

## ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА, ОПТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

## НЕПАРАКСИАЛЬНЫЕ ВИХРЕВЫЕ ЛАЗЕРНЫЕ ПУЧКИ ХАНКЕЛЯ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ТИПОВ

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>, В.А. Сойфер<sup>1,2</sup><sup>1</sup> Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия,<sup>2</sup> Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия

## Аннотация

Рассмотрены новые решения непараксиального уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах, которые интерпретированы как непараксиальные скалярные вихревые пучки Ханкеля 1-го, 2-го и 3-го типов. Пучок Ханкеля 1-го типа низшего порядка (нулевого) совпадает со сферической волной. Они получают друг из друга с помощью дифференцирования. Расходимость пучка Ханкеля второго типа меньше расходимости пучка первого типа.

**Ключевые слова:** непараксиальное распространение, пучок Ханкеля, оптический вихрь, сферическая волна, расходимость пучка.

**Цитирование:** Котляр, В.В. Непараксиальные вихревые лазерные пучки Ханкеля первого и второго типов / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, В.А. Сойфер // Компьютерная оптика. – 2015. – Т. 39, № 3. – С. 299-304.

## Введение

В оптике известны лазерные пучки, которые описываются скалярными комплексными амплитудами, являющимися точными решениями непараксиального уравнения Гельмгольца. Это хорошо известные плоские и сферические волны [1], моды Бесселя [2], пучки Матвея [3], параболические лазерные пучки [4], а также полученные недавно пучки Ханкеля–Бесселя [5] и асимметричные моды Бесселя [6].

В [7] получены выражения для проекций векторов напряжённости электрического (Е-вектор) и магнитного (Н-вектор) полей электромагнитной волны. Все проекции Е- и Н-векторов выражены через три интеграла, которые представляют собой разложения по угловому спектру плоских волн. На основе проекций электромагнитного поля получены выражения для вектора Пойнтинга и плотности орбитального момента (ОМ). Заметим, что замкнутые аналитические выражения для ОМ до сих пор получены только для параксиальных пучков Лагерра–Гаусса [8] и для векторных пучков Бесселя [9].

В этой работе рассмотрены новые непараксиальные вихревые пучки, комплексная амплитуда которых описывается функцией Ханкеля полуцелого порядка, поэтому эти пучки названы пучками Ханкеля. Пучок Ханкеля низшего порядка (нулевого) совпадает со сферической волной. Рассмотрены 3 типа таких пучков, которые получают друг из друга с помощью взятия производных. Рассмотренные лазерные пучки можно сформировать с помощью жидкокристаллического микродисплея и применять для оптического захвата и вращения диэлектрических микрообъектов.

**Скалярные непараксиальные сильно расходящиеся пучки Ханкеля**

Известно, что комплексная амплитуда непараксиального стационарного светового поля  $E(x, y, z)$ , удовлетворяющего уравнению Гельмгольца, может быть представлена в виде углового спектра плоских волн

$$E(x, y, z) = \iint_{\mathbb{R}^2} A(\xi, \eta) \times \exp\left[ik(\xi x + \eta y) + ikz\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}\right] d\xi d\eta, \quad (1)$$

где  $k$  – волновое число монохроматического света,  $A(\xi, \eta)$  – комплексная амплитуда углового спектра плоских волн. В полярных координатах  $(r, \varphi)$  выражение (1) примет вид:

$$E(r, \varphi, z) = \iint_{\mathbb{R}^2} A(\rho, \theta) \times \exp\left[ikr\rho \cos(\theta - \varphi) + ikz\sqrt{1 - \rho^2}\right] \rho d\rho d\theta, \quad (2)$$

где  $(\rho, \theta)$  – полярные координаты в Фурье-плоскости. Если амплитуду спектра плоских волн выбрать в виде

$$A(\rho, \theta) = \frac{\rho^n}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \exp(in\theta), \quad (3)$$

то вместо (2) можно записать:

$$E_{1,n}(r, \varphi, z) = 2\pi i^n \exp(in\varphi) \times \int_0^\infty \frac{\rho^{n+1}}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \exp(-kz\sqrt{\rho^2 - 1}) J_n(kr\rho) d\rho, \quad (4)$$

