

РАСЧЁТ ЗЕРКАЛА ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ЗАДАННОГО НЕПРЕРЫВНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОСВЕЩЁННОСТИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА СОГЛАСОВАННЫХ КВАДРИК

Л.Л. Досколович^{1,2}, К.В. Борисова^{1,2}, М.А. Моисеев^{1,2}

¹ Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия,

² Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия

Аннотация

Предложен метод расчёта зеркал, формирующих заданное непрерывное распределение освещённости в двумерной области. В рамках метода поверхность зеркала представляется в виде огибающей двухпараметрического семейства эллипсоидов. Работоспособность метода проиллюстрирована примерами расчёта зеркал, формирующих постоянную освещённость в областях различной формы.

Ключевые слова: геометрическая оптика, обратная задача, эйконал, метод согласованных квадрик.

Цитирование: Досколович, Л.Л. Расчёт зеркала для формирования заданного непрерывного распределения освещённости на основе метода согласованных квадрик / Л.Л. Досколович, К.В. Борисова, М.А. Моисеев // Компьютерная оптика. – 2015. – Т. 39, № 3. – С. 347-356.

Введение

Задача расчёта отражающей или преломляющей оптической поверхности из условия формирования заданного распределения освещённости в некоторой плоскости относится к классу обратных задач неизображающей оптики. Данная задача является крайне сложной и сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка типа уравнения Монжа–Ампера. Методы расчёта оптических поверхностей, основанные на «прямом» численном решении уравнения данного типа, появились только в последние годы [1, 2]. В [1, 2] решение исходного нелинейного дифференциального уравнения сводится к решению системы нелинейных уравнений большой размерности (система содержит от нескольких тысяч до нескольких десятков тысяч нелинейных уравнений).

В общем случае для решения данной обратной задачи используются различные итерационные методы [3–12]. Среди указанных итерационных методов особо следует выделить метод «согласованных квадрик» (supporting quadric method), предназначенный для расчёта зеркал или преломляющих оптических элементов, формирующих дискретные распределения освещённости в виде набора точек [9–12]. В зависимости от задачи в качестве квадрик используются параболоиды, эллипсоиды или гиперболоиды. В частности, в задаче расчёта зеркал поверхность зеркала представляется набором сегментов эллипсоидов или параболоидов (задача формирования дискретной диаграммы направленности). Расчёт параметров эллипсоидов (параболоидов) осуществляется итерационным методом, при этом сходимость метода строго доказана [10, 11]. Основными достоинствами метода согласованных квадрик (МСК) являются его универсальность и возможность формирования сложных дискретных изображений [12].

При решении светотехнических задач обычно требуется формирование непрерывных распределений в областях простой формы (прямоугольник, эллипс и т.п.). В работах [13, 14] МСК использовался для расчёта зеркал и преломляющих поверхностей, формирующих задан-

ные непрерывные распределения освещённости. В частности, в [13] МСК применялся для определения вида функции лучевого соответствия (source-target map) в задаче расчёта зеркала для формирования постоянной освещённости в прямоугольной области. Функция лучевого соответствия определяет связь между угловыми координатами лучей, вышедших из источника, и декартовыми координатами точек прихода этих лучей (после отражения от зеркала) в выходную плоскость, где требуется формирование заданного распределения освещённости. Поскольку область излучения источника, как правило, задаётся некоторым телесным углом, то функция лучевого соответствия описывает некоторое отображение области на единичной сфере в заданную область в выходной плоскости. В [13] функция лучевого соответствия в задаче формирования непрерывного распределения освещённости определялась на основе непрерывной аппроксимации дискретного отображения, рассчитанного методом согласованных квадрик. По мнению авторов данной работы, недостатком метода [13] является необходимость восстановления поверхности зеркала по рассчитанной функции лучевого соответствия. В общем случае данная задача сводится к решению системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

В [14] МСК использовался для расчёта начального приближения при численном решении уравнения Монжа–Ампера. Как отмечено выше, решение данного уравнения сводится к решению системы нелинейных уравнений большой размерности. Решение такой системы остаётся задачей высокой вычислительной сложности.

В настоящей работе предложен новый метод расчёта отражающей поверхности, формирующей требуемое распределение освещённости в заданной двумерной области. В рамках метода поверхность зеркала представляется в виде двухпараметрического семейства эллипсоидов, у которых первые фокусы совпадают с источником излучения, а вторые фокусы принадлежат области, в которой необходимо сформировать заданное распределение освещённости. В работе показано, что такое

представление поверхности является предельным случаем сегментированной поверхности, используемой в МСК для фокусировки в набор точек (точки фокусировки расположены в узлах прямоугольной сетки, аппроксимирующей заданную область). Огибающая поверхность имеет простой аналитический вид и зависит от функции, определяющей длины осей эллипсоидов семейства. При показателе преломления среды $n=1$ данная непрерывная функция соответствует распределению эйконала в области фокусировки. Функция эйконала определяет распределение освещённости, формируемое в освещаемой области. Расчёт непрерывной функции осуществляется на основе непрерывной аппроксимации дискретной функции эйконала, полученной из решения дискретной задачи фокусировки в набор точек (точки фокусировки расположены в узлах прямоугольной сетки, аппроксимирующей заданную область). Работоспособность предложенного метода проиллюстрирована на примерах расчёта зеркал для формирования постоянной освещённости в областях различной формы.

1. Представление поверхности зеркала

Рассмотрим задачу расчёта зеркала для формирования заданного распределения освещённости. Будем считать, что точечный источник излучения расположен в начале координат и излучает в пределах телесного угла Ω , соответствующего конусу с углом при вершине $2\psi_{\max}$ (рис. 1).

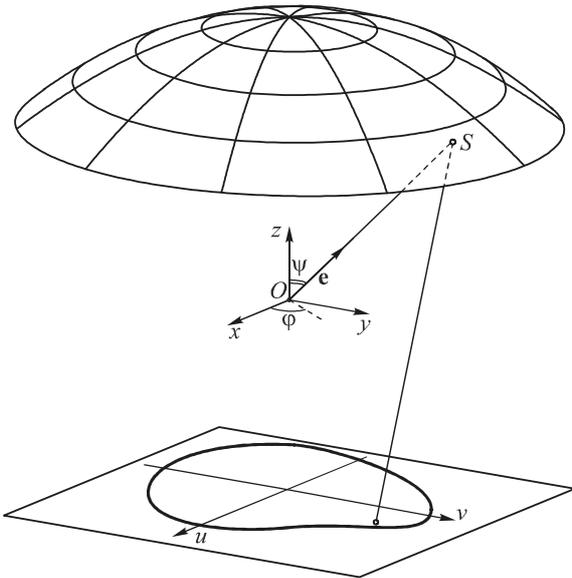


Рис. 1. Взаимное расположение зеркала, источника света и выходной плоскости

Интенсивность источника определяется функцией $I(\varphi, \psi)$, где $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\psi \in [0, \psi_{\max}]$ – углы сферической системы координат. Излучение от источника падает на зеркало, поверхность которого задаётся вектор-функцией $\mathbf{S}(\varphi, \psi)$. Задача состоит в расчёте функции $\mathbf{S}(\varphi, \psi)$ из условия формирования заданного распределения освещённости $E(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in G$, задан-

ного в плоскости $z = f$ ($f < 0$), где $\mathbf{u} = (u, v)$ – декартовы координаты в этой плоскости (рис. 1).

