трёхпараметрическое семейство асимметричных пучков Бесселя–Гаусса (аБГ-пучков), обладающих конечной энергией и описываемых функциями Бесселя первого рода целого порядка с комплексным аргументом; при $c=0$ аБГ-пучки совпадают с обычными пучками Бесселя–Гаусса [1];
- распределение интенсивности аБГ-пучков имеет счётное число изолированных нулей, лежащих на горизонтальной прямой в начальной плоскости ($z=y=0$); в местах этих нулей расположены оптические вихри, имеющие единичные топологические заряды и разные знаки с разных сторон от оптической оси (от центра координат); осевой ноль интенсивности имеет топологический заряд, равный порядку функции Бесселя;

– аБГ-пучки при больших параметрах асимметрии $c \gg 1$ вращаются как единое целое при распространении в свободном пространстве: на расстоянии длины Рэлея они поворачиваются на 45° и ещё на 45° – за весь остальной путь; при небольших c пучки вращаются более сложным образом: на определённом расстоянии от начальной плоскости оптические вихри (изолированные нули интенсивности), которые присутствовали в сечении пучка, пропадают (кроме центрального нуля интенсивности) и на расстоянии длины Рэлея пучок может повернуться почти на 90° ;

– аБГ-пучки имеют асимметричный угловой спектр, выражающийся через произведение Гауссовой функции на модифицированную функцию Бесселя с комплексным аргументом; вид этого спектра имеет асимметрию, аналогичную асимметрии аБГ-пучка, но повернутую на 90° ;

– аБГ-пучки могут иметь целый и дробный ОУМ, который растёт с ростом номера n и почти линейно с ростом параметра c ; пучок нулевого порядка имеет максимум интенсивности, смещённый с оптической оси на величину c/α , изолированные нули интенсивности и может обладать любым ОУМ в зависимости от выбора параметра асимметрии c ;

– аБГ-пучки не ортогональны ни по одному из параметров n , α , c ;

– экспериментально с помощью жидкокристаллического модулятора света сформирован сходящийся лазерный пучок, похожий на аБГ-пучок с распределением интенсивности в виде полумесяца, который повернулся почти на 90° против часовой стрелки.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-3970.2014.9) и молодого доктора наук (МД-1929.2013.2), а также грантов РФФИ 13-07-97008 и 14-07-31092.

Литература

- Gori, F. Bessel-Gauss beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // Optics Communications. – 1987. – V. 64. – P. 491-495.
- Li, Y. New generalized Bessel-Gauss beams / Y. Li, H. Lee, E. Wolf // Journal of the Optical Society of America A. – 2004. – V. 21. – P. 640-646.
- Kisilev, A.P. New structures in paraxial Gaussian beams // Optics and Spectroscopy. – 2004. – V. 96. – P. 479-481.
- Gutierrez-Vega, J.C. Helmholtz-Gauss waves / J.C. Gutierrez-Vega, M.A. Bandres // Journal of the Optical Society of America A. – 2005. – V. 22. – P. 289-298.
- Durnin, J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory // Journal of the Optical Society of America A. – 1987. – V. 4, Issue 4. – P. 651-654.
- Miller Jr., W. Symmetry and separation of variables. – Addison-Wesley Pub. Comp., 1977.
- Kotlyar, V.V. Algorithm for the generation of non-diffracting Bessel beams / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // Journal of Modern Optics. – 1992. – V. 42, Issue 6. – P. 1231-1239.
- Gutierrez-Vega, J.C. Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams / J.C. Gutierrez-Vega, M.D. Iturbe-Castillo, S. Chavez-Cedra // Optics Letters. – 2000. – V. 25, Issue 20. – P. 1493-1495.
- Chavez-Cedra, S. Elliptic vortices of electromagnetic wave fields / S. Chavez-Cedra, J.C. Gutierrez-Vega, G.H.C. New // Optics Letters. – 2001. – V. 26, Issue 22. – P. 1803-1805.
- Kotlyar, V.V. Hermite-Gaussian modal laser beams with orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // Journal of the Optical Society of America A. – 2014. – V. 31, Issue 2. – P. 274-282.
- Dennis, M.R. Propagation-invariant beams with quantum pendulum spectra: from Bessel beams to Gaussian beam-beams / M.R. Dennis, J.D. Ring // Optics Letters. – 2013. – V. 38, Issue 17. – P. 3325-3328.
- Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983.
- Котляр, В.В. Бездифракционные асимметричные элегантные пучки Бесселя с дробным орбитальным угловым моментом / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, В.А. Соифер // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 1. – С. 4-10.
- Kotlyar, V.V. Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // Optics Letters. – 2014. – V. 39, Issue 8. – P. 2395-2398.