где  $J_n(x)$  – функция Бесселя  $n$ -го порядка первого рода. Интеграл в (4) является справочным интегралом [10], и вместо (4) можно записать:

$$E_{1,n}(r, \varphi, z) = i^{n-1} \pi \sqrt{\lambda} \frac{r^n}{(r^2 + z^2)^{(2n+1)/4}} \times \times H_{n+1/2}^{(2)}\left(k\sqrt{r^2 + z^2}\right) \exp(in\varphi), \quad (5)$$

где  $H_v^{(2)}(x) = J_v(x) - iY_v(x)$  – функция Ханкеля,  $Y_v(x)$  – функция Неймана. Пучки (5) назовём пучками Ханкеля 1-го типа (Х1-пучки). Пучок Ханкеля (5) представляет собой линейный оптический вихрь  $(x + iy)^n$ , внедрённый в обобщённую сферическую

волну  $\psi_{n+1/2}(R) = H_{n+1/2}^{(2)}(kR)R^{-n-1/2}$ , где  $R = (r^2 + z^2)^{1/2}$ . Функция  $\psi(R)$  зависит только от расстояния до центра системы координат  $R$ , поэтому её можно назвать обобщённой сферической волной. Амплитуда (5) имеет особую точку при  $r = z = 0$ , в которой она равна бесконечности. Можно показать, что амплитуда X1-пучка при  $n = 0, 1$  связана с амплитудой сферической волны. Фундаментальный X1-пучок (при  $n = 0$ ) совпадает со сферической волной, исходящей из начала координат:

$$E_{1,0} = -i\pi\sqrt{\lambda} \frac{H_{1/2}^{(2)}(kR)}{R^{1/2}} = 2\pi \frac{e^{-ikR}}{kR}, \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}. \quad (6)$$

При  $n = 1$  получим производную сферической волны с «внедрённым» на оси линейным оптическим вихрем:

$$\begin{aligned} E_{1,1} &= \pi\sqrt{\lambda} (re^{i\varphi}) \frac{H_{3/2}^{(2)}(kR)}{R^{3/2}} = \\ &= -2\pi \left( \frac{re^{i\varphi}}{kR} \right) \frac{d}{dR} \left( \frac{e^{-ikR}}{kR} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Пучки Ханкеля 2-го типа можно получить, дифференцируя комплексную амплитуду (5) по координате  $z$  (и умножая на  $k^{-1}$  для сохранения размерности):

$$\begin{aligned} E_{2,n}(r, \varphi, z) &= 2\pi i^n k^{-1} \exp(in\varphi) \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_0^\infty \frac{\rho^{n+1}}{\sqrt{\rho^2 - 1}} \exp(-kz\sqrt{\rho^2 - 1}) J_n(kr\rho) d\rho \right\} = \\ &= -2\pi i^n \exp(in\varphi) \times \\ &\times \int_0^\infty \rho^{n+1} \exp(-kz\sqrt{\rho^2 - 1}) J_n(kr\rho) d\rho. \end{aligned} \quad (8)$$

Интеграл в (8) тоже справочный [10], хотя можно напрямую дифференцировать правую часть равенства в (5) и воспользоваться рекуррентными соотношениями для цилиндрических функций. Вместо (8) получим:

$$\begin{aligned} E_{2,n}(r, \varphi, z) &= i^{n+1} \pi \sqrt{\lambda} \times \\ &\times \frac{zr^n}{(\sqrt{r^2 + z^2})^{n+3/2}} H_{n+3/2}^{(2)}(k\sqrt{r^2 + z^2}) \exp(in\varphi). \end{aligned} \quad (9)$$

Пучки (9) назовём пучками Ханкеля 2-го типа (X2-пучки). Эти пучки так же, как и X1-пучки, по структуре являются обобщёнными сферическими волнами с внедрёнными линейными оптическими вихрями. Отличие только в том, что функция  $\psi(R)$  имеет несколько другой вид  $\psi_{n+3/2}(R) = H_{n+3/2}^{(2)}(kR)R^{-n-3/2}$ , и в начальной плоскости ( $z = 0$ ) амплитуда (9) отлична от нуля только в начале координат.

