ИНТЕГРИРОВАНИЕ В ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЯХ ДВУНАПРАВЛЕННОГО УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ В ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКНАХ ДЛЯ СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Алименков И.В., Пчёлкина Ю.Ж.

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)(СГАУ)

Аннотация

Найдены в элементарных функциях решения двунаправленного уравнения распространения оптических импульсов в волоконных световодах для степенных функций отклика нелинейной среды на внешнее гармоническое возмущение.

Ключевые слова: волоконный световод, двунаправленное уравнение распространения, решение в квадратурах, произвольная степенная нелинейность, солитонное решение.

Введение

Поле оптического импульса, распространяющегося в одномодовом волоконном световоде, поддерживающем состояние линейной поляризации, имеет вид [1]

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_x F(x,y)A(z,t)\exp\left\{i\left(\beta_o z-\omega_o t\right)\right\}, \qquad (1)$$

где $F(x,y)$ – обычно гауссовская функция вида $\exp\{-(x^2+y^2)/w^2\}$ с характерным размером моды w, $A(z,t)$ – комплексная огибающая импульса, ω_o – несущая частота, $\beta_o=\omega_o n(\omega_o)/c$ – центральное волновое число. Для огибающей оптического импульса выведено [2] уравнение

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial A}{\partial t}\right)+\frac{1}{2\beta_o}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}-\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}+ +\Delta\beta(|A|^2)A=0, \qquad (2)$$

названное расширенным уравнением распространения, которое существенно отличается от традиционного, называемого основным уравнением распространения [1], наличием второй производной по координате. Здесь $\beta_1=1/v_g$ – величина, обратная групповой скорости, β_2 – дисперсия групповой скорости, $\Delta\beta(|A|^2)$ – нелинейная поправка к постоянной распространения моды в линейном приближении. В области прозрачности волновода $\Delta\beta$ является вещественной функцией.

В [3] показано, что для солитоноподобных решений вида

$$A(z,t)=R(z,t)\exp\{iqz\}, \qquad (3)$$

где R – действительная функция, а q – произвольный параметр, функция R определяется двумя квадратурами:

$$\sqrt{\frac{1-\beta_o\beta_2 v^2}{2\beta_o}}\int\frac{\mathrm{d}R}{\sqrt{\left(q+q^2/2\beta_o\right)R^2-B(R^2)+C_1}}= =z-z_o-vt, \qquad (4)$$

$$B(R^2)=\int_0^{R^2}\Delta\beta(I)\,\mathrm{d}I, \qquad (5)$$

где $(-z_o)$ и C_1 – произвольные постоянные, а

$$v=v_g(1+q/\beta_o). \qquad (6)$$

Отметим, что при $q/\beta_0=-1$ квадратуры (4) и (5) определяют стоячую волну.

Таким образом, формулы (3), (4), (5) определяют трёхпараметрическое семейство решений уравнения (2). Если требуется найти локализованные решения, то постоянную C_1 следует положить равной нулю. Действительно, если потребовать, чтобы функция R и её первые производные на бесконечности обращались в ноль, то по правилам дифференцирования неявных функций из (4) следует обращение произвольной постоянной в ноль.

Целью настоящей работы является нахождение локализованных решений уравнения (2) в элементарных функциях для степенного типа нелинейного отклика $\Delta\beta(R^2)$ среды на внешнее гармоническое возмущение.

Основной формализм

Если обозначить для краткости

$$p=q(1+q/2\beta_o), \qquad (7)$$

то формулу (4) можно переписать в виде

$$\int\frac{\mathrm{d}R}{R\sqrt{1-B(R^2)/pR^2}}=\xi, \qquad (8)$$

где $$\xi=\sqrt{\frac{2p\beta_o}{1-\beta_o\beta_2 v^2}}(z-z_o-vt). \qquad (9)$$

Формула (8) в неявном виде определяет функцию $R(\xi)$. Если интеграл в левой части (8) вычисляется в элементарных функциях и полученное выражение обратимо, то $R=R(\xi)$ выражается в элементарных функциях. Если же после интегрирования получаем необратимое (трансцендентное) уравнение, то имеем обратную функцию $\xi=\xi(R)$. В теории дифференциальных уравнений решения, записанные в виде прямой или обратной функции, равноправны. Если же интеграл в левой части (8) не выражается в элементарных функциях, то имеем ξ, выраженное в специальных функциях.

