

АНАЛИЗ ФОКУСИРОВКИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ДИФРАКЦИОННОЙ ЛИНЗОЙ С УЧЁТОМ ДИСПЕРСИИ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

С.Н. Хонина^{1,2}, С.Г. Волоотовский¹, А.В. Устинов¹, С.И. Харитонов^{1,2}

¹ Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия,

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, Самара, Россия

Аннотация

Работа посвящена теоретическому и численному исследованию фокусирующих свойств гармонической линзы с учётом дисперсии показателя преломления. Показано, что гармоническая линза обладает гибридными рефракционно-дифракционными свойствами, что выражается не только в появлении дополнительных локальных фокусов, но и в смещении основных фокусов даже для кратных длин волн. Последний эффект возникает именно из-за дисперсии показателя преломления материала линзы.

Ключевые слова: гармоническая дифракционная линза, преобразование Френеля, дифракционные порядки, хроматизм.

Цитирование: Хонина, С.Н. Анализ фокусировки гармонической дифракционной линзой с учётом дисперсии показателя преломления / С.Н. Хонина, С.Г. Волоотовский, А.В. Устинов, С.И. Харитонов // Компьютерная оптика. – 2017. – Т. 41, № 3. – С. 338-347. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-3-338-347.

Введение

Классические линзы и зеркала сложно использовать в некоторых устройствах из-за большого размера. Кроме того, формирование сложных комплексных распределений лазерных полей невозможно выполнить с помощью классических рефракционных элементов. Однако эта задача очень хорошо решается с помощью средств дифракционной оптики. Дифракционные оптические элементы (ДОЭ), учитывающие волновую природу света, успешно выполняют преобразование падающего лазерного пучка в пучок с практически произвольным амплитудно-фазовым распределением [1, 2].

Основное свойство ДОЭ – использование явления дифракции для изменения направления распространения световых лучей. Дифракционные элементы разбивают световой луч на множество лучей, каждый из которых перенаправляется под своим углом. Для разных длин волн угол дифракции будет разным, что и является причиной хроматического дисперсионного эффекта [3, 4]. Негативное влияние такого эффекта сказывается как в изображающих [5–7], так и фокусирующих [8–10] системах, содержащих ДОЭ. Для компенсации хроматизма ДОЭ часто предлагают использовать гибридные системы, т.е. сочетание рефракционных и дифракционных элементов, обладающих противоположным хроматизмом [3, 4, 11, 12].

Примером ДОЭ, сочетающим в себе свойства как дифракционных, так и рефракционных линз, являются гармонические дифракционные элементы [13–16]. Гармоническим интервалом называется приведение фазы к уровню $2\pi N$. Очевидно, чем больше значение N , тем ближе свойства гармонического ДОЭ к рефракционному элементу, когда хроматизм зависит только от свойств материала, из которого изготовлена линза. Как правило, при анализе свойств гармонических линз не рассматривают хроматическую дисперсию материала, хотя, учитывая гибридную дифрак-

ционно-рефракционную природу такого элемента, это является важным фактором влияния на фокусирующие свойства линзы.

В данной работе выполнен теоретический и численный анализ фокусирующих свойств гармонической линзы с учётом дисперсии показателя преломления. Получены формулы, позволяющие учесть влияние дисперсии показателя преломления материала гармонической линзы в одномерном и радиально-симметричном случаях. Показано, что гармоническая линза обладает гибридными рефракционно-дифракционными свойствами, что выражается не только в появлении дополнительных локальных фокусов, но и в смещении основных фокусов даже для кратных длин волн. Последний эффект возникает именно из-за хроматической дисперсии. Прямое численное моделирование на основе преобразования Френеля полностью подтвердило все аналитические результаты.

1. Теоретический анализ в одномерном случае

Рассмотрим для наглядности сначала одномерный случай. Дифракция на произвольном оптическом элементе, имеющем комплексную функцию пропускания $g(x)$, в параксиальном случае описывается преобразованием Френеля:

$$G(u, z) = \sqrt{-ik/2\pi z} \exp(ikz) \times \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp\left[(ik/2z)(x-u)^2\right] dx, \quad (1)$$

где z – расстояние от плоскости оптического элемента, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны освещающего элемент излучения.