Рассмотрим сначала зеркало для фокусировки сферического пучка от источника в точку $\mathbf{X}(u, v) = (u, v, f)$ из области G . Такое зеркало является эллипсоидом с фокусами в начале координат (точка расположения источника) и в точке фокусировки $\mathbf{X}(u, v)$. В сферических координатах (φ, ψ) уравнение эллипсоида может быть представлено в виде [10]:

$$\mathbf{S}(\varphi, \psi; u, v) = \mathbf{e}(\varphi, \psi) \cdot l(\varphi, \psi; u, v), \tag{1}$$

где

$$l(\varphi, \psi; u, v) = \frac{p(u, v)}{1 - \varepsilon(u, v)(\mathbf{e}(\varphi, \psi), \mathbf{q}(u, v))} \tag{2}$$

– расстояние от точечного источника до точки эллипсоида по направлению единичного вектора $\mathbf{e}(\varphi, \psi) = (\cos(\varphi) \sin(\psi), \sin(\varphi) \sin(\psi), \cos(\psi))$,

$p(u, v) = (\Psi^2(u, v) - \mathbf{X}^2(u, v)) / 2\Psi(u, v)$ – фокальный параметр эллипсоида, $\Psi(u, v)$ – длина большой оси,

$\varepsilon(u, v) = |\mathbf{X}(u, v)| / \Psi(u, v)$ – эксцентриситет,

$\mathbf{q}(u, v) = \mathbf{X}(u, v) / |\mathbf{X}(u, v)|$ – единичный вектор направления на точку фокусировки. Отметим, что координаты точки фокусировки (u, v) в (1), (2) рассматриваются как параметры.

Существует бесконечное множество эллипсоидов, фокусирующих излучение от источника в точку $\mathbf{X}(u, v)$. В качестве параметра, выделяющего конкретный эллипсоид, будем использовать длину большой оси $\Psi(u, v)$. Отметим, что при показателе преломления среды $n = 1$ длина большой оси эллипсоида определяет эйконал в точке фокусировки. При заданном значении $\Psi(u, v)$ значения эксцентриситета и фокального параметра определяются по вышеприведённым формулам.

Далее рассмотрим расчёт зеркала, отражающего лучи из источника в область G , в которой должно быть сформировано требуемое распределение освещённости. Такое зеркало является огибающей семейства эллипсоидов (1), (2) по параметрам $(u, v) \in G$. Действительно, по определению огибающая поверхность касается каждого из эллипсоидов семейства в некоторой точке. Поскольку направления нормалей огибающей поверхности и соответствующего эллипсоида в точке касания совпадают, то отражённый луч будет направлен в область G , в которой расположен второй фокус эллипсоида. Уравнение огибающей поверхности определяется системой уравнений, включающей уравнение эллипсоида (1) и следующие два уравнения [15 – 17]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}, \left[\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \psi} \right] \right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}, \left[\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \psi} \right] \right) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Отметим, что условия равенства нулю смешанных произведений векторов в уравнениях (3) соответствуют условиям перпендикулярности нормального вектора эллипсоида $\mathbf{N} = \left[\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \psi} \right]$ и касательных к

координатным линиям огибающей поверхности $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}$ и

$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}$. Подставляя (1), (2) в (3), несложно преобразовать уравнения (3) к виду [15, 16]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\varphi, \psi; u, v)}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial l(\varphi, \psi; u, v)}{\partial v} &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где функция $l(\varphi, \psi; u, v)$ имеет вид (2). Интересно отметить, что уравнения (4) являются необходимым условием экстремума функции $l(\varphi, \psi; u, v)$ по переменным (u, v) при фиксированных значениях переменных (φ, ψ) . Данное условие позволяет представить огибающую поверхность в переменных (u, v) в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\varphi, \psi) &= \\ &= \mathbf{e}(\varphi, \psi) \cdot \frac{p(\mathbf{u}(\varphi, \psi))}{1 - \varepsilon(\mathbf{u}(\varphi, \psi))(\mathbf{e}(\varphi, \psi), \mathbf{q}(\mathbf{u}(\varphi, \psi)))}, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\mathbf{u}(\varphi, \psi) = \arg \min_{(u, v) \in G} l(\varphi, \psi; u, v), \tag{6}$$

или

$$\mathbf{u}(\varphi, \psi) = \arg \max_{(u, v) \in G} l(\varphi, \psi; u, v). \tag{7}$$

Уравнения (5)–(7) зависят от функции $\Psi(u, v)$, задающей длины больших осей эллипсоидов. Данная функция должна быть определена из условия формирования заданного распределения освещённости в области $E(\mathbf{u})$ в области G .

2. Связь с методом согласованных квадрик

Для объяснения метода расчёта функции $\Psi(u, v)$ рассмотрим связь представления поверхности (5)–(7) с методом согласованных квадрик в задаче расчёта зеркала для фокусировки в набор точек $\mathbf{X}_i = (u_i, v_i, f)$, $i = 1, \dots, N$. В методе согласованных квадрик поверхность зеркала состоит из сегментов

эллипсоидов. При этом первые фокусы эллипсоидов совпадают с источником излучения, а вторые фокусы – с точками фокусировки \mathbf{X}_i , $i = 1, \dots, N$. Расчёт больших осей эллипсоидов Ψ_i , $i = 1, \dots, N$, проводится по итерационному алгоритму из условия формирования заданного распределения энергии в точках фокусировки [10, 11].

При заданных значениях Ψ_i , $i = 1, \dots, N$ поверхность зеркала, состоящего из сегментов эллипсоидов, определяется следующими соотношениями:

$$\mathbf{S}_d(\varphi, \psi) = \mathbf{e}(\varphi, \psi) \cdot \frac{p_m}{1 - \varepsilon_m(\mathbf{e}(\varphi, \psi), \mathbf{q}_m)}, \tag{8}$$

где

$$m = \arg \min_{i \in \{1, \dots, N\}} l(\varphi, \psi; u_i, v_i) \tag{9}$$

или

$$m = \arg \max_{i \in \{1, \dots, N\}} l(\varphi, \psi; u_i, v_i). \tag{10}$$

Значения фокальных параметров p_i и эксцентриситетов $\varepsilon_i = |\mathbf{X}_i| / \Psi_i$ эллипсоидов (8) определяются через значения больших осей Ψ_i , $i = 1, \dots, N$, по следующим формулам:

$$\begin{aligned} p_i &= (\Psi_i^2 - \mathbf{X}_i^2) / 2\Psi_i, \\ \varepsilon_i &= |\mathbf{X}_i| / \Psi_i. \end{aligned} \tag{11}$$

Условие минимума (9) используется при расчёте зеркал эллиптического типа (в этом случае отражённые от зеркала лучи пересекают оптическую ось) [10, 11]. При условии (9) луч от источника с координатами (φ, ψ) направляется в точку фокусировки ближайшим к источнику эллипсоидом по направлению луча. Условие максима (10) используется при расчёте зеркал гиперболического типа (в этом случае отражённые от зеркала лучи не пересекают оптическую ось). В данном случае луч с координатами (φ, ψ) направляется в точку фокусировки самым далёким от источника эллипсоидом по направлению луча.

