

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ И МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ СПЕКТРЫ

Визильтер Ю.В., Сидякин С.В.

ФГУП «Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем»

Аннотация

Предложен обобщающий формализм «параметрических спектров» для описания всех спектров такого типа с единых позиций. Параметрический спектр представляет собой плотность распределения некоторой меры (численной характеристики) образа (изображения) по анализируемому параметру, от которого эта мера монотонно зависит. Проведена классификация параметрических спектров. Наиболее общим случаем параметрических спектров являются спектры точности измерения от параметра разрешения. В качестве частных случаев они включают: спектры на основе операторов описания, спектры на основе операторов фильтрации, спектры на основе частичного порядка и монотонных операторов фильтрации, спектры на основе вложенных проекторов и расстояния, спектры на основе нормированных линейных пространств. Рассмотрен подкласс морфологических спектров, представляющих собой спектры точности реконструкции по параметру сложности описания. Этот подкласс включает, в частности, спектры на основе операторов описания со структурирующим параметром и спектры на основе фильтрации, состоящей из последовательных операций описания и реконструкции. Показана связь параметрических спектров с соответствующими параметрическими разложениями.

Ключевые слова: морфология изображений, параметрические спектры, морфологические спектры.

Введение

В работе Maragos [1] по аналогии со спектрами Фурье был предложен способ описания плоских фигур и изображений при помощи форморазмерных спектров, вычисляемых средствами математической морфологии Серра [2]. В последующие годы многими исследователями, включая авторов данной статьи, был предложен ряд дескрипторов изображений, построенных в той или иной степени по аналогии со спектрами Марагоса и также названных спектрами: спектры на основе моментов [3], спектры на основе фильтров связности [4], различные морфологические спектры на основе проективных морфологий [5], критериальные морфологические спектры по параметру сложности [6], кратнорегрессионные псевдоспектры для анализа движения на видеопоследовательностях [7] и т.п. Действительно ли у этих «спектров» есть что-то общее, или это только слабые аналогии, за которыми никакого единого механизма анализа данных не скрывается?

В данной статье делается попытка предложить некоторый единый формализм описания таких спектров и провести их соответствующую классификацию с тем, чтобы навести определённый порядок в терминологии и идеологии. Основная идея проводимых ниже построений заключается в обобщении методики Марагоса, который ставит во главу угла некоторую меру анализируемого образа, монотонно зависящую от параметра, производная (для непрерывных параметров) или первая разность которой (для дискретных параметров) по этому параметру и определяет соответствующий «спектр». Поскольку наличие параметра играет здесь ключевую роль, такие спектры предлагается называть параметрическими.

Описываемые ниже схемы построения параметрических спектров будут нумероваться римскими циф-

рами, чтобы не путать номера схем в классификации с другими перечислениями.

1. Параметрические спектры

1. Спектры точности измерения от параметра разрешения (самый общий случай)

Самая простая схема построения параметрического спектра требует для своего описания крайнего минимума элементов. Необходимы:

- множество первичных образов Ω ;
- множество параметров $P \subseteq R$, где R – множество действительных чисел;
- оператор параметрического измерения $\mu(p, A) : \langle p, A \rangle \in P \times \Omega \rightarrow m \in R$ со свойствами:

– монотонности:

$$\forall p, q \in P, A \in \Omega : p \geq q \Rightarrow \mu(p, A) \geq \mu(q, A);$$

– ограниченности сверху:

$$\forall A \in \Omega : \mu(p_{\max}, A) = \mu_{\max}(A),$$

$$p_{\max} = \sup \{p \in P\},$$

$$\mu_{\max}(A) = \sup \{\mu(p, A) : p \in P\}.$$

Если $P = (p_{\min}, p_{\max}) \subseteq R$ – непрерывный интервал, то параметрический спектр (*Parametric Spectrum*, PS) определяется как производная

$$PS(p, A, \mu) = \partial \mu(p, A) / \partial p. \tag{1}$$

Если $P = \{p_{\min}, \dots, p_{\max}\} = \{p_i\}_{i=i_{\min}, \dots, i_{\max}} \subseteq R$ – счётное множество дискретных значений, то дискретный параметрический спектр (*DPS*) определяется как дискретная производная (нормированная первая разность)

$$DPS(p_i, A, \mu) = (\mu(p_i, A) - \mu(p_{i-1}, A)) / (p_i - p_{i-1}). \tag{2}$$

Описанную схему конструирования объекта под названием «параметрический спектр» можно интерпретировать следующим образом. Мы измеряем некоторую характеристику объекта (сигнала, изображения, выборки и т.д.) A с точностью (разрешением) p . Максимальное значение измерения достигается при максимальном разрешении, которое позволяет измерить весь объект (все его составляющие). Чем ниже разрешение, тем больше частей объекта, которые не поддаются такому грубому измерению, и, соответственно, точность измерения объекта падает. Когда мы берём производную (или дискретную производную), её пики означают, что именно при таком разрешении в объекте содержатся некие детали (признаки, характеристики), которые вносят существенный вклад в результат измерения объекта в целом.

Заметим, что важна лишь взаимная монотонность параметра p и меры $\mu(p, A)$. Если вдруг окажется, что в нашем распоряжении имеется некая мера $\pi(p, A)$, которая убывает вместо того, чтобы возрастать с ростом p , мы просто примем $\mu(p, A) = -\pi(p, A)$. Или, наоборот, будем считать меру положительной, зато параметр p сделаем отрицательным, как это сделано в спектре Марагоса (с ростом размера структурирующего элемента площадь закрытия растёт, а площадь открытия падает, поэтому в одном случае размер в спектре считается положительным, а в другом – отрицательным).

Как мы увидим ниже, эта простая схема охватывает достаточно широкое разнообразие известных и, вероятно, ещё не известных техник анализа данных. Однако пока никакого семантического содержания эта схема не несёт. Непонятно не только, какие характеристики здесь измеряются, но и почему измерение с точностью до p не позволяет измерить некоторые составляющие объекта. Теперь мы добавим конкретики, но за счёт этого, естественно, потеряем в общности и простоте. На каждом следующем шаге рассуждений мы будем вводить в схему измерения новые уточняющие элементы, и таким образом возникнет иерархия параметрических спектров.