Пусть элемент представляет собой параболическую линзу с фокусным расстоянием f :

$$g(x) = \exp\left(-(ik/2f)x^2\right), \quad (2)$$

изготовленную для базовой длины волны λ_0 . Фаза линзы имеет следующий вид:

$$\varphi(x, \lambda_0) = -(\pi / \lambda_0 f) x^2. \tag{3}$$

1.1. Толстая линза

Рассмотрим линзу с гладким рельефом. Высота рельефа для случая гладкого профиля (рефракционная, толстая линза):

$$h(x) = \varphi(x, \lambda_0) \lambda_0 / 2\pi [n(\lambda_0) - 1], \tag{4}$$

где $n(\lambda_0)$ – показатель преломления материала, из которого изготовлена линза.

Рассчитаем фазу при освещении такого элемента излучением с произвольной длиной волны:

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= h(x) 2\pi [n(\lambda) - 1] / \lambda = \\ &= \varphi(x, \lambda_0) (\lambda_0 [n(\lambda) - 1] / \lambda [n(\lambda_0) - 1]). \end{aligned} \tag{5}$$

Подставим (3) и (5) в (1):

$$\begin{aligned} G(u, z) &= c(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i \frac{\pi}{f \lambda} \frac{[n(\lambda) - 1]}{[n(\lambda_0) - 1]} x^2\right) \times \\ &\times \exp\left((ik/2z)x^2\right) \exp[-(ik/z)xu] dx. \end{aligned} \tag{6}$$

Выражение (6) представляет собой преобразование Фурье от функции вида:

$$\exp\left[(ik/2)(1/z - (1/f)[n(\lambda) - 1]/[n(\lambda_0) - 1])x^2\right]. \tag{7}$$

Максимум (6) будет при таком значении z , когда показатель функции в (7) будет равен нулю, т.е. в следующем случае:

$$z_{\max} = f([n(\lambda_0) - 1] / [n(\lambda) - 1]). \tag{8}$$

Из выражения (8) видно, как происходит смещение фокуса толстой линзы за счёт дисперсии материала, из которой она изготовлена.

1.2. Гармоническая линза

Рассмотрим гармоническую дифракционную линзу [13–16] уровня N . Высота рельефа определяется выражением:

$$h_N(x) = [\text{mod}_{2\pi N} \varphi(x, \lambda_0)] \lambda_0 / 2\pi [n(\lambda_0) - 1]. \tag{9}$$

Классической дифракционной линзе соответствует выражение (9) с $N = 1$.

Рассчитаем фазу при освещении такого элемента излучением с произвольной длиной волны:

$$\begin{aligned} \varphi_N(x, \lambda) &= h_N(x) (2\pi [n(\lambda) - 1] / \lambda) = \\ &= ([n(\lambda) - 1] \lambda_0 / [n(\lambda_0) - 1] \lambda) [\text{mod}_{2\pi N} \varphi(x, \lambda_0)]. \end{aligned} \tag{10}$$

Такой элемент формирует много дифракционных порядков, энергию в которых можно оценить с помощью разложения в ряд функции комплексного пропускания элемента:

$$g_N(x) = \exp\left(i \frac{[n(\lambda) - 1] \lambda_0}{[n(\lambda_0) - 1] \lambda} [\text{mod}_{2\pi N} \varphi(x, \lambda_0)]\right). \tag{11}$$

Так как функция $[\text{mod}_{2\pi N} \varphi(x, \lambda_0)]$ периодическая с периодом $P = 2\pi N$, то её можно разложить в ряд Фурье на этом периоде.