Несложно видеть, что уравнения (8)–(10) являются дискретным вариантом уравнений (5)–(7), в которых вместо области фокусировки $\mathbf{X}(u, v) = (u, v, f)$, $(u, v) \in G$ и функции $\Psi(u, v)$, $(u, v) \in G$ используется набор точек $\mathbf{X}_i = (u_i, v_i, f)$, $i = 1, \dots, N$ и дискретный набор значений Ψ_i , $i = 1, \dots, N$. Такая интерпретация позволяет рассматривать задачу фокусировки в двумерную область G как предельный случай дискретной задачи фокусировки в набор точек $\mathbf{X}_i = (u_i, v_i, f)$, $i = 1, \dots, N$. При этом можно считать, что точки \mathbf{X}_i , $i = 1, \dots, N$, расположены в узлах некоторой прямоугольной сетки, аппроксимирующей область G (рис. 2).

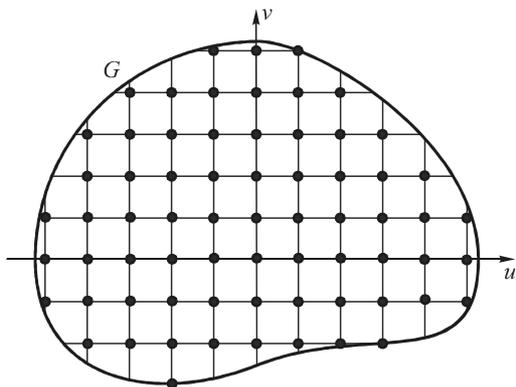


Рис. 2. Аппроксимация освещаемой области набором точек

3. Метод расчёта

В пункте 1 в аналитическом виде получено общее представление поверхности зеркала, отражающего лучи из источника в заданную область G . Уравнения поверхности зеркала (5)–(7) зависят от функции $\Psi(u, v), (u, v) \in G$, которая должна быть определена из условия формирования заданного распределения освещённости в области $E(\mathbf{u})$ в области G .

В пункте 2 показано, что задача фокусировки в двумерную область G является предельным случаем дискретной задачи фокусировки в набор точек $\mathbf{X}_i = (u_i, v_i, f), i = 1, \dots, N$.

Согласно вышеуказанным результатам пунктов 1, 2, в настоящей работе предлагается расчёт функции $\Psi(u, v), (u, v) \in G$ проводить через набор значений $\Psi_i, i = 1, \dots, N$, определяющих параметры эллипсоидов в дискретной задаче фокусировки в набор точек $\mathbf{X}_i, i = 1, \dots, N$ с заданным распределением энергии $E_i, i = 1, \dots, N$. Будем считать, что точки $\mathbf{X}_i, i = 1, \dots, N$, расположены в узлах некоторой прямоугольной сетки, аппроксимирующей область G (рис.2). При этом значения энергии в точках фокусировки определим через значения заданного непрерывного распределения освещённости в области G : $E_i = E(u_i, v_i), i = 1, \dots, N$. Для решения дискретной задачи разработан итерационный метод [10, 11]. При этом сходимость метода строго доказана. Если точки фокусировки расположены в дальней зоне, то расчёт $\Psi_i, i = 1, \dots, N$ может быть сведён к решению задачи линейного программирования [18, 19].

После решения дискретной задачи непрерывная функция $\Psi(u, v), (u, v) \in G$ может быть получена на основе построения непрерывной аппроксимации по значениям $\Psi_i, i = 1, \dots, N$, заданным в узлах $\mathbf{X}_i, i = 1, \dots, N$. В данной работе функция $\Psi(u, v)$ определялась в виде сплайна. По рассчитанной функции $\Psi(u, v)$ поверхность зеркала восстанавливается по аналитическим формулам (5)–(7). Высокие рабочие характеристики предложенного подхода проиллюст-

рированы на ряде примеров, представленных в следующем пункте.

4. Примеры расчёта зеркал

Предложенный метод был реализован в среде программирования Matlab. Продемонстрируем рабочие характеристики метода на примерах расчёта зеркал, формирующих выпуклые равномерные распределения освещённости в прямоугольной, эллиптической и треугольной областях.

Рассмотрим расчёт зеркала, формирующего равномерно освещённую прямоугольную область с размерами $6 \times 4 \text{ м}^2$ в выходной плоскости, расположенной на расстоянии 10 м от точечного ламбертовского источника света. При этом будем считать, что точечный (компактный) ламбертовский источник излучает в полусферу, соответствующую области $z > 0$ (рис. 1). Для решения данной задачи сначала методом согласованных квадратов было рассчитано зеркало для фокусировки в набор точек, расположенных в узлах эквидистантной сетки в заданной прямоугольной области. Была использована сетка с шагом 20 см. При выбранном шаге общее число точек фокусировки составило $N = 651$ (31 точка по оси Ox и 21 точка по оси Oy). В результате решения указанной дискретной задачи были получены значения функции эйконала в точках фокусировки (значения больших осей эллипсоидов $\Psi_i, i = 1, \dots, N$). Отметим, что решение дискретной задачи при указанном числе точек с помощью итерационного метода [10, 11] требует всего нескольких минут на стандартном персональном компьютере. Рассчитанные значения функции эйконала в точках фокусировки представлены на рис. 3. Для наглядности значения $\Psi_i, i = 1, \dots, 651$, показаны в виде точек на непрерывной поверхности.

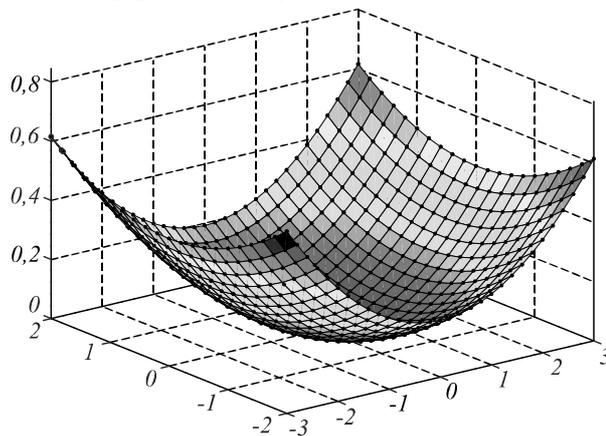


Рис. 3. Функция эйконала для фокусировки в набор точек в прямоугольной области

Для проверки правильности расчётов было проведено моделирование работы рассчитанного зеркала в программе для светотехнических расчётов TracePro® с использованием метода трассировки лучей [20]. Для этого по формулам (8)–(9) была рассчитана сегментированная отражающая поверхность. Затем полученная поверхность была аппроксимирована системой неоднородных рациональных сплайнов (NURBS) в программе автоматизированного проектирования

Rhinosceros® [21]. Указанная аппроксимация необходима для импортирования рассчитанной поверхности в программу TracePro®. Отметим, что аппроксимация сегментированной поверхности (8)–(9) гладкой функцией в виде набора рациональных сплайнов неизбежно приводит к некоторой ошибке. На рис. 4 показано рассчитанное в программе TracePro® распределение освещённости, формируемое зеркалом при точечном ламбертовском источнике излучения. Распределение освещённости рассчитано при 500000 лучей и показывает фокусировку в заданный набор точек. Некоторая неравномерность распределения энергии в точках фокусировки объясняется погрешностью метода трассировки лучей, а также погрешностью аппроксимации сегментированной поверхности (8)–(9) с помощью рациональных сплайнов.