2. Иерархия параметрических спектров
II. Спектры на основе операторов описания
(частный случай схемы I)

Исключим из схемы I загадочный оператор параметрического измерения и добавим следующие дополнительные элементы, из которых он может быть построен:

- множество вторичных образов (признаков, описаний) Λ с определённой на нём мерой $\nu: \Lambda \rightarrow R$;
- оператор параметрического описания $\psi(p, A): P \times \Omega \rightarrow \Lambda$, такой что $\nu(\psi(p, A)) = \mu(p, A)$ со свойствами, описанными выше.

Спектры вычисляются в соответствии с формулами (1) и (2).

Заметим, что в этой конструкции появилась уже какая-то техника измерений: мы отображаем наши

исходные объекты в некоторое пространство, элементы которого измеримы. Параметр p при этом, видимо, определяет точность отображения, а следовательно, и точность финального измерения.

Самый простой пример измерения по такой схеме – измерение двумерных фигур путём наложения измерительной сетки с прямоугольной решёткой линий. Собственно измерение заключается в подсчёте суммарной площади квадратных ячеек, которые целиком принадлежат измеряемой фигуре. Пусть параметр p определяет количество ячеек, помещающихся, например, в одном дюйме (знаменитая характеристика разрешения сканеров и принтеров *dpi, dots per inch*). Чем выше dpi , тем точнее мы можем измерить площадь фигуры. При этом под описанием фигуры ψ с разрешением p мы понимаем отображение исходной фигуры A на сетку с заполненными и пустыми ячейками. А вот процесс измерения площади ν далее происходит автоматически – он присущ самому пространству описаний и не зависит уже ни от p , ни от A .

Следует отметить, что подобного рода рассуждения часто приводятся в работах по фракталам. И действительно, многие схемы измерения фрактальной размерности связаны с процессами описания и измерения, зависящими от монотонно меняющегося параметра разрешения.

Наиболее популярный пример описания объекта во вторичном пространстве – преобразование Фурье, которое отображает объект из временной или пространственной области в частотную. А там уже можно измерять его различные характеристики.

Другой пример интересного параметрического отображения – преобразование Хафа или Радона с переменным разрешением (размером ячеек) аккумулятора.

III. Спектры на основе операторов фильтрации
(частный случай схемы II)

Добавим к схеме II всего одно уточняющее условие: $\Omega = \Lambda$.

То есть мера ν задана непосредственно на множестве анализируемых образов Ω , а параметрическое описание превращается в параметрический фильтр (образ на входе, образ того же рода на выходе):

- $\nu: \Omega \rightarrow R$;
- оператор параметрического описания $\psi(p, A): P \times \Omega \rightarrow \Omega$, такой что $\nu(\psi(p, A)) = \mu(p, A)$ со свойствами, описанными выше.

Спектры вычисляются в соответствии с формулами (1) и (2).

Идея измерять собственно те же объекты, которые мы анализируем, достаточно естественна. Она используется, например, в спектре Марагоса (рис. 1), где в качестве меры выступает площадь фигуры, а в качестве параметрических фильтров используются открытие и закрытие со структурирующими элементами заданной формы и переменного размера p . Вы-

бор структурирующего элемента позволяет анализировать (измерять) различные форморазмерные характеристики изображения.

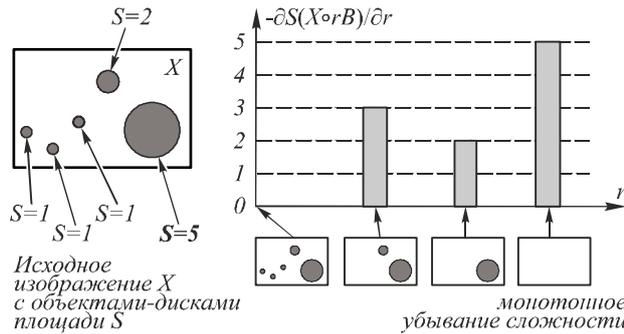


Рис. 1. Морфологический спектр Марагоса, вычисленный для дискового структурирующего элемента. Показаны этапы морфологической фильтрации при его построении

Для аналогичной цели можно использовать фильтры низких или высоких частот и вообще любые линейные и нелинейные фильтры. Но это уже догадки на основе опыта. А как выбрать (сконструировать) такую согласованную пару из фильтра ψ и меры ν , чтобы их комбинация давала $\mu(p, A)$ с требуемыми свойствами? Ряд описываемых ниже схем, являясь её частными случаями, поясняют возможные механизмы согласования фильтра и меры.

IV. Спектры на основе частичного порядка и монотонных операторов фильтрации (частный случай схемы III)

До сих пор ничего не было сказано об алгебраической структуре множества Ω кроме того, что на нём задана мера ν . Предположим теперь, что на Ω задано отношение частичного порядка \supseteq , операторы фильтрации являются монотонными в смысле следующего отношения:

$$\forall p, q \in P, A \in \Omega: p \geq q \Rightarrow \psi(p, A) \supseteq \psi(q, A),$$

фильтр $\psi(p)$ ограничен сверху идентичным оператором $\psi(p_{\max}, A) = A$, а мера ν согласована с отношением частичного порядка $A \supseteq B \Rightarrow \nu(A) \geq \nu(B)$. Легко убедиться, что введённые дополнительные предположения обеспечивают необходимые свойства

$$\mu(p, A) = \nu(\psi(p, A)).$$

Примерами монотонных операторов, согласованных с отношением частичного порядка (включения), являются операторы открытия и закрытия Серра со структурирующим элементом $B(p)$ размера p , которые используются в спектре Марагоса вместе с мерой, равной положительной или отрицательной площади фигуры. Однако заметим, что этим требованиям в равной степени удовлетворяют и другие монотонные операторы, например, сжатие и расширение, согласованные с аналогичной мерой. Полученный с их помощью спектр будет представлять собой гистограмму расстояний точек объекта (положительная ось) и фона (отрицательная ось) до границ анализи-

руемой фигуры, что также, видимо, является достаточно осмысленной характеристикой формы. Более того, любой немонотонный параметрический оператор $\tau(p, A)$ легко превратить в монотонный $\psi_\tau(p, A)$, используя следующий приём монотонизации, например, по убыванию:

$$\psi_\tau(p_{\min}, A) = \tau(p, A) \cap A,$$

$$\psi_\tau(p, A) = \tau(p, A) \cap (\bigcap_{q \in P, q < p} \psi_\tau(q, A)).$$

Так можно монотонизировать, скажем, оконный медианный фильтр с дискретным переменным размером окна и построить по нему спектр площади, который, очевидно, будет реагировать на объекты разного размера на изображениях в силу свойства медианного фильтра удалять детали, меньшие по площади половины площади окна.