Используя известную приближённую формулу для больших значений аргументов функций Ханкеля

$$H_\nu^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} i^{\nu+1/2} \exp(-ix), \quad x \gg 1, \quad (10)$$

можно получить асимптотические зависимости для X1- и X2-пучков:

$$\begin{cases} |E_1| \sim r^{-1}, & r \gg z, \\ |E_1| \sim \frac{r^n}{z^{n+1}}, & r \ll z, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} |E_2| \sim r^{-2}, & r \gg z, \\ |E_2| \sim \frac{r^n}{z^{n+1}}, & r \ll z. \end{cases} \quad (12)$$

Из (12) видно, что интенсивность обоих типов пучков при фиксированном  $z$  и с ростом  $r$  растёт как  $r^n$  вблизи оптической оси (это характерное поведение для вихревого пучка), но при больших  $r$  интенсивность X2-пучков спадает быстрее (пропорционально  $r^{-4}$ ), чем интенсивность X1-пучков (спадает как для сферической волны пропорционально  $r^{-2}$ ). Это означает, что у разных типов пучков Ханкеля разная расходимость. Расходимость обоих типов пучков Ханкеля можно оценить при больших  $z$ . Она линейно зависит от  $z$ . Действительно, интенсивность X1-пучков (5) равна:

$$\begin{aligned} I_1(r, z) &= 2\pi^3 \frac{(kr)^{2n}}{(kD)^{2n+1}} [J_{n+1/2}^2(kD) + Y_{n+1/2}^2(kD)] \approx \\ &\approx 2\pi^3 \frac{(kr)^{2n}}{(kD)^{2n+1}} \frac{2}{\pi kD} = \lambda^2 r^{2n} D^{-2n-2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $D = \sqrt{r^2 + z^2}$ . В (13) при получении приближённого равенства воспользовались известной асимптотикой функций Бесселя и Неймана. Дифференцируя (13) по радиальной переменной  $r$  и приравнявая нулю, получим:

$$\frac{\partial I_1}{\partial r} = 0 \Rightarrow r = z\sqrt{n}. \quad (14)$$

Из (14) видно, что радиус максимума интенсивности вихревых X1-пучков ( $n > 0$ ) линейно зависит от продольной координаты  $z$  и пропорционален корню квадратному из топологического заряда оптического вихря. Поступая аналогично для X2-пучков, найдём интенсивность при больших  $z$ :

$$\begin{aligned} I_2(r, z) &= 2\pi^3 (kz)^2 (kr)^{2n} (kD)^{-2n-3} \times \\ &\times [J_{n+3/2}^2(kD) + Y_{n+3/2}^2(kD)] \approx \\ &\approx 2\pi^3 \frac{(kz)^2 (kr)^{2n}}{(kD)^{2n+3}} \frac{2}{\pi kD} = \lambda^2 z^2 r^{2n} D^{-2n-4}, \end{aligned} \quad (15)$$

и приравняв к нулю её производную, получим:

$$\frac{\partial I_2}{\partial r} = 0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{n}{2}} z. \quad (16)$$

Из сравнения (14) и (16) видно, что расходимость X2-пучков в  $\sqrt{2}$  раз меньше, чем расходимость X1-пучков. Примерно можно сказать, что X1-пучки при  $n = 1$  расходятся в угле 45 градусов, а X2-пучки – в угле 32 градуса. С ростом номера  $n$  углы расходимости увеличиваются.

При любом  $z$  точно найти зависимость радиуса максимальной интенсивности можно для X1-пучка с  $n = 1$ . В этом случае интенсивность имеет вид

$$I_1(r, z) = \pi^2 \lambda r^2 D^{-3} \left[ J_{3/2}^2(kD) + Y_{3/2}^2(kD) \right] = (2\pi)^2 k^2 r^2 \left[ \frac{1}{(kD)^6} + \frac{1}{(kD)^4} \right]. \tag{17}$$

Приравнивая к нулю производную интенсивности (17) по переменной  $r$ , получим:

$$\frac{\partial I_1}{\partial r} = 0 \Rightarrow r = k^{-1} \sqrt{\sqrt{1 + (kz)^2} + (kz)^4} - 1. \tag{18}$$

На рис. 1 показаны интенсивность (а, з), фаза (б, д) и радиальное сечение интенсивности (в, е) для X1-пучка с топологическим зарядом  $n = 1$  на расстояниях  $z = \lambda$  (а, б, в) и  $z = 5\lambda$  (з, д, е). По горизонтальной оси на рис. 1 отложена радиальная координата в длинах волн.