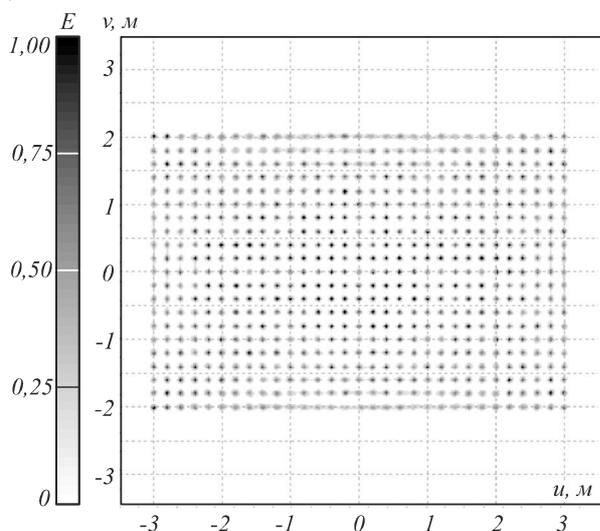


Рис. 4. Полутоновое распределение освещённости, формируемое сегментированным зеркалом для фокусировки в набор точек в прямоугольной области

Затем по рассчитанным значениям эйконала $\Psi_i, i = 1, \dots, 651$ с помощью аппроксимации бикубическим сплайном на равномерной сетке, состоящей из 6 патчей по оси Ox и 4 патчей по оси Oy , была построена непрерывная функция эйконала $\Psi(u, v)$. На рис. 5 показана поверхность зеркала, восстановленная по полученной непрерывной функции эйконала согласно формулам (5)–(6).

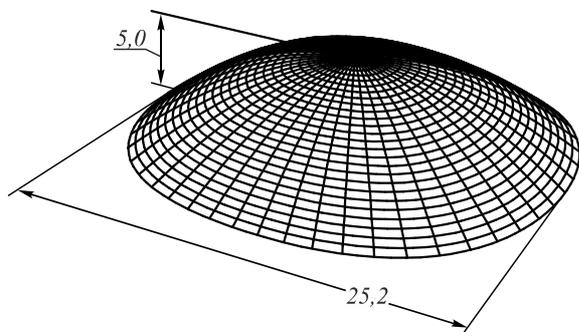


Рис. 5. Отражающая поверхность, формирующая равномерное распределение освещённости в прямоугольной области (габаритные размеры зеркала указаны в мм)

На рис. 6 представлено распределение освещённости, формируемое полученной отражающей поверхностью с точечным ламбертовским источником излучения. Данное распределение рассчитано в программе Trace Pro при 500000 лучах. Относительное среднеквадратическое отклонение (ОСКО) формируемого распределения освещённости от требуемого постоянного распределения освещённости составляет 6,8 %.

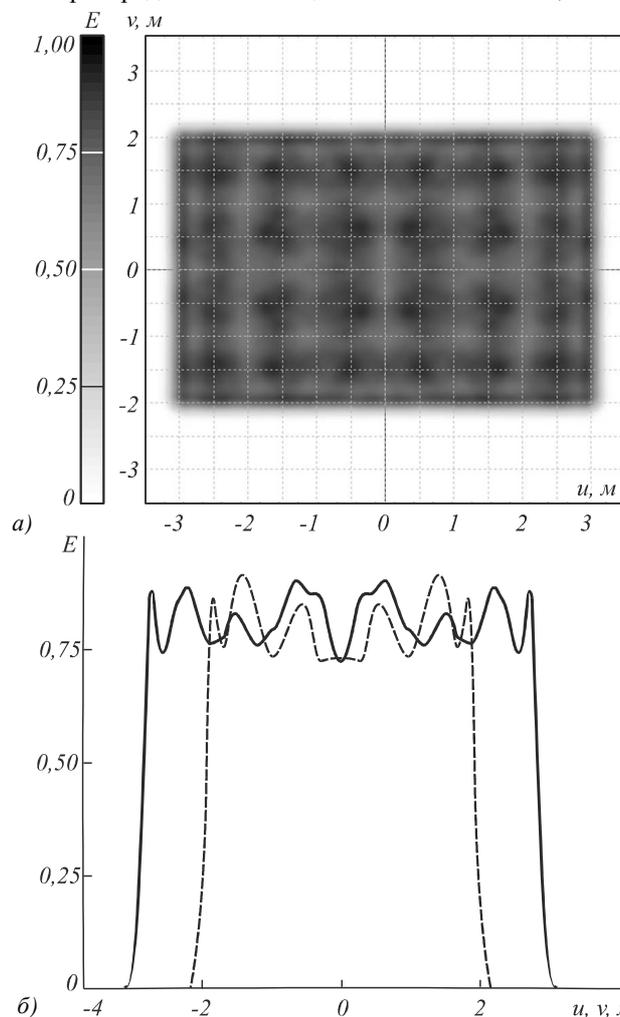


Рис. 6. Распределение освещённости, формируемое зеркалом на рис. 5, при точечном источнике излучения: полутоновое распределение освещённости (а); профили распределения освещённости (б)

Представляют интерес характеристики работы зеркала при реальном протяжённом источнике. На рис. 7 представлены результаты моделирования зеркала при протяжённом источнике с размером $1 \times 1 \text{ мм}^2$, излучающем по закону Ламберта. Здесь и далее при моделировании протяжённый источник считается прозрачным и не препятствует распространению лучей. ОСКО полученного распределения (рис. 7) составляет 4,6 %, то есть увеличение размера источника привело к увеличению равномерности формируемого распределения. В то же время увеличение размера источника приводит к размытию границы освещаемой области. Таким образом, предложенный метод расчёта позволяет рассчитывать отра-

жающие поверхности, которые имеют хорошие рабочие характеристики не только для точечного, но и для протяжённого источника излучения.