References

- Gori, F. Bessel-Gauss beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // Optics Communications. – 1987. – V. 64. – P. 491-495.
- Li, Y. New generalized Bessel-Gauss beams / Y. Li, H. Lee, E. Wolf // Journal of the Optical Society of America A. – 2004. – V. 21. – P. 640-646.
- Kisilev, A.P. New structures in paraxial Gaussian beams // Optics and Spectroscopy. – 2004. – V. 96. – P. 479-481.
- Gutierrez-Vega, J.C. Helmholtz-Gauss waves / J.C. Gutierrez-Vega, M.A. Bandres // Journal of the Optical Society of America A. – 2005. – V. 22. – P. 289-298.
- Durnin, J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory // Journal of the Optical Society of America A. – 1987. – V. 4, Issue 4. – P. 651-654.
- Miller Jr., W. Symmetry and separation of variables. – Addison-Wesley Pub. Comp., 1977.
- Kotlyar, V.V. Algorithm for the generation of non-diffracting Bessel beams / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // Journal of Modern Optics. – 1992. – V. 42, Issue 6. – P. 1231-1239.
- Gutierrez-Vega, J.C. Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams / J.C. Gutierrez-Vega, M.D. Iturbe-Castillo, S. Chavez-Cedra // Optics Letters. – 2000. – V. 25, Issue 20. – P. 1493-1495.
- Chavez-Cedra, S. Elliptic vortices of electromagnetic wave fields / S. Chavez-Cedra, J.C. Gutierrez-Vega, G.H.C. New // Optics Letters. – 2001. – V. 26, Issue 22. – P. 1803-1805.
- Kotlyar, V.V. Hermite-Gaussian modal laser beams with orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // Journal of the Optical Society of America A. – 2014. – V. 31, Issue 2. – P. 274-282.
- Dennis, M.R. Propagation-invariant beams with quantum pendulum spectra: from Bessel beams to Gaussian beam-beams / M.R. Dennis, J.D. Ring // Optics Letters. – 2013. – V. 38, Issue 17. – P. 3325-3328.
- Prudnikov, A.P. Integrals and series. Special functions / A.P. Prudnikov, J.A. Brychkov, O.I. Marichev. – Moscow: "Nauka" Publisher, 1983. – (In Russian).
- Kotlyar, V.V. Diffraction-free asymmetric elegant Bessel beams with fractional orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // Computer Optics. – 2014. – V. 38(1). – P. 4-10.
- Kotlyar, V.V. Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // Optics Letters. – 2014. – V. 39, Issue 8. – P. 2395-2398.

ROTATING ELEGANT BESSEL-GAUSSIAN BEAMS

V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, R.V. Skidanov, V.A. Soifer
Image Processing Systems Institute, Russian Academy of Sciences,
Samara State Aerospace University