Обозначим $X = [\text{mod}_{2\pi N} \varphi(x, \lambda_0)]$ и разложим (11) в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} g_N(X) &= \sum_m T_m \exp\left(i \frac{2\pi}{P} mX\right) = \\ &= \sum_m T_m \exp\left(i \frac{m}{N} X\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Коэффициенты в (12) равны

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi N} \exp\left(-i \frac{m}{N} X\right) g_N(X) dX = \\ &= \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi N} \exp\left(-i \frac{m}{N} X\right) \times \\ &\times \exp\left(i \frac{[n(\lambda) - 1] \lambda_0}{[n(\lambda_0) - 1] \lambda} X\right) dX = \\ &= \exp\left(i\pi N \left(\mu(\lambda) \frac{\lambda_0}{\lambda} - \frac{m}{N}\right)\right) \times \\ &\times \text{sinc}\left[N \left(\mu(\lambda) \frac{\lambda_0}{\lambda} - \frac{m}{N}\right)\right], \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\text{sinc}(x) = \sin(\pi x) / \pi x, \quad \mu(\lambda) = [n(\lambda) - 1] / [n(\lambda_0) - 1].$$

Запишем (12) от исходной переменной:

$$\begin{aligned} g_N(x) &= \sum_m T_m \exp\left(i \frac{m}{N} [\text{mod}_{2\pi N} \varphi(x, \lambda_0)]\right) = \\ &= \sum_m T_m \exp\left(i \frac{m}{N} \varphi(x, \lambda_0)\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Функцию (14) подставим в (1):

$$\begin{aligned} G(u, z) &= c(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \sum_m T_m \exp\left(i \frac{m}{N} \varphi(x, \lambda_0)\right) \times \\ &\times \exp\left(\frac{ik}{2z} x^2\right) \exp\left[-\frac{ik}{z} xu\right] dx. \end{aligned} \tag{15}$$

После изменения порядка интегрирования и суммирования, а также с учётом (3) получаем:

$$\begin{aligned} G(u, z) &= c(\lambda) \sum_m T_m \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i \frac{m}{N} \frac{\pi}{\lambda_0 f} x^2\right) \times \\ &\times \exp\left((ik/2z)x^2\right) \exp[-(ik/z)xu] dx. \end{aligned} \tag{16}$$

Заметим, что в явном виде зависимость от показателя преломления входит только в коэффициенты разложения по дифракционным порядкам.

Интеграл в (16) равен:

$$G_m(u, z) = \sqrt{\pi} \exp \left[-i \frac{(ku)^2}{4z^2} \left(\frac{m\pi}{N\lambda_0 f} - \frac{k}{2z} \right)^{-1} \right] \times \exp(\pm i(\pi/4)) \left| \left(\frac{m\pi}{N\lambda_0 f} - \frac{k}{2z} \right)^{-1/2} \right|, \quad (17)$$

где знак минус используется, если под знаком модуля положительное число и плюс в обратном случае.

Подставляя (13) и (17) в (16), окончательно получим:

$$G(u, z) = \sqrt{-\frac{ik}{2z}} \exp\left(\frac{ik}{2z} u^2\right) \exp(ikz) \times \sum_m \exp\left(i\pi N \left(\mu(\lambda) \frac{\lambda_0}{\lambda} - \frac{m}{N}\right)\right) \times \text{sinc} \left[N \left(\mu(\lambda) \frac{\lambda_0}{\lambda} - \frac{m}{N}\right) \right] \times \exp \left[-i \frac{(ku)^2}{4z^2} \left(\frac{m\pi}{N\lambda_0 f} - \frac{k}{2z} \right)^{-1} \right] \times \exp \left(\pm i \frac{\pi}{4} \right) \left| \frac{m\pi}{N\lambda_0 f} - \frac{k}{2z} \right|^{-1/2}. \quad (18)$$

Из (18) видно, что при произвольном z наибольший вклад даёт слагаемое с таким индексом, что $(\mu(\lambda)N(\lambda_0/\lambda) - m) = 0$. Обозначим его:

$$m_{\max} = \mu(\lambda)N(\lambda_0/\lambda), \quad (19)$$

и тогда в (17) для этого индекса:

$$\frac{\mu(\lambda) \frac{\lambda_0}{\lambda} \pi}{\lambda_0 f} - \frac{k}{2z} = \frac{\mu(\lambda)\pi}{\lambda f} - \frac{\pi}{\lambda z} = \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{\mu(\lambda)}{f} - \frac{1}{z} \right). \quad (20)$$