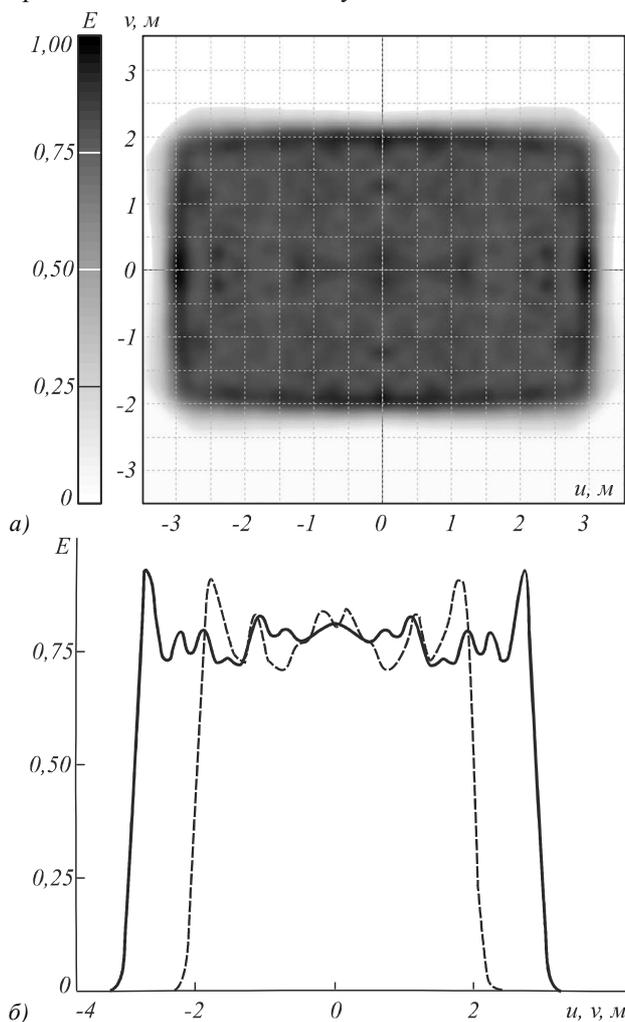


Рис. 7. Распределение освещённости, формируемое зеркалом при протяжённом источнике излучения с размерами $1 \times 1 \text{ мм}^2$: полутоновое распределение освещённости (а); профили распределения освещённости (б)

Аналогичным образом была решена задача расчёта зеркала, формирующего равномерно освещённую эллиптическую область с длинами осей 6 м и 3 м в выходной плоскости, расположенной на расстоянии 10 м от точечного ламбертовского источника света. Методом согласованных квадрик были получены значения функции эйконала в узлах равномерной сетки, заданной с шагом 20 см по обеим координатным осям. При таком разбиении в формируемую эллиптическую область попали 455 точек. График функции эйконала на выходной плоскости представлен на рис. 8. Результаты моделирования работы восстановленной сегментированной поверхности в программе Trase Pro приведены на рис. 9 и показывают фокусировку в заданный набор точек.

Для восстановления поверхности зеркала (рис. 10), формирующего постоянную освещённость в эллиптической области, полученные значения функ-

ции эйконала $\Psi_i, i = 1, \dots, 455$, были аппроксимированы бикубическим сплайном на сетке с 6 патчами по оси Ox и 4 патчами по оси Oy .

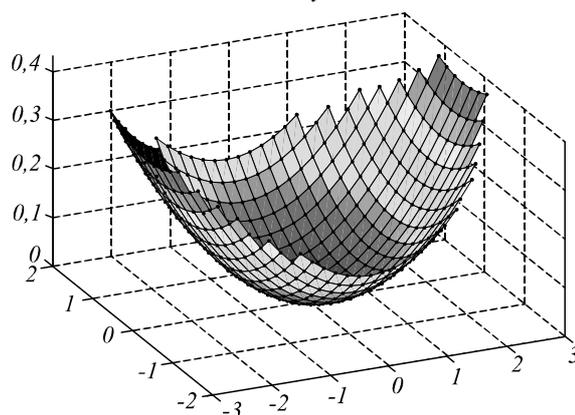


Рис. 8. Функция эйконала для фокусировки в набор точек в эллиптической области

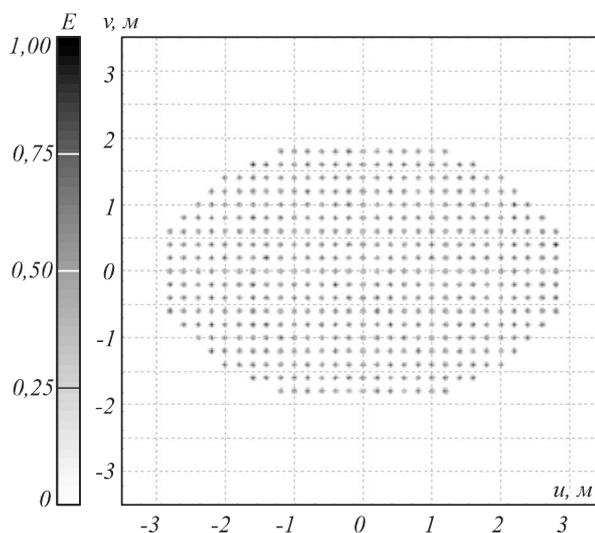


Рис. 9. Полутоновое распределение освещённости, формируемое сегментированным зеркалом для фокусировки в набор точек в эллиптической области

Результаты моделирования работы рассчитанной поверхности в программе Trase Pro с точечным ламбертовским источником излучения и протяжённым прозрачным источником излучения с размерами $1 \times 1 \text{ мм}^2$ приведены на рис. 11, 12 соответственно. ОСКО полученного светового распределения от равномерного составляет 5,9% в случае точечного источника и 4,8% в случае протяжённого источника с размером $1 \times 1 \text{ мм}^2$.

Аналогично предыдущим примерам было рассчитано зеркало (рис. 13), формирующее равномерно освещённый равносторонний треугольник со стороной 6 м в выходной плоскости, расположенной на расстоянии 10 м от точечного ламбертовского источника света. Для этого методом согласованных квадрик были получены значения функции эйконала в узлах равномерной сетки, заданной с шагом 20 см (внутри области попали 512 точек), которые затем были аппроксимированы бикубическим сплайном с 6 патчами по осям Ox и Oy .

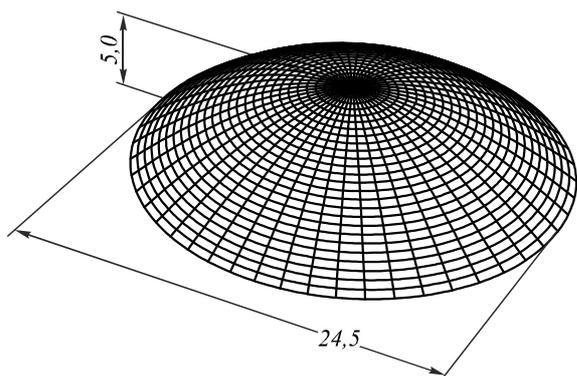


Рис. 10. Отражающая поверхность, формирующая равномерное распределение освещённости в эллиптической области (габаритные размеры зеркала указаны в мм)

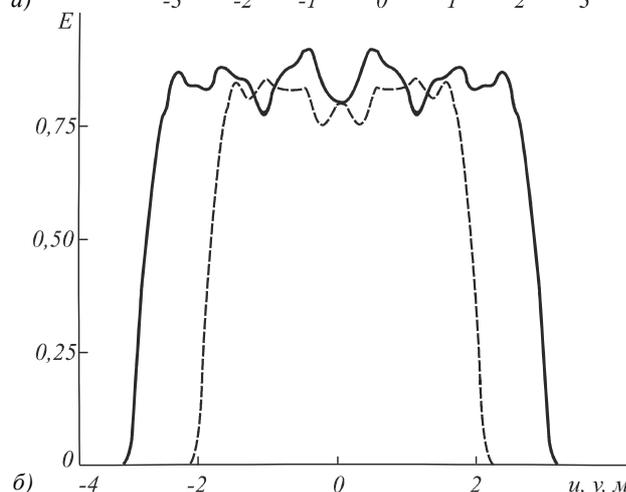
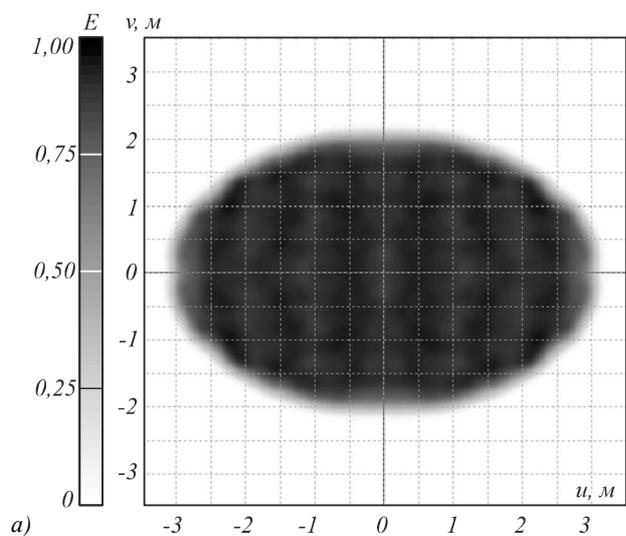