Итак, с точки зрения данной схемы нельзя объяснить, почему Марагос выбрал вариант с открытием и закрытием – формально они равноправны по отношению к любым другим монотонным фильтрам. Следующая схема объясняет важную разницу между ними.

V. Спектры на основе вложенных проекторов и расстояния (частный случай схемы III)

Пусть Ω является метрическим пространством с метрикой $\rho_\Omega: \Omega \times \Omega \rightarrow R$.

Пусть также задано параметрическое семейство $M(p): p \in P \rightarrow M \in \Omega^\Omega$ вложенных подмножеств Ω со свойствами:

- монотонности:
- $\forall p, q \in P: p \geq q \Rightarrow M(p) \supseteq M(q);$
- ограниченности сверху: $M(p_{\max}) = \Omega.$

Определим оператор проекции образа A на множество M как отыскания ближайшего к A образа в M (проектор минимального расстояния):

$$\text{Pr}_p(A, M) = \arg \max_{B \in M} \rho_\Omega(A, B).$$

Выберем такой проектор в качестве оператора

$$\Psi(p, A) = \text{Pr}_p(A, M(p)),$$

а в качестве согласованной с ним меры используем расстояние до исходного образа:

$$\nu_A(x) = -\rho_\Omega(A, X).$$

Очевидно,

$$p \geq q \Rightarrow M(p) \supseteq M(q) \Rightarrow \nu_A(\Psi(p, A)) \geq \nu_A(\Psi(q, A));$$

$$M(p_{\max}) = \Omega \Rightarrow \nu_A(\Psi(p_{\max}, A)) = \nu_{\max} = 0,$$

то есть и эти дополнительные предположения обеспечивают необходимые свойства

$$\mu(p, A) = \nu(\Psi(p, A)).$$

Данная схема позволяет описать как спектр Марагоса на базе проекторов открытия и закрытия, так и, например, спектр на базе идеального полосового фильтра низких частот. В обоих случаях образуются параметризованная последовательность вложенных

множеств образов из Ω и соответствующая ей последовательность параметризованных проекторов.

VI. Спектры на основе нормированных линейных пространств (частный случай схемы III)

Предположим, что Ω является нормированным линейным пространством с нормой $\|*\|$. Тогда в качестве меры ν естественно выбрать норму или квадрат нормы, а в качестве $\psi(p)$ – какое-либо параметризованное семейство линейных операторов. Два очевидных примера:

1. Сглаживающие линейные фильтры с масштабируемым ядром. Например, Гауссова фильтрация с ядром $G(\sigma)$: чем больше σ , тем меньше норма свёртки $\|G(\sigma)*A\|$. Выберем $\psi(p) = G(p)$, $p \leq 0$; $\nu(X) = \|X\|$ – это обеспечит все свойства, необходимые для построения параметрического спектра типа (1) или (2).

2. Проекторы на вложенные линейные подпространства (это частный случай как данной схемы, так и схемы V). Если $M(p)$ – вложенные линейные подпространства, то норма проекции на них также будет изменяться монотонно и будет ограничена сверху нормой исходного образа, что и требуется для построения спектра. Обычно в такой схеме множество подпространств $M(p)$ счётное, что позволяет строить дискретные спектры типа (2).

3. Морфологические спектры

VII. Спектры точности реконструкции по сложности описания (частный случай схемы I)

Вернёмся на самый верх иерархического дерева и исследуем другую его ветвь. Исключим из схемы I не только оператор параметрического измерения, но и сам неконкретный параметр «разрешения» и вместо них добавим для начала лишь множество описаний Λ .

В схеме II мы также называли Λ пространством описаний. Однако его можно было бы назвать и пространством признаков. Признак – это любая характеристика объекта. Описание в широком смысле (который мы использовали выше) – любой набор признаков. Описание в узком смысле (назовём его конструктивным описанием или дескриптором) – это набор инструкций (в частном случае – набор характеристик объекта), который позволяет его реконструировать (собрать из некоторых базовых частей, аппроксимировать какой-либо моделью и т.п.). Например, конструктивным описанием геометрического вектора \mathbf{r} (направленного отрезка в трёхмерном пространстве) является его дескриптор в виде набора из трёх координат (x, y, z) . При этом процедура реконструкции заключается в том, что заранее заданные базовые элементы – орты $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – суммируются с весами, равными соответствующим координатам: $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Как и в данном примере, в общем случае конструктивное описание состоит из некоторой постоянной части («машины реконструкции»), позволяющей реконструировать любые объекты из Ω , включающей базисные элементы и алгоритмы реконструкции, и переменной части («набора инструкций для реконструкции»), включающей информацию, специфическую для реконструкции имен-

но данного объекта $A \in \Omega$. Вообще говоря, следует считать, что Λ содержит пары «машина реконструкции, набор инструкций», однако если в рамках конкретной задачи машина реконструкции не меняется, то можно считать, что Λ – пространство наборов инструкций одного типа, а «машина описания и реконструкции» может быть описана как однозначный оператор реконструкции $\delta: \Lambda \rightarrow \Omega$. Этот элемент мы также добавим к схеме I.

Далее очевидно, что различные дескрипторы одного и того же объекта могут различаться как по точности реконструкции на основе описания, так и по сложности описания (количеству шагов алгоритма реконструкции, количеству хранимых параметров и т.п.). Для того, чтобы оценить точность реконструкции, нужно измерить, насколько реконструкция отличается от исходного образа. Для этого введём на Ω меру отличия $J: \Omega \times \Omega \rightarrow R$, такую что $\forall A, B \in \Omega, A \neq B: J(A, A) < J(A, B)$. В частном случае мера отличия может быть метрикой, но это вовсе не обязательно. Более того, мера отличия может вообще не зависеть от исходного образа (точнее, зависеть от него косвенно). Например, норма проекции вектора \mathbf{a} на некоторое линейное подпространство B тем больше, чем ближе проекция $\mathbf{b} = \text{Pr}_B \mathbf{a}$ к исходному вектору. Поэтому в данном случае вполне можно принять $J(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\|\mathbf{b}\|$.