Из (20) очевидно, что в (17) будет максимальное значение амплитуды при

$$z_{\max} = f / \mu(\lambda) = f \left(\frac{n(\lambda_0) - 1}{n(\lambda) - 1} \right). \quad (21)$$

Выражение (21) в точности совпадает с выражением (8) для рефракционной линзы, если не учитывать, что m_{\max} в общем случае не является целым числом.

Если же вспомнить, что номер порядка должен быть целым, то делаем предположение, что основной вклад вносит не одно, а два слагаемых с целыми номерами m_0 и $m_0 + 1$, выбранными так, чтобы было $m_0 < m_{\max} < m_0 + 1$.

Для каждого порядка (с целым m) максимум находится на расстоянии

$$z_{m,N} = N\lambda_0 f / m\lambda. \quad (22)$$

Для m_0 максимум будет располагаться дальше на оси $z_2 = N\lambda_0 f / \lambda m_0$, а для $m_0 + 1$ ближе $- z_1 = N\lambda_0 f / \lambda(m_0 + 1)$.

Для дальнейшего рассмотрения положим в (17) $u = 0$ и выпишем эти два слагаемых, не учитывая множитель за знаком суммы:

$$\hat{G}(0, z) = \pi^{-1} \exp \left[i\pi(m_0 - m_{\max}) \right] \times \sin \left[\pi(m_0 + 1 - m_{\max}) \right] \times \left\{ \frac{\exp(\mp i\pi/4)(m_{\max} - m_0)^{-1}}{\left| m_0\pi/\lambda_0 f - k/2z \right|^{1/2}} - \frac{\exp(\mp i\pi/4)(m_0 + 1 - m_{\max})^{-1}}{\left| (m_0 + 1)\pi/\lambda_0 f - k/2z \right|^{1/2}} \right\}. \quad (23)$$

Максимум выражения (23) должен быть между z_1 и z_2 , что можно доказать и аналитически. Легко убедиться, что при $z > z_2$ оба числа под модулем положительные и оба числителя равны $\exp(-i\pi/4)$. Вынеся его за скобку, получаем разность дробей, поэтому максимума не будет. Аналогично при $z < z_1$ оба числа отрицательные, а числители равны $\exp(i\pi/4)$, и также получится разность. При $z_1 < z < z_2$ первое число отрицательное, числитель равен $\exp(-i\pi/4)$, второе положительное, числитель равен $\exp(i\pi/4)$. Если вынести $\exp(i\pi/4)$ за скобку, то в области $z_1 < z < z_2$ (23) переписется в виде:

$$\hat{G}(0, z) = \pi^{-1} \exp \left[i\pi(m_0 - m_{\max} + 1/4) \right] \times \sin \left[\pi(m_0 + 1 - m_{\max}) \right] \times \left\{ \frac{(m_{\max} - m_0)^{-1}}{\left| \frac{k}{2z} - \frac{m_0\pi}{\lambda_0 f} \right|^{1/2}} + \frac{i(m_0 + 1 - m_{\max})^{-1}}{\left| \frac{(m_0 + 1)\pi}{\lambda_0 f} - \frac{k}{2z} \right|^{1/2}} \right\}. \quad (24)$$

Здесь уже нет разности из-за сдвига по фазе. Взяв квадрат модуля, получим

$$|\hat{G}(0, z)|^2 \sim \frac{(m_{\max} - m_0)^{-2}}{\left(\frac{k}{2z} - \frac{m_0\pi}{\lambda_0 f} \right)^2} + \frac{(m_0 + 1 - m_{\max})^{-2}}{\left(\frac{(m_0 + 1)\pi}{\lambda_0 f} - \frac{k}{2z} \right)^2}. \quad (25)$$

Это *выпуклая* линейная комбинация с весами $(m_{\max} - m_0)^{-2}$ и $(m_0 + 1 - m_{\max})^{-2}$. Её максимум должен быть между максимумами каждого из слагаемых.