Рис. 11. Полутоновое распределение освещённости, формируемое зеркалом для фокусировки в набор точек в эллиптической области для точечного распределения освещённости: полутоновое распределение освещённости (а); профили распределения освещённости (б)

По полученной непрерывной функции эйконала была восстановлена поверхность зеркала по формулам (5) и (6). Результаты моделирования работы рассчитанной поверхности в программе Trace Pro с точечным ламбертовским источником излучения и с протяжённым прозрачным источником излучения

с размерами $1 \times 1 \text{ мм}^2$ приведены на рис. 14, 15 соответственно. ОСКО составляет 7,8% в случае точечного источника и 9,7% в случае протяжённого источника.

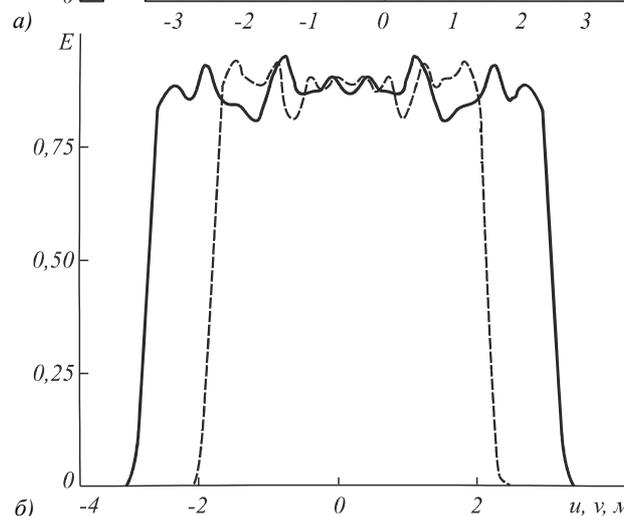
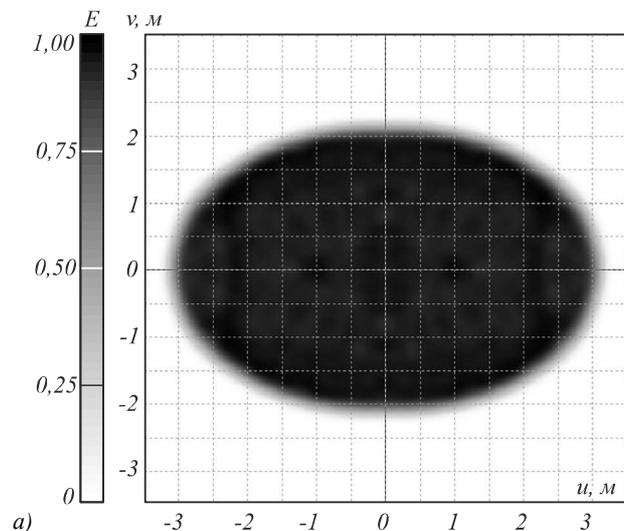


Рис. 12. Полутоновое распределение освещённости, формируемое зеркалом для фокусировки в набор точек в эллиптической области для протяжённого источника с размерами $1 \times 1 \text{ мм}$: полутоновое распределение освещённости (а); профили распределения освещённости (б)

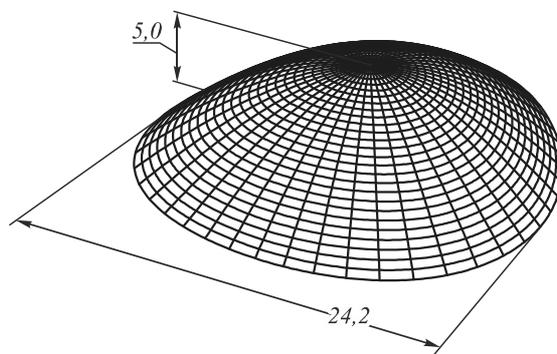


Рис. 13. Отражающая поверхность, формирующая равномерное распределение освещённости в треугольной области (габаритные размеры зеркала указаны в мм)

Вышеприведённые примеры демонстрируют хорошую работоспособность метода при формировании

равномерных распределений освещённости в выпуклых областях. Рабочие характеристики метода при формировании более сложных световых распределений (например, при формировании световых распределений для дорожного освещения или равномерных распределений освещённости в двусвязных областях) являются предметом дальнейших исследований.

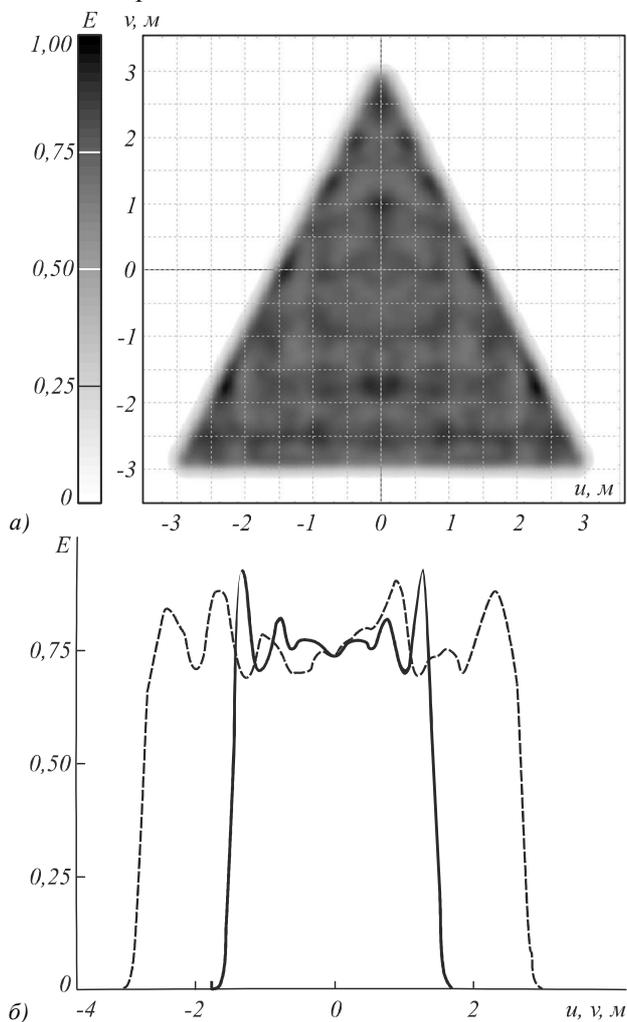


Рис. 14. Полутоновое распределение освещённости, формируемое зеркалом для фокусировки в набор точек в треугольной области для точечного распределения освещённости: полутоновое распределение освещённости (а); профили распределения освещённости (б)

Заключение

В работе предложен метод расчёта отражающей поверхности, формирующей заданное непрерывное распределение освещённости в двумерной области. В методе поверхность зеркала представляется в виде огибающей двухпараметрического семейства эллипсоидов. Такое представление поверхности является предельным случаем сегментированной поверхности, используемой в методе согласованных квадрик для фокусировки в набор точек (точки фокусировки расположены в узлах прямоугольной сетки, аппроксимирующей заданную область). Огибающая поверхность имеет простой ана-

литический вид и зависит от функции, определяющей длины осей эллипсоидов семейства.