Сложность дескриптора также можно охарактеризовать некоторой мерой сложности $Q: \Lambda \rightarrow R$. При этом интуитивно понятно, что чем сложнее описание (чем больше инструкций оно включает), тем более полно по нему можно реконструировать объект. То есть по мере роста сложности описания максимально достижимая точность реконструкции также растёт (а мера рассогласования соответственно падает). Иными словами, сложность и максимально возможная при этой сложности точность реконструкции монотонно зависят друг от друга, как в схеме I зависели друг от друга параметр p и мера μ . Попробуем выразить эту связь формально. Введём оператор описания с заданной сложностью

$$\begin{aligned} \varepsilon(p, A) &= \\ &= \arg \min_{\lambda} \{J(A, \delta(\lambda)) : \lambda \in \Lambda, Q(\lambda) \leq p\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда оператор параметрического измерения из схемы I можно определить как

$$\mu(p, A) = -J(A, \delta(\varepsilon(p, A))). \tag{4}$$

Легко убедить, что он обладает всеми необходимыми свойствами.

Спектры (1) и (2) в таком случае удобно называть спектрами сложности. Семантический смысл спектра точности от сложности заключается в том, что, когда мы берём производную (или дискретную производную) от монотонной функции (4), её пики означают, что именно при такой сложности описания данной «машине реконструкции» удаётся добавить в реконструированный образ объекта некие детали, которые

вносят существенный вклад в повышение точности реконструкции объекта в целом.

Необходимо отметить, что в своих предыдущих работах [6] мы использовали несколько иное определение спектра сложности, основанное не на решении задачи оптимизации с ограничением (3), а на решении задачи регуляризации по сложности:

$\varepsilon(\alpha, A) = \arg \min_{\lambda} \{J(A, \delta(\lambda)) + \alpha Q(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$, α – параметр регуляризации, который мы и считали параметром сложности. Однако связь между этими задачами очевидна, так как α можно рассматривать как множитель Лагранжа при решении первой задачи. Преимущество данной схемы, основанной на описании с некоторой сложностью и реконструкции с некоторой точностью в качестве семантической интерпретации схемы I видится нам в том, что и параметр p , и оператор параметрического измерения μ перестают быть чем-то загадочным и искусственным. Более того, в ветви иерархии спектров, отходящей от схемы VII, естественным образом возникают все описанные выше схемы.

VII+II. Спектры на основе параметрических операторов описания со структурирующим параметром

Некоторые проблемы в буквальной реализации схемы VII связаны с тем, что приходится в явном виде оценивать сложность описания и решать задачу оптимизации (3). Однако на практике для любого разумного класса описаний Λ почти всегда существует параметрическое семейство операторов описания $\omega(r, A) : R \times \Omega \rightarrow \Lambda$, имеющее параметр r , монотонно связанный со сложностью описания:

$$\forall r, q \in R, A \in \Omega : r \geq q \Rightarrow Q(\omega(r, A)) \geq Q(\omega(q, A)).$$

Это позволяет ввести монотонные функции

$$r_{\omega, A}(p) = \arg \max_{r \in R} \{Q(\omega(r, A)) \leq p\},$$

$$p_{\omega, A}(r) = Q(\omega(r, A)).$$

Тогда задача (3) имеет простое решение

$$\varepsilon(\alpha, A) = \arg \min_{\lambda} \{J(A, \delta(\lambda)) : \lambda \in \Lambda,$$

$$Q(\lambda) \leq p\} = \omega(r_{\omega, A}(p), A),$$

а оператор параметрического измерения из схемы I можно определить не только по параметру p с использованием оператора описания $\varepsilon(p, A)$ в форме (4):

$$\mu(p, A) = -J(A, \delta(\varepsilon(p, A))),$$

но и по параметру r с использованием оператора описания $\omega(r, A)$:

$$\begin{aligned} \mu(p, A) &= \mu(p_{\omega, A}(r), A) = \\ &= -J(A, \delta(\varepsilon(p_{\omega, A}(r), A))) = \\ &= -J(A, \delta(\omega(r, A))) = \mu(r, A). \end{aligned}$$

Такой параметр r , монотонно связанный со сложностью описания, будем называть структурирующим параметром. Таким параметром является, например, размер структурирующего элемента в

спектре Марагоса (чем больше размер, тем меньше элементов можно вписать целиком в фигуру, следовательно, тем меньше будет шагов реконструкции, то есть сложность будет ниже). Аналогичным образом пороговое число точек на прямой в аккумуляторе Хафа монотонно определяет число выделяемых и участвующих в реконструкции прямых в морфологии на базе преобразования Хафа и т.п. Спектр по структурирующему параметру, естественно, определяется выражениями (1) и (2) с заменой p на r . Как видно, такой спектр полностью соответствует наметенной выше схеме II, в которой не рассматриваются элементы описания и реконструкции, а свойства оператора параметрического измерения просто постулируются.

VII+III. Спектры на основе операторов фильтрации, получаемых комбинацией описания и реконструкции

Комбинацию операторов описания и реконструкции обозначим как

$$\psi(p, A) = \delta(\varepsilon(p, A)).$$

Очевидно, она представляет собой параметрический фильтр $\psi(p, A) : P \times Q \rightarrow \Omega$, такой что

$$\mu(p, A) = -J(A, \psi(p, A))$$

со всеми свойствами, описанными выше в I→III.

VII→V. Спектры на основе вложенных проекторов и классов сложности

Введём дополнительное условие согласованности операторов описания и реконструкции:

$$\varepsilon(p, A) = \varepsilon(p, \delta(\varepsilon(p, A))). \tag{5}$$

Это условие означает, что если мы строим описание реконструированного объекта, то оно должно совпадать с тем описанием, на основе которого велась реконструкция.

