РЕШЕНИЕ В КВАДРАТУРАХ РАСШИРЕННОГО УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ В ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКНАХ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Алименков И.В., Пчёлкина Ю.Ж.
Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Аннотация

Найдено в квадратурах решение расширенного уравнения распространения оптических импульсов в волоконных световодах для произвольной функции отклика нелинейной среды на внешнее гармоническое возмущение.

Ключевые слова: волоконный световод, расширенное уравнение распространения, решение в квадратурах, произвольная нелинейность, солитонное решение.

Введение

Для огибающей оптического импульса, распространяющегося в одномодовом волоконном световоде, поддерживающем состояние линейной поляризации, выведено [1] уравнение

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial A}{\partial t}\right)+\frac{1}{2\beta_o}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}-\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}+ +\Delta\beta(|A|^2)A=0, \tag{1}$$

названное расширенным уравнением распространения. Здесь $A(z,t)$ – комплексная огибающая импульса, ω_o – несущая частота, $\beta_o=\omega_o n(\omega_o)/c$ – волновое число, $\beta_1=1/v_g$ – величина, обратная групповой скорости, β_2 – дисперсия групповой скорости, $\Delta\beta(|A|^2)$ – нелинейная поправка к постоянной распространения моды в линейном приближении.

В области прозрачности волновода $\Delta\beta$ является вещественной функцией.

Это уравнение существенно отличается от общепринятого [2]–[4] уравнения распространения

$$\frac{\partial A}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial A}{\partial t}+i\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=i(\Delta\beta)A$$

наличием второй производной по координате. Если в (1) отбросить вторую производную по координате, то получим последнее уравнение.

При известном [2]–[4] выводе этого уравнения отбрасывание второй производной по координате происходит ещё на начальном этапе решения волнового уравнения в спектральном представлении. Это сделано в предположении, что фурье-образ огибающей является медленно меняющейся функцией.

Не считая данную аргументацию убедительной, авторы провели полный вывод [1] уравнения (1) и исследовали его решение в случае керровской нелинейности для кварцевого волокна. Результат получился прямо противоположный – скорее следует отбросить вторую производную по времени.

Грубую сравнительную оценку вклада вторых производных для кварца можно провести в самом уравнении (1), не обращаясь к решению.

Действительно, в области минимальных оптических потерь кварца: $\lambda\approx 1{,}55$ мкм; $\beta_2=-20$ пс^2/км; $n=1{,}45$, полагая $z=c\tau$, получим, что коэффициенты при вторых производных различаются на два порядка не в пользу второй производной по времени t.

Для допированных кварцевых волокон с многослойной оболочкой, газонаполненных волокон, полупроводниковых волокон, стёкол, допированных полупроводниками и органическими полимерами, вклад вторых производных может быть сравним.

Целью настоящей работы является точное решение уравнения (1) в квадратурах при произвольной функции нелинейного отклика.

Основной формализм

Функция $\Delta\beta(|A|^2)$, характеризующая нелинейный отклик среды на внешнее гармоническое возмущение, принадлежит к одному из трёх классов: конкурирующие, насыщающиеся и переходные нелинейности [5]. Очевидным её свойством является то, что в нуле она обращается в ноль. Керровскую нелинейность можно считать частным случаем конкурирующей нелинейности.

Будем искать решение уравнения (1) в солитонном виде

$$A(z,t)=R(z,t)\exp\{\pm iqz\}, \tag{2}$$

где R – действительная функция, а q – произвольный неотрицательный параметр, связанный с пиковым значением напряжённости поля.

Подставляя (2) в (1) и приравнивая к нулю мнимую и вещественную части полученного уравнения, приходим к системе двух уравнений с одной неизвестной функцией:

$$\left(1\pm\frac{q}{\beta_o}\right)\frac{\partial R}{\partial z}+\frac{1}{v_g}\frac{\partial R}{\partial t}=0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2\beta_o}\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}-\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}=\left[\pm q+\frac{q^2}{2\beta_o}-\Delta\beta(R^2)\right]R. \tag{4}$$

Уравнение (3) является линейным однородным уравнением первого порядка.

Как известно из теории таких уравнений, общим решением является любая дифференцируемая функция $R=R(s(z,t))$, где

$$s(z,t)=z-vt, \tag{5}$$

$$v=v_g(1\pm q/\beta_o). \tag{6}$$

Таким образом, огибающая представляет собой бегущую волну неизменного профиля, движущуюся с постоянной скоростью (6) (при $-q/\beta_0=1$ возникает стоячая волна).