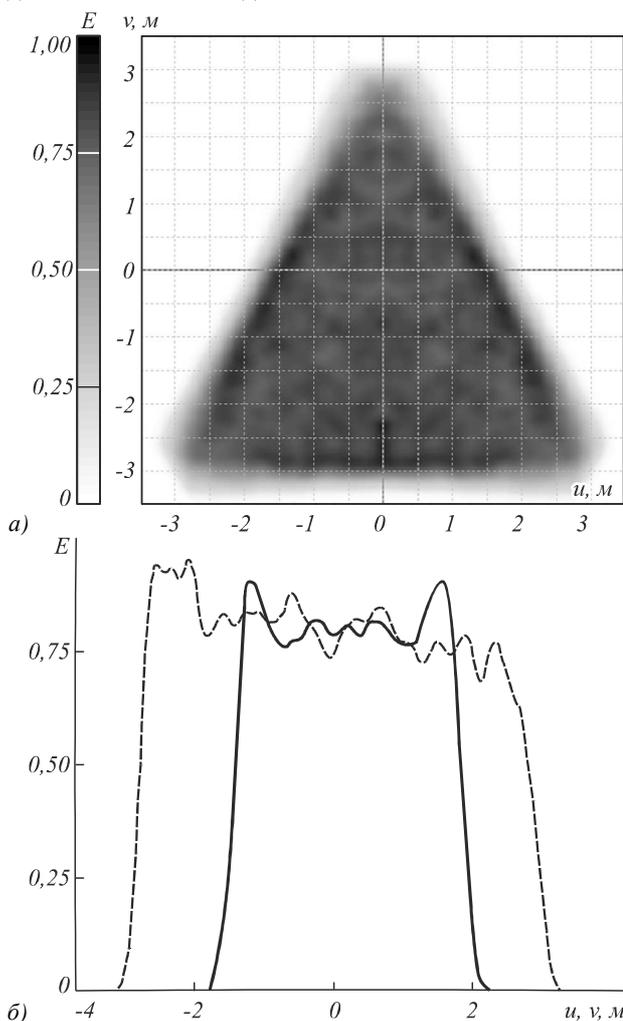


Рис. 15. Полутоновое распределение освещённости, формируемое зеркалом для фокусировки в набор точек в треугольной области для протяжённого источника с размерами 1×1 мм: полутоновое распределение освещённости (а); профили распределения освещённости (б)

Данная функция соответствует эйконалу Ψ в области фокусировки и определяет распределение освещённости, формируемое в заданной области. Расчёт непрерывной функции Ψ осуществляется на основе непрерывной аппроксимации дискретной функции эйконала, полученной из решения дискретной задачи фокусировки в набор точек с помощью метода согласованных квадрик.

С использованием предложенного метода были рассчитаны зеркала, формирующие равномерные распределения освещённости в прямоугольной, эллиптической и треугольной областях. Результаты моделирования работы рассчитанных зеркал демонстрируют их высокие рабочие характеристики: относительное среднеквадратическое отклонение формируемого распределения освещённости от требуемого не превышает 8 % в случае точечного источника и 10 % в случае протяжённого источника с размерами

1×1 мм². Исследование возможности формирования сложных невыпуклых областей будет предметом дальнейших исследований.

Благодарности

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки РФ, грантов РФФИ № 14-07-31135-мол_а, 14-07-00339-А, 13-07-97001-р_поволжье_а.

Литература

- Rengmao, W. Freeform illumination design: a nonlinear boundary problem for the elliptic Monge–Ampère equation / W. Rengmao, X. Liang, L. Peng, Z. Yaqin, Z. Zhenrong, L. Haifeng, L. Xu // *Opt. Lett.* – 2013. – Vol. 38. – P. 229-231.
- Rengmao, W. Influence of the characteristics of a light source and target on the Monge–Ampère equation method in freeform optics design / W. Rengmao, P. Benítez, Z. Yaqin, J.C. Miñano // *Opt. Lett.* – 2014. – Vol. 39. – P. 634-637.
- Feng, Z. Design of LED freeform optical system for road lighting with high luminance/illuminance ratio / Z. Feng, Y. Luo, Y. Han // *Optics Express.* – 2010. – Vol. 18. – P. 22020-22031.
- Luo, Y. Design of compact and smooth free-form optical system with uniform illuminance for LED source / Y. Luo, Z. Feng, Y. Han, H. Li // *Optics Express.* – 2010. – Vol. 18. – P. 9055-9063.
- Doskolovich, L.L. Design of refractive spline surface for generating required irradiance distribution with large angular dimension / L.L. Doskolovich, M.A. Moiseev // *Journal of Modern Optics.* – 2010. – Vol. 57. – P. 536-544.
- Moiseev, M.A. Design of efficient LED optics with two freeform surfaces / M.A. Moiseev, S.V. Kravchenko, L.L. Doskolovich // *Optics Express.* – 2010. – Vol. 22. – P. 1926-1935.
- Wang, K. Design of compact freeform lens for application specific light-emitting diode packaging / K. Wang, F. Chen, Z. Liu // *Optics Express.* – 2010. – Vol. 18. – P. 413-425.
- Mao, X. Polar-grids based source-target mapping construction method for designing freeform illumination system for a lighting target with arbitrary shape / X. Mao, H. Li, Y. Han, Y. Luo // *Optics Express.* – 2015. – Vol. 23. – P. 4313-4328.
- Oliker, V. Supporting quadric method in optical design of freeform lenses for illumination control of a collimated light / V. Oliker, J. Rubinstein, G. Wolansky // *Advances in Applied Mathematics.* – 2015. – Vol. 62. – P. 160-183.
- Oliker, V.I. Mathematical aspects of design of beam shaping surfaces in geometrical optics / V.I. Oliker // *Trends in Nonlinear Analysis*; ed. by V.I. Oliker, M. Kirkilionis, S. Krömker, R. Rannacher, F. Tomi. – Springer, 2003. – P. 197-224.
- Kochengin, S.A. Computational algorithms for constructing reflectors / S.A. Kochengin, V.I. Oliker // *Computing and Visualization in Science.* – 2003. – Vol. 6. – P. 15-21.
- Michaelis, D. Cartesian oval representation of freeform optics in illumination systems / D. Michaelis, P. Schreiber, A. Bäuer // *Opt. Lett.* – 2011. – Vol. 36. – P. 918-920.
- Fournier, F. Fast freeform reflector generation using source-target maps / F. Fournier, W. Cassarly, J. Rolland // *Optics Express.* – 2010. – Vol. 18. – P. 5295-5304.
- Ma, Y. Hybrid method of free-form lens design for arbitrary illumination target / Y. Ma, H. Zhang, Z. Su, Y. He, L. Xu, X. Liu, H. Li // *Applied Optics.* – 2015. – Vol. 54. – P. 4503-4508.
- Doskolovich, L.L. Designing reflectors to generate a line-shaped directivity diagram / L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, P. Perlo, S. Bernard // *Journal of Modern Optics.* – 2005. – Vol. 52(11). – P. 1529-1536.
- Doskolovich, L.L. Designing a mirror to form a line-shaped directivity diagram / L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, S. Bernard // *Journal of Modern Optics.* – 2007. – Vol. 54. – P. 589-597.
- Eisenhart, L.P. A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces / L.P. Eisenhart. – London: Forgotten Books, 2012. – 288 p.
- Glimm, T. Optical design of single reflector systems and the monge–Kantorovich mass transfer problem / T. Glimm, V. Oliker // *Journal of Mathematical Sciences.* – 2003. – Vol. 117(3). – P. 4096-4108.
- Wang, X.J. On the design of a reflector antenna II / X.J. Wang // *Calculus of Variations.* – 2004. – Vol. 20. – P. 329-341.
- Программное обеспечение для оптического проектирования TracePro [Электронный ресурс] – URL: <http://www.lambdares.com/> дата обращения 1.07.2015).
- Система автоматизированного проектирования Rhinoceros [Электронный ресурс] – URL: <http://www.rhino3d.com/> дата обращения 1.07.2015).