Если интенсивность вводимого излучения $I=R^2$ невелика, то можно воспользоваться разложением функции нелинейного отклика $\Delta\beta(I)$ в степенной ряд [1]

$$\Delta\beta(I)=\eta_1 I+\eta_2 I^2+\eta_3 I^3+\cdots \qquad (10)$$

и ограничиться первым отличным от нуля членом. Нелинейность вида $\Delta\beta=\eta_1 I$ называется керровской. Если же функция $\Delta\beta(I)$, рассматриваемая на всей числовой оси, имеет в нуле экстремум, то разложение в степенной ряд начинается со второй степени интенсивности. Нелинейность вида $\Delta\beta = \eta_2 I^2$ называется некерровской. И тот и другой типы нелинейности являются степенными функциями с целым показателем, и интеграл в (8) для этого случая вычисляется в явном виде. Более того, вычисляется интеграл для любой степенной зависимости I^{α}.

Итак, положим $\Delta\beta(I) = \eta I^{\alpha}$. Тогда по формуле (5) находим $B(R^2) = (\eta/(\alpha+1))R^{2\alpha+2}$. Подставляя это выражение в (8), получим

$$\int \frac{\mathrm{d}R}{R\sqrt{1-\dfrac{\eta}{(\alpha+1)p}R^{2\alpha}}} = \xi . \quad (11)$$

Интеграл в левой части этого выражения вычисляется подстановкой $u = 1/R$. В результате имеем

$$-\frac{1}{\alpha} Arch\left(\frac{1}{R^{\alpha}}\sqrt{\frac{(\alpha+1)p}{\eta}}\right) = \xi . \quad (12)$$

Обращая последнее уравнение, находим

$$R = \left[\frac{(\alpha+1)p}{\eta}\right]^{1/2\alpha} \frac{1}{ch^{1/\alpha}(\alpha\xi)} . \quad (13)$$

Перейдём от параметра p, который формулой (7) связан со свободным параметром q, к новому свободному параметру $E_{\max}$, для чего обозначим

$$\left[\frac{(\alpha+1)p}{\eta}\right]^{1/2\alpha} = E_{\max} , \quad (14)$$

где $E_{\max}$ – пиковое значение напряжённости. Отсюда

$$p = \frac{\eta E_{\max}^{2\alpha}}{\alpha+1} \quad (15)$$

и формула (13) принимает вид

$$R = E_{\max} / ch^{1/\alpha}(\alpha\xi) , \quad (16)$$

где с учётом (9)

$$\xi = \sqrt{\frac{2\beta_o \eta E_{\max}^{2\alpha}}{(1-\beta_o\beta_2 v^2)(\alpha+1)}}(z - z_o - vt) . \quad (17)$$

Таким образом, формулы (16), (17), (3) и (1) в явном аналитическом виде решают задачу описания оптического поля в одномодовых волоконных световодах, поддерживающих состояние линейной поляризации. Примечательно, что это описание применимо в равной степени как к случаю керровской нелинейности, так и к случаю некерровской нелинейности.

Можно легко построить графики решений в относительных единицах для любых показателей степеней (рис. 1).

Для довершения полноты картины остаётся только выразить свободный параметр q через пиковое значение напряжённости $E_{\max}$.

Из (1) и (3) следует, что q является поправкой к центральному волновому числу β_0. Если эта поправка пренебрежимо мала по сравнению с β_0, то из (7) и (15) находим

$$q \approx p = \frac{\eta E_{\max}^{2\alpha}}{\alpha+1} . \quad (18)$$

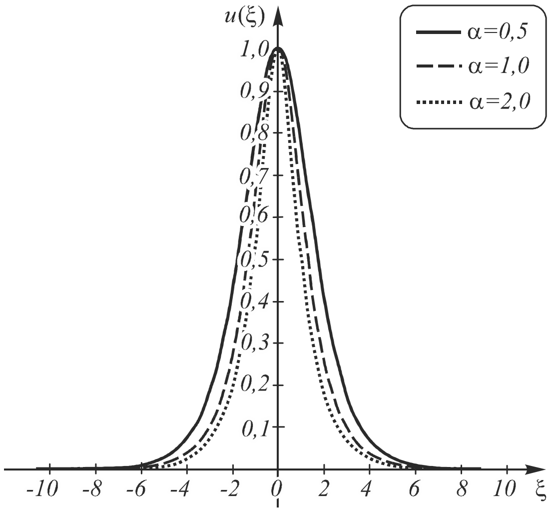


Рис. 1. Графики функции u = R/E$_{\max}$ *для различных показателей степени α*

В противном случае следует решить квадратное уравнение, получающееся из (7) и (15):

$$\frac{q^2}{2\beta_o} + q - \frac{\eta E_{\max}^{2\alpha}}{\alpha+1} = 0 . \quad (19)$$

Его решение

$$q = \beta_o\left(-1 \pm \sqrt{1+\frac{2\eta E_{\max}^{2\alpha}}{\beta_o(\alpha+1)}}\right) \quad (20)$$

в отличие от (18) может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Заключение

Таким образом, в явном аналитическом виде решена задача описания оптического поля в одномодовых волоконных световодах, поддерживающих состояние линейной поляризации, при произвольной степенной нелинейности. Как частный случай сюда входит широко применяемая [4–6] модель с керровской нелинейностью.