Отсюда непосредственно следует, что фильтр $\psi(p, A)$ является проектором:

$$\begin{aligned} \delta(\varepsilon(p, A)) &= \delta(\varepsilon(p, \delta(\varepsilon(p, A)))) \Rightarrow \\ \Rightarrow \psi(p, A) &= \psi(p, \psi(p, A)). \end{aligned}$$

Множество стабильных элементов проектора $\psi(p)$ будет иметь вид:

$$M(p) = \{\psi(p, A) : A \in \Omega\}.$$

Исходя из (3) и (5), его можно также описать как $M(p) = \{A \in \Omega : Q(\varepsilon(p, A)) \leq p\}$, то есть как множество образов, сложность описания которых не превосходит p .

Отсюда сразу следует, что $\{M(p)\}_{p \in R}$ – последовательность вложенных множеств, ограниченная сверху исходным Ω , а множество $\{\psi(p)\}_{p \in R}$ – последовательность вложенных проекторов, ограниченная сверху идентичным оператором.

Это в точности та схема, которая была описана как III→V, однако теперь мы не постулируем наличие таких вложенных классов, а получаем их на ос-

нове свойств комбинации операторов описания и реконструкции.

VII+VI. Спектры на основе нормированных линейных пространств

Предположим, что Ω является нормированным линейным пространством с нормой $\|*\|$.

Тогда, как мы уже отмечали, в качестве J естественно выбрать минус норму или квадрат нормы, а в качестве фильтра $\psi(p)$ – какое-либо параметризованное семейство линейных операторов. Рассмотрим те же два примера, что и раньше:

1. Сглаживающие линейные фильтры с масштабируемым ядром $G(\sigma)$. Как известно, они эффективно реализуются на основе теоремы о свёртке через прямое преобразование Фурье, умножение на образ $G(\sigma)$ в частотной области и обратное преобразование Фурье. Будем считать, что оператор описания с параметром σ – это прямое преобразование Фурье и умножение на образ $G(\sigma)$ в частотной области, а оператор реконструкции – обратное преобразование Фурье. Легко убедиться, что параметр σ в данном случае действительно является структурирующим параметром, монотонно влияющим на сложность описания: чем больше значение σ , тем меньше высокочастотных гармоник участвуют в реконструкции отфильтрованного образа (в качестве меры сложности Q можно использовать, например, минимальное количество гармоник в $F^*G(\sigma)$, суммарная энергия которых составляет более 95 % энергии всего отфильтрованного сигнала). Также легко убедиться, что такая фильтрация не является проективной, поскольку условие согласованности описания и реконструкции (5) здесь не выполняется.

2. Проекторы на вложенные линейные подпространства (это частный случай как данной схемы, так и схемы VII→V). Если $M(p)$ – вложенные линейные подпространства, то норма проекции на них также будет изменяться монотонно и будет ограничена сверху нормой исходного образа, что и требуется для построения спектра. Обычно такие вложенные подпространства образуются путём последовательного удаления либо объединения компонент из исходного полного базиса пространства Ω . То есть оператор описания ставит в соответствие образу коэффициенты его разложения по базису подпространства, а оператор реконструкции формирует проекцию на подпространство как линейную комбинацию базисных векторов с коэффициентами из описания. Естественной мерой сложности описания здесь является количество используемых базисных координат (размерность базиса). Если размерность базиса принять за p , то множество подпространств $M(p)$ будет не только счётным, но и конечным, что позволяет строить дискретные спектры типа (2). Очевидными примерами таких спектров на основе вложенных проекторов являются спектры на базе идеальных фильтров низких частот. Другим интересным примером последовательности вложенных подпространств убывающей

сложности является последовательность упорядоченных по сложности Пытьевских форм [8], полученных последовательным слиянием областей базового пиксельного разбиения. Эта последовательность может быть получена путём оптимальной сегментации некоторого изображения A , а затем использована для построения спектра любого изображения B по форме изображения A .

В заключение данного раздела отметим, что основанную на комбинации описания и реконструкции схему VII и все схемы, вытекающие из неё, удобно называть морфологическими схемами построения спектров по аналогии с операциями эрозии и дилатации в математической морфологии. Поэтому спектры, построенные по таким схемам, мы будем называть морфологическими спектрами, в отличие от всех остальных возможных спектров, удовлетворяющих схеме I, которые мы будем называть просто параметрическими.

Таким образом, мы описали несколько конструктивных схем, позволяющих строить параметрические спектры. Рассмотрим теперь взаимосвязь между параметрическими спектрами на базе фильтров и соответствующими спектральными разложениями.

4. Параметрические спектры и соответствующие разложения

Будем отталкиваться от схемы II (спектры на основе операторов фильтрации), в которой заданы:

- множество первичных образов Ω ;
- множество параметров $P \subseteq R$;
- мера $\nu: \Omega \rightarrow R$;
- параметрический фильтр $\psi(p, A): P \times \Omega \rightarrow \Omega$, та-

кой что $\psi(p_{\max}, A) = A$, и при этом $\nu(\psi(p, A)) = \mu(p, A)$ обладает свойствами:

- монотонности:
 $\forall p, q \in P, A \in \Omega; p \geq q \Rightarrow \mu(p, A) \geq \mu(q, A)$;
- ограниченности сверху:
 $\forall A \in \Omega: \mu(p_{\max}, A) = \nu(A)$.

