РЕШЕНИЕ РАСШИРЕННОГО УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ В ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКНАХ ДЛЯ КОНКУРИРУЮЩЕЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Алименков И.В., Пчёлкина Ю.Ж.
Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ)

Аннотация

Найдены в элементарных функциях решения расширенного уравнения распространения оптических импульсов в волоконных световодах для конкурирующих функций отклика нелинейной среды на внешнее гармоническое возмущение.

Ключевые слова: волоконный световод, расширенное уравнение распространения, точное решение, конкурирующая нелинейность, солитонное решение.

Введение

Поле оптического импульса, распространяющегося в одномодовом волоконном световоде, поддерживающем состояние линейной поляризации, имеет вид [1].

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_x F(x,y)A(z,t)\exp\left\{i\left(\beta_o z-\omega_o t\right)\right\}, \qquad (1)$$

где $F(x, y)$ – гауссовская функция вида $\exp\left\{\dfrac{-(x^2+y^2)}{w^2}\right\}$ с радиусом моды w, $A(z,t)$ – комплексная огибающая импульса, ω_o – несущая частота, $\beta_o=\omega_o n(\omega_o)/c$ – центральное волновое число.

Для огибающей оптического импульса выведено [2] уравнение

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial A}{\partial t}\right)+\frac{1}{2\beta_o}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}-\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}+ +\Delta\beta(|A|^2)A=0, \qquad (2)$$

названное расширенным уравнением распространения, которое существенно отличается от традиционного, называемого основным уравнением распространения [1], наличием второй производной по координате. Здесь $\beta_1=1/v_g$ – величина, обратная групповой скорости, β_2 – дисперсия групповой скорости, $\Delta\beta(|A|^2)$ – нелинейная поправка к постоянной распространения моды в линейном приближении, которая выражается через нелинейную часть Δn показателя преломления:

$$\Delta\beta=\frac{k_o\iint \Delta n|F(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint |F(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}, \qquad (3)$$

где $k_o=\omega_o/c$.

В области прозрачности волновода $\Delta\beta$ является вещественной функцией. Так как β_2 в области прозрачности отрицательно, то тип уравнения (2) – эллиптический. Если в уравнении (2) отбросить одну из вторых производных, то полученное уравнение параболического типа сводится к нелинейному уравнению Шрёдингера, которое является на сегодняшний день самым изученным из нелинейных уравнений, допускающих солитонные решения. Сводку различных его решений можно посмотреть, например, здесь: http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/npde/npde1402.pdf, http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/npde/npde1403.pdf.

Полные уравнения второго порядка рассматривались и ранее. Так, в [3] выведено уравнение гиперболического типа для неограниченной керровской среды в упрощённой модели поля, не зависящего от поперечных координат, но затем это уравнение упрощается до нелинейного уравнения Шрёдингера. Следует упомянуть и статью [4], в которой методом секанса и tanh-методом решаются некоторые полные уравнения второго и даже третьего порядка, однако полученные решения сингулярны. Решения же в статьях [2], [5] являются гладкими локализованными функциями, как и в данной работе.

При небольших пиковых значениях интенсивности вводимого излучения нелинейную часть показателя преломления представляют степенным рядом

$$\Delta n=n_2|\boldsymbol{E}|^2+n_4|\boldsymbol{E}|^4+\cdots, \qquad (4)$$

что согласно (3) приводит к степенному разложению функции $\Delta\beta$:

$$\Delta\beta=\gamma|A|^2+\mu|A|^4+\cdots, \qquad (5)$$

где параметры γ и μ зависят от характеристик световода. При достаточно малых интенсивностях оптического поля вторым слагаемым в (5) пренебрегают.

Полученная нелинейность называется керровской, и солитонное решение уравнения (2) для этого случая найдено в [5].

С ростом интенсивности вводимого излучения наблюдается [6] отклонение от керровской зависимости показателя преломления и необходимо учитывать второе слагаемое в формуле (5). Такая нелинейность называется конкурирующей (иногда этот термин применяют только в случае, если слагаемые в (5) различаются знаком).

Экспериментальные исследования в нелинейной оптике [6] подтверждают такую зависимость нелинейного показателя преломления от интенсивности оптического поля в полупроводниковых волноводах, стёклах, допированных полупроводниками, и органических полимерах.

Целью настоящей работы является нахождение локализованных решений уравнения (2) в элементарных функциях для конкурирующего нелинейного отклика среды на внешнее гармоническое возмущение.