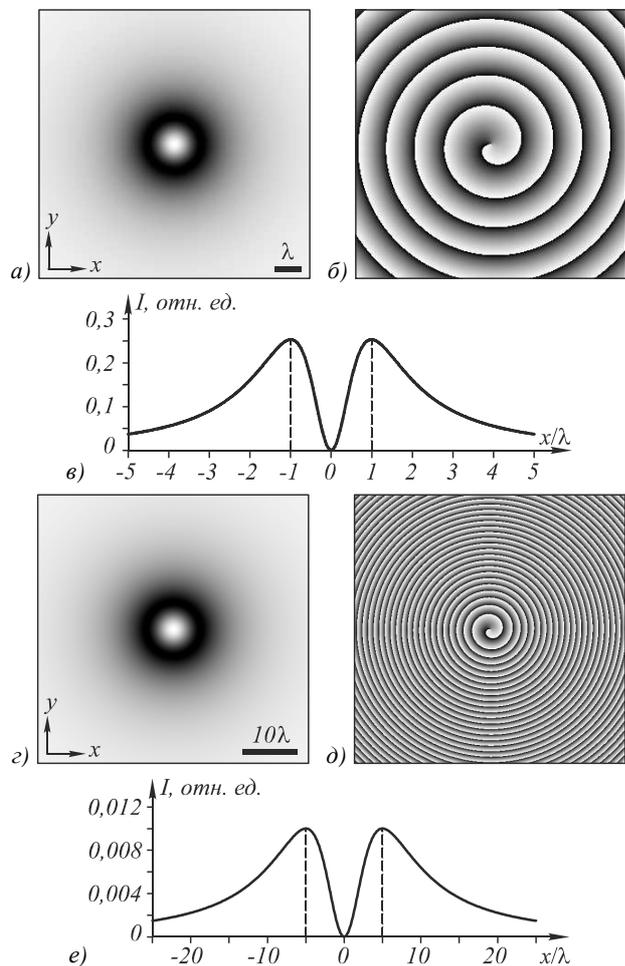


Рис. 1. Интенсивность (негатив) (а, з), фаза (б, д) и радиальное сечение интенсивности (в, е) для X1-пучка с топологическим зарядом  $n = 1$  на расстояниях  $z = \lambda$  (а, б, в) и  $z = 5\lambda$  (з, д, е)

Вертикальными линиями на рис. 1в и рис. 1е показаны максимумы интенсивности в сечении, радиусы которых можно точно найти по формуле (18). Например, для сечения на рис. 1в радиус максимальной ин-

тенсивности равен  $r = 0,994\lambda$ . То есть не только в дальней зоне (14), но и в ближней зоне расходимость X1-пучка ( $n = 1$ ) равна 45 градусам.

Заметим, что у обоих типов пучков нет боковых лепестков. Известны статьи [11–13], в которых специальными методами уменьшают контраст боковых лепестков лазерных оптических вихрей, чтобы эффективно использовать их для оптического захвата микрообъектов. В данном случае в этом нет необходимости, так как пучки Ханкеля распространяются без боковых лепестков.

На рис. 2 показаны интенсивность (а, з), фаза (б, д) и радиальное сечение интенсивности (в, е) для X1-пучка (а, б, в) и X2-пучка (з, д, е) с топологическими зарядами  $n = 5$  на расстоянии  $z = 5\lambda$ . Из рис. 2в и 2е можно видеть, что расходимость у X1-пучка больше, чем у X2-пучка при одинаковых топологических зарядах. Радиус максимальной интенсивности на рис. 2в равен  $11\lambda$ , а на рис. 2е –  $7,9\lambda$ .