References

- Rengmao W, Liang X, Peng L, Yaqin Z, Zhenrong Z, Haifeng L, Xu L. Freeform illumination design: a nonlinear boundary problem for the elliptic Monge–Ampère equation. *Opt Lett* 2013; 38: 229-31.
- Rengmao W, Benítez P, Yaqin Z, Miñano J.C. Influence of the characteristics of a light source and target on the Monge–Ampère equation method in freeform optics design. *Opt Lett* 2014; 39: 634-7.
- Feng Z, Luo Y, Han Y. Design of LED freeform optical system for road lighting with high luminance/illuminance ratio. *Optics Express* 2010; 18: 22020-31.
- Luo Y, Feng Z, Han Y, Li H. Design of compact and smooth free-form optical system with uniform illuminance for LED source. *Optics Express* 2010; 18: 9055-63.
- Doskolovich LL, Moiseev MA. Design of refractive spline surface for generating required irradiance distribution with large angular dimension. *Journal of Modern Optics* 2010; 57: 536-44.
- Moiseev MA, Kravchenko SV, Doskolovich LL. Design of efficient LED optics with two free-form surfaces. *Optics Express* 2010; 22: 1926-35.
- Wang K, Chen F, Liu Z. Design of compact freeform lens for application specific light-emitting diode packaging. *Optics Express* 2010; 18: 413-25.
- Mao X, Li H, Han Y, Luo Y. Polar-grids based source-target mapping construction method for designing freeform illumination system for a lighting target with arbitrary shape. *Optics Express* 2015; 23: 4313-28.
- Oliker V, Rubinstein J, Wolansky G. Supporting quadric method in optical design of freeform lenses for illumination control of a collimated light. *Adv Appl Math* 2015; 62: 160-83.
- Oliker VI. Mathematical aspects of design of beam shaping surfaces in geometrical optics. *Trends in Nonlinear Analysis*. Ed by M. Kirkilionis, S. Krömker, R. Rannacher, and F. Tomi, Springer, 2003.
- Kochengin SA, Oliker VI. Computational algorithms for constructing reflectors. *Computing and Visualization in Science* 2003; 6: 15-21.
- Michaelis D, Schreiber P, Bäuer A. Cartesian oval representation of freeform optics in illumination systems. *Opt Lett* 2011; 36: 918-20.
- Fournier F, Cassarly W, Rolland J. Fast freeform reflector generation using source-target maps. *Optics Express* 2010; 18: 5295-304.

- [14] Ma Y, Zhang H, Su Z, He Y, Xu L, Lui X, Li H. Hybrid method of free-form lens design for arbitrary illumination target. *Applied Optics* 2015; 54: 4503-8.
- [15] Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Perlo P, Bernard S. Designing reflectors to generate a line-shaped directivity diagram. *Journal of Modern Optics* 2005; 52(11): 1529-36.
- [16] Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Bernard S. Designing a mirror to form a line-shaped directivity diagram. *Journal of Modern Optics* 2007; 54: 589-97.
- [17] Eisenhart LP. *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*. London: Forgotten Books; 2012.
- [18] Glimm T, Olikier V. Optical design of single reflector systems and the monge–Kantorovich mass transfer problem. *Journal of Mathematical Sciences* 2003; 117(3): 4096-108.
- [19] Wang X.J. On the design of a reflector antenna II. *Calculus of Variations* 2004; 20: 329 – 41.
- [20] Optical Design Software TracePro. Source: <http://www.lambdare.com>.
- [21] Computer Aided Design Software Rhinoceros. Source: <http://www.rhino3d.com>.

DESIGN OF A MIRROR FOR GENERATING A PRESCRIBED CONTINUOUS ILLUMINANCE DISTRIBUTION BASED ON THE SUPPORTING QUADRIC METHOD

L.L. Doskolovich^{1,2}, *K.V. Borisova*^{1,2}, *M.A. Moiseev*^{1,2}

¹ *Image Processing Systems Institute, Samara, Russia, Russian Academy of Sciences,*

² *Samara State Aerospace University, Samara, Russia*

Abstract

A method for designing a reflective surface to generate a prescribed continuous illuminance distribution is proposed. The optical surface is represented as an envelope of a two-parameter set of ellipsoids of revolution. The efficiency of the proposed method is illustrated with a case of computing and simulation of several reflective surfaces that generate uniform illuminance distributions shaped as an ellipse, a rectangle and a triangle.

Keywords: geometric optics, eikonal function, supporting quadric method.

Citation: Doskolovich LL, Borisova KV, Moiseev MA. Design of a mirror for generating a prescribed continuous illuminance distribution based on the supporting quadric method. *Computer Optics* 2015; 39(3): 347-56.

Сведения об авторах

Сведения об авторах Досколович Леонид Леонидович и Моисеев Михаил Александрович – см. стр. 345 этого номера.

Борисова Ксения Валерьевна, 1992 года рождения. В 2014 году с отличием окончила Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (СГАУ) по направлению «Прикладные математика и физика». Магистрант первого года обучения магистерской программы «Математическое моделирование и информационные технологии в фотонике», СГАУ.

E-mail: ksen.borisova@gmail.com.

Kseniya Valeryevna Borisova (b. 1992) graduated with honors (2014) from Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics and Physics. First year master's student with major in "Mathematical Modelling and Information Technologies in Photonics" at SSAU.

*Поступила в редакцию 2 июля 2015 г.
Окончательный вариант – 9 июля 2015 г.*