Abstract

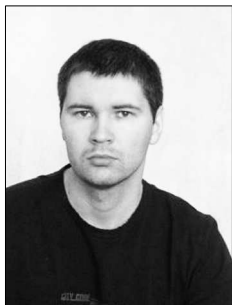
We considered a new three-parameter family of rotating asymmetric Bessel-Gaussian beams (aBG-beams) with integer and fractional orbital angular momentum (OAM). Complex amplitude of aBG-beams is proportional to a Gaussian function and to n -th order Bessel function with complex argument. These beams have finite energy. The asymmetry ratio of the aBG-beam depends on the real parameter $c \geq 0$. For $c = 0$, the aBG-beam coincides with the conventional radially symmetric Bessel-Gaussian beam, with increasing c intensity distribution of the aBG-beam takes the form of Crescent. At $c \gg 1$, the beam is widening along the vertical axis while shifting along the horizontal axis. In initial plane, the intensity distribution of asymmetric Bessel-Gaussian beams has a countable number of isolated zeros located on the horizontal axis. Locations of these zeros correspond to optical vortices with unit topological charges and opposite signs on different sides of the origin. During the beam propagation, centers of these vortices rotate around the optical axis along with the entire beam at a non-uniform rate (for large $c \gg 1$): they will rotate by 45 degrees at a distance of the Rayleigh range, and then by another 45 degrees during the rest distance. For different values of the parameter c zeros in the transverse intensity distribution of the beam change their location and change the OAM of the beam. Isolated intensity zero on the optical axis corresponds to an optical vortex with topological charge of n . Laser beam with the shape of rotating Crescent has been generated by using a spatial light modulator.

Key words: Bessel-Gaussian laser beam, orbital angular momentum, rotation of light beam, complex argument Bessel function.

Сведения об авторах

Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ). В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств.

Victor Victorovich Kotlyar is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute (Samara) of the Russian Academy of Sciences and professor of Computer Science department at Samara State Aerospace University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices.



Ковалёв Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений Института систем обработки изображений РАН. В списке научных работ более 80 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, сингулярная оптика, фотонно-кристаллические устройства.

E-mail: alanko@smr.ru.

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree (2012). He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences (IPSI RAS), holding a part-time position of assistant at SSAU's Technical Cybernetics sub-department. He is co-author of more than 80 scientific papers. Research interests are mathematical diffraction theory, singular optics, and photonic crystal devices.



Скиданов Роман Васильевич, 1973 года рождения. В 1990 году с отличием окончил Самарский государственный университет (СамГУ) по специальности «Физика». Доктор физико-математических наук (2007 год), работает заведующим лабораторией микро- и нанотехнологий Института систем обработки изображений РАН (ИСОИ РАН), профессором кафедры технической кибернетики СГАУ. Скиданов Р.В. – специалист в области дифракционной оптики, математического моделирования, обработки изображений и нанопоники. В списке научных работ Р.В. Скиданова 90 статей, 5 монографий.

E-mail: romans@smr.ru.

Roman Vasilevich Skidanov (b. 1973). Graduated with honours (1990) from Samara State University (SSU), majoring in Physics. He received his Doctor in Physics & Maths (2007) degrees from Samara State Aerospace University. He is the head of Micro- and Nanotechnologies

laboratory at the Samara Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences (IPSI RAS), holding a part-time position of professor at SSAU's Technical Cybernetics sub-department. He is co-author of 90 scientific papers, 5 monographs. His current research interests include diffractive optics, mathematical modeling, image processing, and nanophotonics.



Сойфер Виктор Александрович – член-корреспондент РАН, доктор технических наук, директор Института систем обработки изображений РАН. Лауреат государственной премии и премии правительства РФ в области науки и техники. Диплом инженера получил в Куйбышевском авиационном институте (ныне Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва) в 1968 году. Докторскую диссертацию защитил в 1979 году в Санкт-Петербургском государственном электротехническом университете «ЛЭТИ». Автор и соавтор значительного числа научных публикаций с высоким индексом цитируемости, 10 книг и 50 авторских свидетельств и патентов.

E-mail: soifer@ssau.ru.

Victor Alexandrovich Soifer is a corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Engineering, Professor, and director of the Image Processing Systems

Institute (IPSI) of the RAS. He is the recipient of the State Prize of the Russian Federation and the RF government prize in Science and Technology. He was awarded an Engineer qualification (1968) by Kuibyshev Aviation Institute (KuAI, presently, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov, SSAU). He received a Doctor in Engineering degree (1979) from Saint Petersburg State Electrotechnical University "LETI" (ETU). He is a SPIE- and IAPR-member. He is the author and coauthor of a substantial number of scientific publications with high citation index, 10 books, and 50 author's certificates and patents.

Поступила в редакцию 26 марта 2014 г.