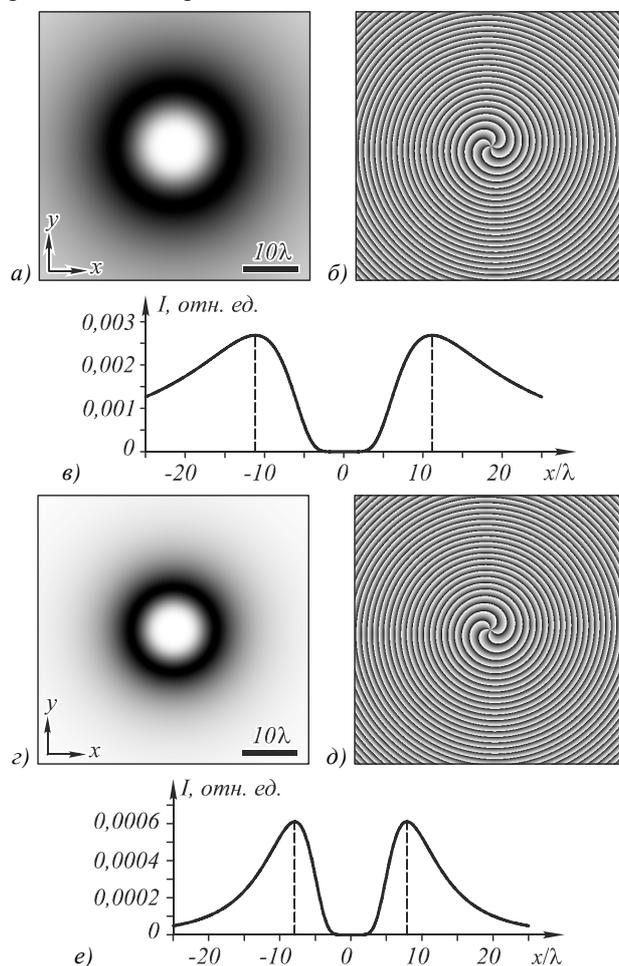


Рис. 2. Интенсивность (а, з), фаза (б, д) и радиальное сечение интенсивности (в, е) для X1-пучка (а, б, в) и X2-пучка (з, д, е) с топологическими зарядами  $n = 5$  на расстоянии  $z = 5\lambda$

Аналогично, как из амплитуды X1-пучка (5), с помощью дифференцирования (8) был получен X2-пучок (9), так же из X2-пучка дифференцированием по  $z$  можно получить пучки Ханкеля 3-го типа (X3-пучки):

$$E_{3,n}(r, \varphi, z) = i^{n-1} \pi \sqrt{\lambda} k^{-1} r^n \exp(in\varphi) \times \left[ \frac{kz^2 H_{n+5/2}^{(2)}(k\sqrt{r^2+z^2})}{(r^2+z^2)^{(2n+5)/4}} - \frac{H_{n+3/2}^{(2)}(k\sqrt{r^2+z^2})}{(r^2+z^2)^{(2n+3)/4}} \right]. \quad (19)$$

Заметим, что у всех пучков Ханкеля (5), (9) и (19) один и тот же топологический заряд  $n$ , хотя радиальная структура пучков описывается функциями Ханкеля разных порядков. Это означает, что хотя нормированный на единицу мощности (или на один фотон) орбитальный угловой момент (ОУМ) этих пучков одинаковый (он равен топологическому заряду), но ненормированный ОУМ будет больше у пучка Ханкеля с большей плотностью мощности. Например, из сравнения рис. 2в и 2е видно, что максимальная интенсивность для Х2-пучка в два с лишним раза больше, чем максимальная интенсивность Х1-пучка. Поэтому плотность ОУМ на светлом кольце Х2-пучка будет во столько же раз больше, чем плотность ОУМ на светлом кольце Х1-пучка.

Процесс взятия производных по  $z$  от амплитуды пучков Ханкеля можно продолжить, получая пучки Ханкеля более высоких типов. Но для дальнейшего достаточно было получить только три комплексных амплитуды (5), (9) и (19), через которые выражаются компоненты электромагнитного поля векторного пучка Ханкеля [7].