Рассмотрим случай, когда $P = \{p_{\min}, \dots, p_{\max}\} = \{p_i\}$, $i = i_{\min}, \dots, i_{\max} \subseteq R$ – множество дискретных значений, что позволяет сформировать дискретный параметрический спектр (2):

$$DPS(p_i, A, \nu) = (\nu(\psi(p_i, A)) - \nu(\psi(p_{i-1}, A))) / (p_i - p_{i-1}).$$

Пусть теперь Ω имеет структуру абелевой группы относительно некоторой операции сложения образцов. Тогда последовательность $\{p_i\}, i = i_{\min}, \dots, i_{\max}$ порождает не только последовательность $\Psi(A) = \{\psi_i(A)\}_{i=i_{\min}, \dots, i_{\max}} = \{\psi(p_i, A)\}_{i=i_{\min}, \dots, i_{\max}}$, но и последовательность разностей

$$\Phi(A) = \{\phi_i(A)\}_{i=i_{\min}, \dots, i_{\max}} = \{\psi(p_{i_{\min}}, A), \psi(p_i, A) - \psi(p_{i-1}, A)\}_{i=i_{\min}+1, \dots, i_{\max}}. \tag{6}$$

Такую последовательность $\Phi(A)$ будем называть спектральным псевдоразложением для параметрического спектра (2), поскольку

$$A = \sum_{i=i_{\min}, \dots, i_{\max}} \varphi_i(A),$$

и о любом k -м элементе последовательности $\Psi(A)$ можно говорить, что он описывается суммой k элементов псевдоразложения $\Phi(A)$. Вообще, как известно, аддитивным разложением $A \in \Omega$ можно назвать любую последовательность $\{B_i \in \Omega\}$, такую, что её сумма с ростом количества последовательно суммируемых членов сходится к A . Однако псевдоразложение (6), как мы знаем, обладает дополнительным важным свойством – его частичные суммы сходятся к A монотонно – как в смысле возрастания меры

$$v\left(\sum_{i=i_{\min}, \dots, k} \varphi_i(A)\right),$$

так и в смысле убывания величины рассогласования с A по мере v :

$$v(A) - v\left(\sum_{i=i_{\min}, \dots, k} \varphi_i(A)\right).$$

В некоторых случаях такие спектральные псевдоразложения оказываются хорошо известными и полезными объектами. Например, в случае VI-1 последовательность операторов $\psi(p_i)$ представляет собой последовательность сглаживающих линейных фильтров с масштабируемым ядром. Разности таких сглаживающих фильтров (а значит, и разности их ядер), как известно, определяют вейвлет-преобразование [9]. Следовательно, $\Phi(A)$ здесь будет полным вейвлет-разложением образа A .

Но почему же предлагается называть $\Phi(A)$ спектральным псевдоразложением? Этим мы хотели бы подчеркнуть тот факт, что для подсчёта спектра (2) вычисление псевдоразложения $\Phi(A)$ (6) самостоятельной ценности не имеет – важнее вычислить $\Psi(A)$.

Однако можно указать важный частный случай, когда это не так, а именно если:

$$\begin{aligned} \forall i = i_{\min} + 1, \dots, i_{\max} : v(\varphi_i(A)) = \\ = \mu(p_i, A) - \mu(p_{i-1}, A). \end{aligned} \tag{7}$$

Псевдоразложения (6), для которых выполняется условие (7), мы будем называть спектральными разложениями. В этом случае спектр (2) может быть вычислен непосредственно по разложению $\Phi(A)$ как

$$DPS(p_i, A, v) = v(\varphi_i(A)) / (p_i - p_{i-1}). \tag{8}$$

Примером такого спектрального разложения является разложение Марагоса бинарного изображения A :

$$\begin{aligned} \varphi_i(A) = \text{Open}(A, B(r_i)) - \text{Open}(A, B(r_{i+1})), \\ r_i \geq 0. \end{aligned}$$

За счёт монотонности оператора открытия данное разложение является ортогональным разбиением:

$$\forall i \neq j : (\varphi_i(A), \varphi_j(A)) = 0;$$

$$\sum_{i=i_{\min}, \dots, i_{\max}} \varphi_i(A) = A.$$

Если выбрать в качестве меры v на Ω площадь ненулевой части бинарного изображения (L^1 -норму), то условие (7) окажется справедливым и для вычисления спектра можно использовать формулу (8).

В случае полутонового изображения разложение Марагоса уже не будет ортогональным, однако относительно L^1 -нормы условие (7) по-прежнему останется справедливым. Доказательство этого основывается на следующем рассуждении. Перейдём от двумерных полутоновых изображений $f(x, y)$ к их трёхмерным, зато бинарным «теням» [10]:

$$F(x, y, i) = \begin{cases} 1, & \text{если } f(x, y) \geq i; \\ 0, & \text{если } f(x, y) < i. \end{cases}$$

Легко показать, что L^1 -норма полутонового изображения $f(x, y)$ в точности равна L^1 -норме его «тени» $F(x, y, i)$. Также равны и L^1 -нормы разности двух изображений и разности их «теней». Однако если мы посмотрим на последовательность разностей «теней» монотонных операторов $\psi(p_i, f(x, y))$, то окажется, что они осуществляют такое же разбиение 3D пространства «тени», как мы ранее видели это для бинарных изображений в 2D. Поэтому разложение Марагоса с L^1 -нормой является спектральным разложением. Более того, из данного рассуждения следует:

Утверждение 1. Если $\psi(p_i)$ – монотонная, система операторов на $\Omega = R^n$ в смысле схемы IV и в качестве v выбрана L^1 -норма на Ω , то разложение (6) удовлетворяет условию (7).

Утверждение 2. Если $\psi(p_i)$ – монотонная, система проекторов на вложенные линейные подпространства $\Omega = R^n$ в смысле схемы VII→VI и в качестве v выбран квадрат L^2 -нормы («энергия сигнала») на Ω , то разложение (6) удовлетворяет условию (7).

Доказательство основано на том, что по теореме Пифагора квадрат L^2 -нормы любого вектора некоторого линейного пространства равен сумме квадрата L^2 -нормы его проекции на выбранное подпространство и квадрата L^2 -нормы разности вектора и его проекции. В выражении (6) образ $\psi(p_i, A)$ принадлежит пространству $M(p_i)$, образ $\psi(p_{i-1}, A)$ – его проекция на подпространство $M(p_{i-1})$, $\varphi(p_i, A) = \psi(p_i, A) - \psi(p_{i-1}, A)$ – разность вектора и его проекции. Следовательно, квадраты их норм подчиняются теореме Пифагора.

Возможно, есть и другие частные случаи, когда псевдоразложение (6) является разложением. Заметим, в частности, что ортогональные вейвлет-преобразования являются спектральными разложениями, а избыточные (неортогональные) – нет.

Заметим также, что способ анализа видеопоследовательностей, который мы называем «построением кратнорегрессионных псевдоспектров», следует ско-

рее называть пространственно-временным вейвлет-анализом. С точки зрения параметрических спектров здесь имеет место лишь псевдоразложение, да и от него мы используем небольшую часть. Хотя параметрический спектр на базе кратной регрессионной линейной фильтрации тут как раз можно было бы построить и исследовать.