Правда, когда мы пренебрегаем конечным размером зрачка, то максимумы будут дельта-функциями и нецелое m_{\max} приведёт к тому, что вместо смещения главного фокуса будет появление дополнительных фокусов, что и наблюдается обычно у классической дифракционной линзы.

Если избавиться от бесконечных значений в точках максимума, то смещение станет очевидным. Величина смещения зависит от вида функции, описывающей пик. Очевидно, что если $m_{\max} = m_0 + 1/2$, то независимо от вида функции максимум будет на среднем *гармоническом* расстоянии:

$$z_{\max} = 2z_1 z_2 / (z_2 + z_1). \tag{26}$$

С учётом множителя за знаком суммы в (18) нужно сделать уточнение: максимум немного сместится в сторону меньшего значения z_1 .

Необходимо отметить, что реальное смещение будет только в том случае, когда пики достаточно широкие (по отношению к расстоянию между ними), иначе ситуация будет соответствовать набору локальных фокусов как в классической дифракционной линзе. То есть пик если и сместится, то незначительно, а между порядками останется минимум.

Количественное выражение «достаточной ширины» зависит от формы пика. Точное выражение для интеграла в (16) при конечных пределах интегрирования весьма громоздко, поэтому можно использовать некоторые приближения.

Наиболее вероятно слияние максимумов при полупеце m_{\max} (равенстве весов). Далее рассмотрим только этот случай. Пусть пики одинаковой высоты и ширины σ , расположенные в точках a и b в координате $x \sim 1/z$, описываются функциями

$$\begin{aligned} f_1 &= f((x-a)/\sigma), \\ f_2 &= f((x-b)/\sigma). \end{aligned} \tag{27}$$

При равенстве весов комбинация $\alpha(f_1 + f_2)$ всегда имеет экстремум в точке:

$$x_0 = (a+b)/2. \tag{28}$$

Максимум в этой точке будет при выполнении неравенства $(\alpha(f_1 + f_2))'' < 0$ в точке x_0 . В силу симметрии $f_1''(x_0) = f_2''(x_0)$, поэтому достаточно проверить неравенство

$$f_1''(x_0) < 0, \tag{29}$$

которое свяжет ширину пиков и расстояние между ними. Далее рассмотрим некоторые модельные функции, которые обладают следующими свойствами, характерными для истинных распределений интенсивности: неотрицательность, симметричность, максимум в центре и наличие точек перегиба.

Модель 1. Функция Гаусса:

$$f_1 = A \exp(-(x-a)^2/\sigma^2).$$

Условие (29) принимает вид

$$b-a < \sqrt{2}\sigma. \tag{30a}$$

Модель 2. Функция Sinc:

$$f_1 = A \sin((x-a)/\sigma)/(x-a).$$

Условие (29) принимает вид

$$b-a < \pi\sigma. \tag{30b}$$

В данном случае значение π неточное, истинное значение немного больше.

Модель 3. Дробно-рациональная функция:

$$f_1 = A/((x-a)^2 + \sigma^2).$$

Условие (29) принимает вид

$$b-a < (2/\sqrt{3})\sigma. \tag{30в}$$

Как видно, все условия близости пиков выглядят похоже. В модели 3 можно аналитически показать смещение пиков в случае, когда в точке x_0 остаётся минимум. Если обозначить $\Delta = (b-a)/2$, то максимумы будут в точках

$$x_{1,2} = x_0 \pm \sqrt{\Delta^2 + \sigma^2} \cdot \sqrt{2\Delta - \sqrt{\Delta^2 + \sigma^2}}. \tag{31}$$

При $\sigma \rightarrow 0$ (очень узкий пик) имеем очевидные значения $x_1 \rightarrow b$, $x_2 \rightarrow a$. При малом σ пики вместо точек a , b будут в смещённых точках $a + (\sigma^4/16\Delta^3)$ и $b - (\sigma^4/16\Delta^3)$ соответственно.