### Заключение

Получены в явном виде комплексные амплитуды непараксиальных скалярных сильно расходящихся вихревых лазерных пучков Ханкеля 1-го (5), 2-го (9) и 3-го (19) типов. Все три типа пучков имеют одинаковый целый топологический заряд, но разную зависимость амплитуды от радиальной координаты. Все три типа пучков Ханкеля получаются друг из друга дифференцированием их амплитуды по продольной координате. Интенсивность всех трёх типов пучков Ханкеля имеет радиальную симметрию (в виде «пончика») и не имеет боковых лепестков. Расходимость пучка Ханкеля второго типа меньше расходимости пучка первого типа. Эти пучки не являются модами свободного пространства, так как при распространении меняется распределение интенсивности в сечении пучка, но структура интенсивности (кольцевой вид интенсивности без боковых лепестков) сохраняется.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-3970.2014.9), а также грантов РФФИ 13-07-97008, 14-29-07133, 14-07-31092, 15-07-01174, 15-37-20723 и 15-47-02492.

### Литература

1. **Born, M.** Principles of Optics / M. Born, E. Wolf; 6 ed. – Pergamon, 1986.
2. **Durnin, J.** Diffraction-free beams / J. Durnin, J.J. Miceli, J.H. Eberly // Physical Review Letters. – 1987. – Vol. 58. – P. 1499-1501.

3. **Gutierrez-Vega, J.C.** Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams / J.C. Gutierrez-Vega, M.D. Iturbe-Castillo, S. Chavez-Cerda // Optics Letters. – 2000. – Vol. 25, Issue 20. – P. 1493-1495.
4. **Bandres, M.A.** Parabolic nondiffracting optical wave fields / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega, S. Chavez-Cedra // Optics Letters. – 2004. – Vol. 29, Issue 1. – P. 44-46.
5. **Kotlyar, V.V.** Hankel-Bessel laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // Journal of the Optical Society of America A. – 2012. – Vol. 29, Issue 5. – P. 741-747.
6. **Kotlyar, V.V.** Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // Optics Letters. – 2014. – Vol. 39, Issue 8. – P. 2395-2398.
7. **Cerjan, A.** Orbital angular momentum of Laguerre-Gaussian beams beyond the paraxial approximation / A. Cerjan, C. Cerjan // Journal of the Optical Society of America A. – 2011. – Vol. 28, Issue 11. – P. 2253-2260.
8. **Allen, L.** Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. / L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman // Physical Review A. – 1992. – Vol. 45. – P. 8185-8189.
9. **Volke-Sepulveda, K.** Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam / K. Volke-Sepulveda, V. Garcés-Chavez, S. Chavez-Cedra, J. Arlt, K. Dholakia // Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics. – 2002. – Vol. 4. – P. S82-S89.
10. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1981. – 798 с.
11. **Guo, C.S.** Optimal annulus structures of optical vortices / C.S. Guo, X. Liu, J.L. He, and H.T. Wang // Optics Express. – 2004. – Vol. 12. – P. 4625-4634.
12. **Kotlyar, V.V.** Sidelobe contrast reduction for optical vortex beams using a helical axicon / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer, C.S. Tuvey, and J.A. Davis // Optics Letters. – 2007. – Vol. 32. – P. 921-923.
13. **Guo, J.** Analysis of optical vortices with suppressed sidelobes using modified Bessel-like function and trapezoid annulus modulation structures / J. Guo, Z. Wei, Y. Liu, A. Huang // Journal of the Optical Society of America A. – 2015. – Vol. 32, Issue 2. – P. 195-203.

### References

- [1] Born M, Wolf E. Principles of Optics 6 ed. New York: Pergamon; 1986.
- [2] Durnin J, Miceli JJ, Eberly JH. Diffraction-free beams. Physical Review Letters 1987; 58: 1499-501.
- [3] Gutierrez-Vega JC, Iturbe-Castillo MD, Chavez-Cerda S. Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams. Optics Letters 2000; 25(20): 1493-5.
- [4] Bandres MA, Gutierrez-Vega JC, Chavez-Cedra S. Parabolic nondiffracting optical wave fields. Optics Letters 2004; 29(1): 44-6.
- [5] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA. Hankel-Bessel laser beams. Journal of the Optical Society of America A 2012; 29(5): 741-7.
- [6] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA. Asymmetric Bessel modes. Optics Letters 2014; 39(8): 2395-8.
- [7] Cerjan A, Cerjan C. Orbital angular momentum of Laguerre-Gaussian beams beyond the paraxial approximation. Journal of the Optical Society of America A 2011; 28(11): 2253-60.
- [8] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. Physical Review A 1992; 45: 8185-9.