5. Устойчивость параметрических спектров

Вопрос устойчивости параметрических спектров как описаний образов из Ω в общем виде нами не рассматривался. Но анализ частных случаев показывает, что такие спектры, как правило, устойчивы – нужно лишь выбрать подходящую метрику робастного сравнения.

В отдельной работе [11] мы рассмотрели вопросы устойчивости спектров Марагоса. Они оказались устойчивы при сравнении с помощью EMD-метрики.

Легко также показать устойчивость спектров на основе линейных сглаживающих преобразований (порождающих вейвлет-псевдоразложения). Пусть даны два изображения – f и g . Поскольку линейное преобразование $G(p_i)$ – сглаживающее, то оно не может увеличивать энергию сигнала, то есть

$$\begin{aligned} & \|G(p_i)f\| - \|G(p_i)g\| < \|G(p_i)f\| - \|G(p_i)g\| = \\ & = \|G(p_i)(f - g)\| \leq \|f - g\|. \end{aligned}$$

Определим L^∞ -метрику сравнения спектров $DPS(p_i, f, \|\cdot\|)$ и $DPS(p_i, g, \|\cdot\|)$ как максимальный модуль разности их значений:

$$\begin{aligned} d(DPS(f), DPS(g)) &= \\ &= \max_i |DPS(p_i, f) - DPS(p_i, g)|. \end{aligned}$$

Подставим:

$$\begin{aligned} DPS(p_i, f) - DPS(p_i, g) &= \\ &= (\|G(p_i)f\| - \|G(p_{i-1})f\|) / (p_i - p_{i-1}) - \\ & - (\|G(p_i)g\| - \|G(p_{i-1})g\|) / (p_i - p_{i-1}) = \\ &= ((\|G(p_i)f\| - \|G(p_i)g\|) + \\ & + (\|G(p_{i-1})g\| - \|G(p_{i-1})f\|)) / (p_i - p_{i-1}) \leq \\ & \leq 2\|f - g\| / (p_i - p_{i-1}). \end{aligned}$$

Пусть $(p_i - p_{i-1}) \geq \Delta p = \text{const}$.

$$\text{Тогда } d(DPS(f), DPS(g)) \leq (2 / \Delta p)\|f - g\|,$$

то есть малые изменения изображений вызывают малые изменения таких спектров, основанных на сглаживающей линейной фильтрации с переменным параметром сглаживания.

Заключение

В данной работе предложен обобщающий формализм «параметрических спектров» для описания всех спектров такого типа с единых позиций (рис. 2). Параметрический спектр представляет собой плотность распределения некоторой меры (численной характеристики) образа (изображения) по анализируемому параметру, от которого эта мера монотонно зависит. Проведена классификация параметрических спектров. Наиболее общим случаем параметрических спектров

являются спектры точности измерения от параметра разрешения. В качестве частных случаев они включают: спектры на основе операторов описания, спектры на основе операторов фильтрации, спектры на основе частичного порядка и монотонных операторов фильтрации, спектры на основе вложенных проекторов и расстояния, спектры на основе нормированных линейных пространств. Отдельно рассмотрен подкласс морфологических спектров, представляющих собой спектры точности реконструкции по параметру сложности описания. Этот подкласс включает, в частности, спектры на основе операторов описания со структурирующим параметром и спектры на основе фильтрации, состоящей из последовательных операций описания и реконструкции.

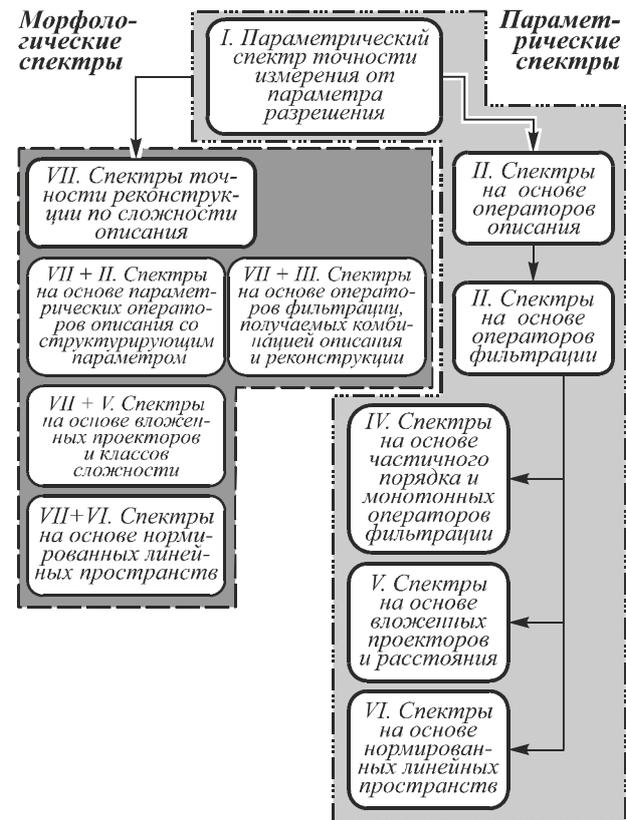


Рис. 2. Иерархия спектров

Показана связь параметрических спектров с соответствующими параметрическими разложениями.

Описанные в работе параметрические спектры могут использоваться:

- для описания распознаваемых (сравниваемых) объектов некоторыми нетривиальными содержательными наборами признаков;
- для адаптивной настройки алгоритмов фильтрации сигналов и изображений;
- для адаптивной настройки алгоритмов сегментации сигналов и изображений;
- для адаптивной кластеризации многомерных данных;
- для адаптивной настройки (регуляризации) классификаторов, получаемых различными методами машинного обучения.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 14-07-00914-а и 15-07-01323-А.