Основной формализм

В [5], [7] показано, что если искать локализованное решение уравнения (2) в виде

$$A(z,t)=R(z,t)\exp\{iqz\}, \tag{6}$$

где R – действительная функция, а q – произвольный параметр, являющийся поправкой к центральному волновому числу β_o, то функция R определяется двумя квадратурами:

$$\int \frac{\mathrm{d}R}{R\sqrt{1-B(R^2)/pR^2}}=\xi, \tag{7}$$

$$B(R^2)=\int\limits_0^{R^2}\Delta\beta(I)\,\mathrm{d}I. \tag{8}$$

Здесь

$$\xi=\sqrt{\frac{2p\beta_o}{1-\beta_o\beta_2 v^2}}(z-z_o-vt), \tag{9}$$

$$p=q(1+q/2\beta_o), \tag{10}$$

$$v=v_g(1+q/\beta_o), \tag{11}$$

где z_0 – произвольная постоянная, определяющая начальное положение импульса.

Полагая в (8)

$$\Delta\beta=\gamma I+\mu I^2 \tag{12}$$

и подставляя полученное выражение в (7), имеем

$$\int \frac{\mathrm{d}R}{R\sqrt{1-(\gamma R^2/2p+\mu R^4/3p)}}=\xi. \tag{13}$$

Интеграл в левой части (13) с помощью подстановки u=1/R сводится к известному [8] интегралу, и в результате получим

$$-\frac{1}{2}Arch\frac{1/R^2-\gamma/4p}{\sqrt{\gamma^2/16p^2+\mu/3p}}=\xi. \tag{14}$$

Обращая это выражение, находим

$$R=\frac{2\sqrt{p/\gamma}}{\sqrt{1+\sqrt{1+16p\mu/3\gamma^2}\;ch2\xi}}. \tag{15}$$

Формула (15) описывает вещественную огибающую волнового пакета, локализованного вдоль направления $z=z_o+vt$ и движущегося с постоянной скоростью (11).

С учётом (6), солитонное решение уравнения (2) имеет вид:

$$A(z,t)=\frac{2\sqrt{p/\gamma}\exp\{iqz\}}{\sqrt{1+\sqrt{1+16p\mu/3\gamma^2}\;ch2\xi}}. \tag{16}$$

В том, что (16) является решением уравнения (2), можно убедиться прямой подстановкой. Последняя формула представляет собой однопараметрическое семейство решений, в котором свободным параметром является q.

От свободного параметра q (а вместе с ним и от p) удобно перейти к новому свободному параметру [9] амплитудного характера. Действительно, из соображений размерности и из формулы (15) следует, что пиковое значение напряжённости выражается следующим образом:

$$E_{\max}=\frac{2\sqrt{p/\gamma}}{\sqrt{1+\sqrt{1+16p\mu/3\gamma^2}}}. \tag{17}$$

Отсюда находим

$$p=\frac{\gamma E_{\max}^2}{2}+\frac{\mu E_{\max}^4}{3}. \tag{18}$$

Теперь из формулы (10) выражаем

$$q=\beta_o\left(-1\pm\sqrt{1+\frac{2p}{\beta_o}}\right) \tag{19}$$

или, подставляя сюда (18), окончательно получим

$$q=\beta_o\left(-1\pm\sqrt{1+2\left(\frac{\gamma E_{\max}^2}{2\beta_o}+\frac{\mu E_{\max}^4}{3\beta_o}\right)}\right). \tag{20}$$

Формулы (16), (9), (11), (18), (20) решают поставленную задачу.

Заключение

Таким образом, в явной аналитической форме найдено солитонное решение уравнения (2) для конкурирующей нелинейности. Каждый солитон характеризуется своей амплитудой и постоянной скоростью, зависящей от амплитуды.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках реализации мероприятий Программы повышения конкурентоспособности СГАУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2013–2020 годы.

Литература

1. **Агравал, Г.П.** Нелинейная волоконная оптика. – М.: Мир, 1996. – 324 с.
2. **Алименков, И.В.** Решение расширенного уравнения распространения импульсов в оптических волокнах / И.В. Алименков, Ю.Ж. Пчёлкина // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38. – В. 1. – С. 28-30.
3. **Lin, C.** Foundations for Guided-Wave Optics / Lin Chen. – Wiley, 2007. – 462p.
4. **El-Wakil, S.A.** New periodic and soliton solutions of nonlinear evolution equations //Applied Mathematics And Computation – 2008. – Vol. 197, – P. 497-506.
5. **Chen, L.** Foundations for Guided-Wave Optics / Lin Chen // Wiley. – 2007. – 462 p.
6. **El-Wakil, S.A.** New periodic and soliton solutions of nonlinear evolution equations // Applied Mathematics and Computation. – 2008. – Vol. 197. – P. 497-506.
7. **Алименков, И.В.** Решение расширенного уравнения распространения импульсов в оптических волокнах / И.В. Алименков, Ю.Ж. Пчёлкина // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 1. – С. 28-30.
8. **Алименков, И.В.** Интегрирование в элементарных функциях двунаправленного уравнения распространения импульсов в оптических волокнах для степенной нелинейности / И.В. Алименков, Ю.Ж. Пчёлкина // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, №. 3. – С. 377-379.