Благодарности

Работа выполнена при государственной поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках реализации мероприятий Программы повышения конкурентоспособности СГАУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2013–2020 годы.

Литература

1. **Агравал, Г.П.** Нелинейная волоконная оптика. – М.: Мир, 1996. – 324 с.
2. **Алименков, И.В.** Решение расширенного уравнения распространения импульсов в оптических волокнах / И.В. Алименков, Ю.Ж. Пчёлкина // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 1. – С. 28-30.
3. **Алименков, И.В.** Решение в квадратурах расширенного уравнения распространения импульсов в оптических

волокнах при произвольной нелинейности / И.В. Алименков, Ю.Ж. Пчёлкина // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 2. – С. 204-206.
4. **Agrawal, G.P.** Nonlinear Fiber Optics. – Academic Press, 2007. – 478 p.
5. **Agrawal, G.P.** Nonlinear Fiber Optics. – Academic Press, 2013. – 629 p.
6. **Кившарь, Ю.С.** Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам / Ю.С. Кившарь, Г.П. Агравал. – М.: Физматлит, 2005. – 648 с.

References

1. **Agrawal, G.P.** Nonlinear Fiber Optics. – Academic Press, 1989. – 324 p.
2. **Alimenkov, I.V.** Solution of expanded pulse-propagation equation for optical fiber / I.V. Alimenkov, Y.G. Pchelkina // Computer Optics. – 2014. – Vol. 38(1). – P. 28-30.
3. **Alimenkov, I.V.,** Solution in quadratyres of expanded pulse-propagation equation for optical fiber for an arbitrary nonlinearity / I.V. Alimenkov, Y.G. Pchelkina // Computer Optics. – 2014. – Vol. 38(2).– P. 204-206.
4. **Agrawal, G.P.** Nonlinear Fiber Optics. – Academic Press, 2007. – 478 p.
5. **Agrawal, G.P.** Nonlinear Fiber Optics. – Academic Press, 2013. – 629 p.
6. **Kivshar, Y.S.** Optical solutions. From Fibers to Photonic Grystals / Y.S. Kivshar, G.P. Agrawal. – Moscow: “Fizmatlit” Publisher, 2005. – 648 p. – (In Russian).

INTEGRATION IN ELEMENTARY FUNKTIONS OF TWO-WAY PULSE – PROPAGATION EQUATION IN OPTICAL FIBERS FOR POWER NONLINEARITY

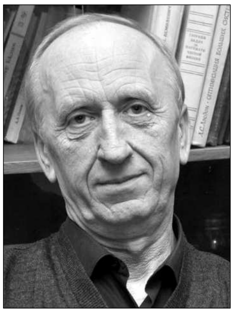
I.V. Alimenkov, Yu.Zh. Pchelkina
Samara State Aerospace University (SSAU)

Abstract

It is found in elementary functions the solutions of two-way pulse – propagation equation in optical fibers for power nonlinearity.

Key words: optical fiber, two-way pulse – propagation equation, the solution in quadratures, an arbitrary power nonlinearity, solitonic solution.

Сведения об авторах



Алименков Иван Васильевич, 1949 года рождения. В 1977 году с отличием окончил Куйбышевский государственный университет по специальности «Физика». Кандидат физико-математических наук, работает в должности доцента кафедры прикладной математики СГАУ. Область научных интересов – нелинейная физика.

E-mail: *i-alimenkov@mail.ru* .

Ivan Vasilyievich Alimenkov, 1949 year of birth. In 1977 has graduated with honours from Kuibyshev State University on a specialty “Physics”. Candidate in Physics and Mathematics, works as associated professor of Applied Mathematics sub-department SSAU. Research interests – nonlinear physics.

Пчёлкина Юлия Жиганшевна, 1980 года рождения. В 2002 году окончила Ульяновский государственный университет по специальности «Прикладная математика». Кандидат физико-математических наук, работает в должности доцента кафедры прикладной математики СГАУ. Область научных интересов – нелинейные уравнения, математическое моделирование.

E-mail: *musina@yandex.ru* .

Yuliya Zhiganshevna Pchelkina, 1980 year of birth. In 2002 has graduated from Ulyanovsk State University on a speciality “Applied Mathematic”. Candidate in Physics and Mathematics, works as associated professor of Applied Mathematics sub-department SSAU. Research interests – nonlinear equations, mathematical modeling.

Поступила в редакцию 19 июня 2014 г.