2. Теоретический анализ в радиально-симметричном случае

Рассмотрим далее радиально-симметричный случай. Дифракция на произвольном оптическом элементе, имеющем радиальную комплексную функцию пропускания $g(r)$ в параксиальном случае, описывается преобразованием Ханкеля нулевого порядка:

$$\begin{aligned} G(\rho, z) &= (ik/z) \exp(ikz) \exp(ik\rho^2/2z) \times \\ &\times \int_0^\infty g(r) \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_0\left(\frac{k\rho r}{z}\right) r dr. \end{aligned} \tag{32}$$

Разложение функции пропускания производится аналогично одномерному случаю, причём значения коэффициентов T_m сохраняются. Вместо (16) будет следующее выражение:

$$\begin{aligned} G(\rho, z) &= c(\lambda) \sum_m T_m \int_0^\infty \exp\left(-i \frac{m \pi}{N \lambda_0 f} r^2\right) \times \\ &\times \exp([ik/2z]r^2) J_0(k\rho r/z) r dr. \end{aligned} \tag{33}$$

Есть отличие от одномерного случая. В одномерном случае простой ответ получается в бесконечных пределах, а в конечных пределах ответ громоздкий даже на оси. Здесь в бесконечных пределах интеграл сходится, но мы можем на оси ($\rho = 0$) получить ответ и в конечных пределах (за пределами оси аналитического решения нет). Пусть радиус оптического элемента R . Тогда при $\rho = 0$ интеграл в (33) равен

$$\begin{aligned} G_m(0, z) &= \exp\left[-i \frac{R^2}{2} \left(\frac{m \pi}{N \lambda_0 f} - \frac{k}{2z}\right)\right] \times \\ &\times \frac{\sin\left[\frac{R^2}{2} \left(\frac{m \pi}{N \lambda_0 f} - \frac{k}{2z}\right)\right]}{\frac{m \pi}{N \lambda_0 f} - \frac{k}{2z}}. \end{aligned} \tag{34}$$

В результате амплитуда равна

$$\begin{aligned}
 G(0, z) &= (ik/z) \exp(ikz) \times \\
 &\times \sum_m \exp\left(i\pi N \left(\mu(\lambda) \frac{\lambda_0}{\lambda} - \frac{m}{N} \right) \right) \times \\
 &\times \sin c \left[N(\mu(\lambda)(\lambda_0/\lambda) - m/N) \right] \times \\
 &\times \exp \left[-i(R^2/2)([m/N](\pi/\lambda_0 f) - k/2z) \right] \times \\
 &\times \sin \left[\frac{R^2}{2} \left(\frac{m}{N} \frac{\pi}{\lambda_0 f} - \frac{k}{2z} \right) \right] / \left(\frac{m}{N} \frac{\pi}{\lambda_0 f} - \frac{k}{2z} \right).
 \end{aligned} \tag{35}$$

Структура выражения аналогична (18), но здесь изначально нет бесконечных значений. Поэтому рассуждения о позиции пиков из параграфа 1 сохраняют свою истинность. Величины из формулы (30б) равны: $a = 2m\pi/\lambda_0 f N k$ и $\sigma = 4/kR^2$.

3. Результаты численного моделирования в радиально-симметричном случае

Для расчета фокусировки с помощью гармонической параксиальной дифракционной линзы были выбраны следующие параметры: фокусное расстояние линзы 100 мм, диаметр линзы 10 мм, базовая длина волны $\lambda_0 = 650$ нм, $N = 10$, диапазон рассматриваемых длин волн $\lambda \in [380 \text{ нм}, 1300 \text{ нм}]$.