- [9] Volke-Sepulveda K, Garcés-Chavez V, Chavez-Cedra S, Arlt J, Dholakia K. Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* 2002; 4: S82-9.
- [10] Prudnikov AP, Brychkov YuA, Marichev OI. *Integrals and Series, Vol. 2, Special Functions*. New York: Gordon & Breach Sci. Publ.; 1990.
- [11] Guo CS, Liu X, He JL, Wang HT. Optimal annulus structures of optical vortices. *Optics Express* 2004; 12: 4625-34.
- [12] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA, Tuvey CS, Davis JA. Sidelobe contrast reduction for optical vortex beams using a helical axicon. *Optics Letters* 2007; 32: 921-3.
- [13] Guo J, Wei Z, Liu Y, Huang A. Analysis of optical vortices with suppressed sidelobes using modified Bessel-like function and trapezoid annulus modulation structures. *Journal of the Optical Society of America A* 2015; 32(2): 195-203.

## NONPARAXIAL HANKEL VORTEX BEAMS OF THE FIRST AND SECOND TYPES

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>, V.A. Soifer<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> *Image Processing Systems Institute, Samara, Russia,  
Russian Academy of Sciences,*

<sup>2</sup> *Samara State Aerospace University, Samara, Russia*

### Abstract

We consider new solutions of the nonparaxial Helmholtz equation in the cylindrical coordinates, which are treated as nonparaxial scalar vortex Hankel beams of the 1st, 2nd and 3rd types. The beams can be obtained from each other by differentiation. Higher-order types of Hankel beams show lower divergence than the lower-order types. The lowest- (zero-) order Hankel beam of the first type represents a spherical wave.

**Keywords:** nonparaxial propagation, Hankel beam, optical vortex, spherical wave, beam divergence.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA. Nonparaxial Hankel vortex beams of the first and second types. *Computer Optics* 2015; 39(3): 299-304.

### Сведения об авторах

**Котляр Виктор Викторович**, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ). В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств.

**Victor Victorovich Kotlyar** is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute (Samara) of the Russian Academy of Sciences and professor of Computer Science department at Samara State Aerospace University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in physics and mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices.

**Ковалёв Алексей Андреевич**, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН. В списке научных работ более 80 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: [alanko@smr.ru](mailto:alanko@smr.ru).

**Alexey Andreevich Kovalev** (b. 1979), graduated (2002) from S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree (2012). He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences (IPSI RAS). He is co-author of more than 80 scientific papers. Research interests are mathematical diffraction theory, photonic crystal devices.

**Сойфер Виктор Александрович** – член-корреспондент РАН, доктор технических наук, директор Института систем обработки изображений РАН. Лауреат государственной премии и премии правительства РФ в области науки и техники. Диплом инженера получил в Куйбышевском авиационном институте (ныне Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва) в 1968 году. Докторскую диссер-

тацию защитил в 1979 году в Санкт-Петербургском государственном электротехническом университете «ЛЭТИ». Автор и соавтор значительного числа научных публикаций с высоким индексом цитируемости, 10 книг и 50 авторских свидетельств и патентов.

E-mail: [soifer@ssau.ru](mailto:soifer@ssau.ru).

**Victor Alexandrovich Soifer** is a corresponding member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Doctor of Engineering, Professor, and director of the Image Processing Systems Institute (IPSI) of the RAS. He is the recipient of the State Prize of the Russian Federation and the RF government prize in Science and Technology. He was awarded an Engineer qualification (1968) by Kuibyshev Aviation Institute (KuAI, presently, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov, SSAU). He received a Doctor in Engineering degree (1979) from Saint Petersburg State Electrotechnical University «LETI» (ETU). He is a SPIE- and IAPR-member. He is the author and coauthor of a substantial number of scientific publications with high citation index, 10 books, and 50 author's certificates and patents.

---

*Поступила в редакцию 18 июня 2015 г.  
Окончательный вариант – 1 июля 2015 г.*