9. **Кившарь, Ю.С.** Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам / Ю.С. Кившарь, Г.П. Агравал. – М.: Физматлит, 2005. – 648 с.
10. **Алименков, И.В.** Решение в квадратурах расширенного уравнения распространения импульсов в оптических волокнах при произвольной нелинейности / И.В. Алименков, Ю.Ж. Пчёлкина // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 2. – С. 204-206.
11. **Двайт, Г.Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1977. – 224 с.
12. **Тахтаджян, Л.А.** Гамильтонов подход в теории солитонов / Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. – М.: Наука, 1986. – 528 с.

References

1. **Agrawal, G.P.** Nonlinear Fiber Optics. – Moscow: “ Mir” Publisher, 1996. – 324 p. – (In Russian).
2. **Alimenkov, I.V.** Solution of expanded pulse-propagation equation for optical fiber / I.V. Alimenkov, Y.Z. Pchelkina // Computer Optics – 2014.–V. 38(1). – P. 28 - 30.
3. **Lin, C.** Foundations for Guided-Wave Optics / Lin Chen // Wiley. – 2007. – 462 p.
4. **El-Wakil, S.A.** New periodic and soliton solutions of nonlinear evolution equations // Applied Mathematics And Computation. – 2008. – V. 197. – P. 497-506.
5. **Chen, L.** Foundations for Guided-Wave Optics / Lin Chen. – Wiley, 2007. – 462 p.
6. **El-Wakil, S.A.** New periodic and soliton solutions of nonlinear evolution equations // Applied Mathematics and Computation. – 2008. – Vol. 197. – P. 497-506.
7. **Alimenkov, I.V.** Solution of expanded pulse-propagation equation for optical fiber / I.V. Alimenkov, Y.Z. Pchelkina // Computer Optics. – 2014. – Vol. 38(1). – P. 28-30.
8. **Alimenkov, I.V.** Integration in elementary functions of two-way pulse-propagation equation in optical fiber for power nonlinearity / I.V. Alimenkov, Y.Z. Pchelkina // Computer Optics. – 2014. – Vol. 38(3). – P. 204-206.
9. **Kivshar, Y.S.** Optical solitons. From Fibers to Photonic Grystals / Y.S. Kivshar, G.P. Agrawal. – Moscow: “Fizmatlit” Publisher, 2005. – 648 p. – (In Russian).
10. **Alimenkov, I.V.** Solution in quadratyres of expanded pulse-propagation equation for optical fiber for an arbitrary nonlinearity / I.V. Alimenkov, Y.Z. Pchelkina // Computer Optics. – 2014. – Vol. 38(2).– P. 204-206.
11. **Dwight, H.B** Tables of integrals and other mathematical data. – Moscow: “Nauka” Publisher, 1977. – 224 p. – (In Russian).
12. **Takhtajan, L.A.** Hamilton approach in theory of solitons / L.A. Takhtajan, L.D. Faddeev. – Moscow: “Nauka” Publisher, 1986. – 528 p. – (In Russian).

THE SOLUTION OF AN EXPANDED PULSE – PROPAGATION EQUATION IN OPTICAL FIBERS FOR COMPETING NONLINEARITY

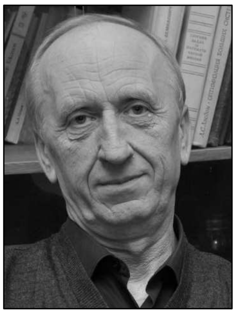
I.V. Alimenkov, Y.Z. Pchelkina
Samara State Aerospace University

Abstract

Solutions of the expanded pulse-propagation equation are derived in elementary functions in optical fibers for competing nonlinearit.

Key words: optical fiber, expanded pulse – propagation equation, the exact solution, competing nonlinearity, solitonic solution.

Сведения об авторах



Алименков Иван Васильевич, 1949 года рождения. В 1977 году с отличием окончил Куйбышевский государственный университет по специальности «Физика». Кандидат физико-математических наук, работает в должности доцента кафедры прикладной математики СГАУ. Область научных интересов – нелинейная физика.

E-mail: *i-alimenkov@mail.ru* .

Ivan Vasilyievich Alimenkov, 1949 year of birth. In 1977 graduated with honours from Kuibyshev State University on a speciality “Physics”. Candidate in Physics and Mathematics, works as associated professor Applied Mathematics sub-department of SSAU. Research interests – nonlinear physics.

Пчёлкина Юлия Жиганшевна, 1980 года рождения. В 2002 году окончила Ульяновский государственный университет по специальности «Прикладная математика». Кандидат физико-математических наук, работает в должности доцента кафедры прикладной математики СГАУ. Область научных интересов – нелинейные уравнения.

E-mail: *musina@yandex.ru* .

Yuliya Zhiganshevna Pchelkina, 1980 year of birth. In 2002 graduated from Ulyanovsk State University on a speciality “Applied Mathematics”. Candidate in Physics and Mathematics, works as associated professor Applied Mathematics sub-department of SSAU. Research interests – nonlinear equations.

Поступила в редакцию 26 сентября 2014 г.