Профиль этой волны определяется уравнением (4), которое превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{1}{2\beta_o}-\frac{\beta_2 v^2}{2}\right)\frac{d^2R}{ds^2}=\left[\pm q+\frac{q^2}{2\beta_o}-\Delta\beta(R^2)\right]R\,, \qquad (7)$$

разрешимое в квадратурах. Действительно, умножая (7) на dR/ds, находим первый интеграл

$$\left(\frac{1}{2\beta_o}-\frac{\beta_2 v^2}{2}\right)\left(\frac{dR}{ds}\right)^2=\left(\pm q+q^2/2\beta_o\right)R^2-\int\Delta\beta(R^2)d(R^2)+C_1\,, \qquad (8)$$

где C_1 – произвольная постоянная. Обозначая

$$B(R^2)=\int\Delta\beta(R^2)d(R^2)\,, \qquad (9)$$

разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\sqrt{\frac{1-\beta_o\beta_2 v^2}{2\beta_o}}\int\frac{dR}{\sqrt{\left(\pm q+q^2/2\beta_o\right)R^2-B(R^2)+C_1}}=z-z_o-vt\,, \qquad (10)$$

где в качестве второй произвольной постоянной интегрирования принято ($-z_0$). Формула (10) является общим решением уравнения (7), которое определяется двумя квадратурами. Выполняя интегрирование в (9) и (10), найдём $z-z_0-vt=f(R,C_1)$.

Обращая данное выражение (если это, конечно, возможно) получим явный вид огибающей $R=R(z-z_0-vt,\ C_1)$. Постоянная C_1 определяется поведением огибающей на бесконечности. Отметим, что параметр q по сути является поправкой к волновому числу β_0.

Заключение

Таким образом, найдено решение уравнения (1) в виде волнового пакета с неизменным профилем. Формула (10) является основным результатом данной работы. Решение задачи о распространении оптических импульсов в одномодовых волоконных световодах, поддерживающих состояние линейной поляризации, сводится к вычислению первообразной в левой части (10), что, несомненно, технически проще решения уравнения в частных производных. Даже если эта первообразная не выражается в элементарных функциях, формула (10) определяет общее решение в специальных функциях.

Литература

1. **Алименков, И.В.** Решение расширенного уравнения распространения импульсов в оптических волокнах / И.В. Алименков, Ю.Ж. Пчёлкина // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, №. 1. – С. 28-30.
2. **Агравал, Г.П.** Нелинейная волоконная оптика. – М.: Мир, 1996. – 324 с.
3. **Agrawal, G.P.** Nonlinear Fiber Optics. – Academic Press, 2007. – 478 p.
4. **Agrawal, G.P.** Nonlinear Fiber Optics. – Academic Press, 2013. – 629 p.
5. **Кившарь, Ю.С.** Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам / Ю.С. Кившарь, Г.П. Агравал. – М.: Физматлит, 2005. – 648 с.

References

1. **Alimenkov, I.V.** Solution of expanded pulse-propagation equation for optical fiber/ I.V. Alimenkov, Y.G. Pchelkina // Computer Optics. – 2014.–V. 38(1). – P. 28-30.
2. **Agrawal, G.P.** Nonlinear Fiber Optics. – Moscow: "Mir" Publisher, 1996. – 324 p. – (In Russian).
3. **Agrawal, G.P.** Nonlinear Fiber Optics. – Academic Press, 2007. – 478 p.
4. **Agrawal, G.P.** Nonlinear Fiber Optics. – Academic Press, – 2013. – 629 p.
5. **Kivshar, Y.S.** Optical solitons. From Fibers to Photonic Grystals / Y.S. Kivshar, G.P. Agrawal – Moscow: "Fizmatlit" Publisher, 2005. – 648 p. – (In Russian).

SOLUTION IN QUADRATURES OF EXPANDED PULSE – PROPAGATION EQUATION FOR OPTICAL FIBERS FOR AN ARBITRARY NONLINEARITY

I. V. Alimenkov, Yu.G. Pchelkina
Samara State Aerospace University

Abstract

We found in quadratures the solution of expanded pulse – propagation equation for optical fibers for an arbitrary nonlinearity.

Key words: optical fiber, expanded pulse – propagation equation, the solution in quadratures, an arbitrary nonlinearity, solitonic solution.

Сведения об авторах

Алименков Иван Васильевич, 1949 года рождения. В 1977 году с отличием окончил Куйбышевский государственный университет по специальности «Физика». Кандидат физико-математических наук, работает в должности доцента кафедры прикладной математики СГАУ. Область научных интересов – нелинейная физика.

E-mail: *i-alimenkov@mail.ru* .

Ivan Vasilyievich Alimenkov, 1949 year of birth. In 1977 has graduated with honours from Kuibyshev State University on a speciality "Physics". Candidate in Physics and Mathematics, works as associated professor of Applied Mathematics sub-department SSAU. Research interests – nonlinear physics.

Пчёлкина Юлия Жиганшевна, 1980 года рождения. В 2002 году окончила Ульяновский государственный университет по специальности «Прикладная математика». Кандидат физико-математических наук, работает в должности доцента кафедры прикладной математики СГАУ. Область научных интересов – нелинейные уравнения. E-mail: *musina@yandex.ru* .

Uliya Giganshevna Pchelkina, 1980 year of birth. In 2002 has graduated from Ulyanovsk State University on a speciality "Applied Mathematica". Candidate in Physics and Mathematics, works as associated professor of Applied Mathematics sub-department SSAU. Research interests – nonlinear equations.

Поступила в редакцию 31 марта 2014 г.