Литература

1. **Maragos, P.** Pattern Spectrum, Multiscale Shape Representation // Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on. – 1989, July. – Vol. 11, Issue 7. – P. 701-716.
2. **Serra, J.** Image Analysis and Mathematical Morphology / J. Serra. – London: Academic Press, 1982. – 610 p.
3. **Wilkinson, M.** Generalized pattern spectra sensitive to spatial information // Proceedings of 16th International Conference on Pattern Recognition. – 2002. – Vol. 1. – P. 21-24.
4. **Urbach, E.R.** Connected Shape-Size Pattern Spectra for Rotation and Scale-invariant Classification of Gray-scale Images / E.R. Urbach, J.B. Roerdink, M.H. Wilkinson // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (TPAMI) – 2007. – Vol. 29(2). – P. 272-285.
5. **Сидякин, С.В.** Построение морфологических спектров полутоновых изображений / С.В. Сидякин, Ю.В. Визильтер // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2012. – № 4. – С. 8-17.
6. **Визильтер, Ю.В.** Построение спектров морфологической сложности для двумерных фигур и изображений / Ю.В. Визильтер, С.В. Сидякин // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2012. – № 11. – С. 3-8.
7. **Вишняков, Б.В.** Построение кратнорегрессионных псевдоспектров для выделения и прослеживания объектов в системах видеонаблюдения / Ю.В. Визильтер, О.В. Выголов // Сборник докладов 15-й Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов». – М.: МАКС Пресс, 2011. – С. 463-466.
8. **Пытьев, Ю.П.** Методы морфологического анализа изображений / Ю.П. Пытьев, А.И. Чуличков. – М.: Физматлит, 2010. – 336 с.
9. **Добешин, И.** Десять лекций по вейвлетам / И. Добешин. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
10. **Сидякин, С.В.** Разработка алгоритмов построения морфологических спектров для анализа цифровых изображений и видеопоследовательностей: дисс. канд. тех. наук. – М.: ВЦ РАН, 2013. – 163 с.
11. **Dougherty, E.R.** The dual representation of gray-scale morphological filters // Proceedings of IEEE Computer Society

Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – San Diego, CA: 1989. – P. 172-177.

References

1. **Maragos, P.** Pattern Spectrum, Multiscale Shape Representation // Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on. – 1989, July. – Vol. 11, Issue 7. – P. 701-716.
2. **Serra, J.** Image Analysis and Mathematical Morphology / J. Serra. – London: Academic Press, 1982. – 610 p.
3. **Wilkinson, M.** Generalized pattern spectra sensitive to spatial information // Proceedings of 16th International Conference on Pattern Recognition. – 2002. – Vol. 1. – P. 21-24.
4. **Urbach, E.R.** Connected Shape-Size Pattern Spectra for Rotation and Scale-invariant Classification of Gray-scale Images / E.R. Urbach, J.B. Roerdink, M.H. Wilkinson // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (TPAMI) – 2007. – Vol. 29(2). – P. 272-285.
5. **Sidyakin, S.V.** Computation of morphological spectrum for grayscale images / S.V. Sidyakin, Yu.V. Vizilter // Herald of Computer and Information Technologies. – 2012. – Vol. 4. – P. 8-17. – (In Russian).
6. **Vizilter, Yu.V.** Morphological complexity spectrums of 2D figures and images / Yu.V. Vizilter, S.V. Sidyakin // Herald of Computer and Information Technologies. – 2012. – Vol. 11. – P. 3-8. – (In Russian).
7. **Vishnyakov, B.V.** Autoregression pseudo-spectra development for detection and tracking of objects in video surveillance system / B.V. Vishnyakov, Yu.V. Vizilter, O.V. Vigolov // Proceedings of 15th Conference on Mathematical Methods in Pattern Recognition. – Moscow: “MAKS Press” Publisher, 2011. – P. 463-466. – (In Russian).
8. **Pyatiev, Yu.P.** Methods of Morphological image analysis / Yu.P. Pyatiev, A.I. Chulichkov. – Moscow: “Fizmatlit” Publisher, 2010. – 336 p. – (In Russian).
9. **Daubechies, I.** Ten lectures on wavelets / I. Daubechies. – Izhevsk: SIC “Regular and Chaotic Dynamics” Publisher, 2001. – 464 p. – (In Russian).
10. **Sidyakin, S.V.** Morphological pattern spectra algorithm development for digital image and video sequences analysis // PhD Thesis. – Moscow: Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS (CC RAS), 2013. – 163 p. – (In Russian).
11. **Dougherty, E.R.** The dual representation of gray-scale morphological filters // Proceedings of IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – San Diego, CA: 1989. – P. 172-177.

PARAMETRICAL AND MORPHOLOGICAL SPECTRA

Yu.V. Vizilter, S.V. Sidyakin

FGUP “GosNIAS”

Abstract

A generic formalism of parametric spectra is proposed for describing all spectra of this type from a common viewpoint. The parametric spectrum represents the density of distribution of some pattern/image measure (numerical characteristic) over the parameter under analysis. The measure depends monotonically on the analyzed parameter. The classification of parametric spectra is made. The most general case of parametric spectra are the spectra of the measurement accuracy as a function of the resolution parameter. They include as special cases: spectra based on descriptors, spectra based on filtering, partial order spectra, spectra based on monotone filtering operators, spectra based on enclosed projectors and distance, spectra based on normalized linear spaces. A subclass of morphological spectra that represent reconstruction accuracy spectra by the description complexity parameter is considered. The connection between the parametrical spectra and relevant parametrical decompositions is shown.

Keywords: image morphology, pattern spectra.

Сведения об авторах

Сведения об авторе **Визильтер Юрий Валентинович** – см. стр. 107 этого номера.

Сидякин Сергей Владимирович, 1985 года рождения, в 2009 году окончил ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)». В 2013 году защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата технических наук. С 2009 года работает во ФГУП «ГосНИИ Авиационных систем» (ГосНИИАС). В настоящее время является начальником сектора «Анализ движения и видеонаблюдение». Является автором и соавтором 24 научных трудов (из них 9 статей в рецензируемых журналах из списка ВАК). Круг научных интересов: обработка изображений, распознавание образов, видеонаблюдение.

E-mail: sersid@bk.ru.

Sergey Vladimirovich Sidyakin (b.1985) graduated from Moscow Aviation Institute (National Research University) in 2009. In 2013 he received his candidates of Technical Sciences degree. He currently resides at the FGUP “GosNIAS”. Author of 24 scientific papers. Research interests are image and video analysis, pattern recognition, video surveillance.

Поступила в редакцию 25 ноября 2014г.