Из выражения (22) следует, что в плоскость фокуса приходят порядки от длин волн, кратных базовой:

$$\lambda_{m,N} = N\lambda_0/m. \tag{36}$$

Очевидно, чем шире спектр длин волн, тем больше будет присутствовать «кратных» длин волн, удовлетворяющих (36). К аналогичному эффекту будет приводить увеличение числа уровней N . Таким образом, наилучший результат получится для белого (дневного) света, так как из каждого диапазона цветов найдётся кратная длина волны. Например, из выбранного диапазона кратными являются (мы не приводим весь список, второй индекс в (36) $N = 10$ опущен): $\lambda_{17} = 382,35$ нм, $\lambda_{15} = 433,3$ нм (фиолетовый), $\lambda_{14} = 464,286$ нм (синий), $\lambda_{12} = 541,6$ нм (зелёный), $\lambda_{11} = 590,9$ нм (оранжевый), $\lambda_{10} = 650$ нм, $\lambda_9 = 722,2$ нм (красный).

Чтобы оценить вклады пришедших в фокус длин волн, можно использовать выражение (13):

$$|T_m|^2 = \text{sinc}^2 \left\{ [n(\lambda) - 1] N \lambda_0 / [n(\lambda_0) - 1] \lambda - m \right\}. \tag{37}$$

Тогда с учётом дисперсии материала отношения вкладов для кратных длин волн:

$$\begin{aligned}
 \eta_{m,q}(z) &= \\
 &= \frac{I(\lambda_{m,N})}{I(\lambda_{q,N})} = \left(\frac{2\pi}{z\lambda_{m,N}} |T_m| \right)^2 \left(\frac{2\pi}{z\lambda_{q,N}} |T_q| \right)^{-2} = \\
 &= \frac{(\lambda_{q,N})^2 \text{sinc}^2 \{ \mu(\lambda_{m,N}) m - m \}}{(\lambda_{m,N})^2 \text{sinc}^2 \{ \mu(\lambda_{q,N}) q - q \}},
 \end{aligned} \tag{38}$$

где

$$\mu(\lambda) = [n(\lambda) - 1] / [n(\lambda_0) - 1].$$

3.1. Без учёта дисперсии материала

Без учёта дисперсии материала выражение (38) существенно упрощается:

$$\eta_{m,q} = \frac{(\lambda_{q,N})^2 \text{sinc}^2 \{ m - m \}}{(\lambda_{m,N})^2 \text{sinc}^2 \{ q - q \}} = \left(\frac{\lambda_{q,N}}{\lambda_{m,N}} \right)^2 = \left(\frac{m}{q} \right)^2. \tag{39}$$

Таким образом, интенсивность минимальной длины волны (с максимальным индексом кратности) в фокусе будет максимальной.

На рис. 1 показаны графики распределения интенсивности вдоль оптической оси для нескольких кратных длин волн: $\lambda_{13} = 500$ нм, $\lambda_{10} = 650$ нм и $\lambda_5 = 1300$ нм. Здесь и далее распределения нормированы по отношению к распределению для $\lambda_{10} = 650$ нм. Как видно из графиков на рис. 1, в отсутствие дисперсии материала выполняется соотношение (39):

$$I(\lambda_{13}) / I(\lambda_{10}) = (13/10)^2 = 1,69;$$

$$I(\lambda_5) / I(\lambda_{10}) = (5/10)^2 = 0,25.$$

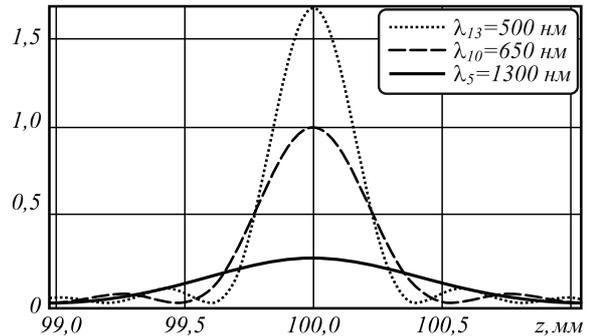


Рис. 1. Нормированные графики распределения интенсивности вдоль оптической оси для различных кратных длин волн

Для некрatных длин волн распределение вдоль оптической оси будет формироваться в соответствии с выражением (22): максимум будет смещён из фокуса, а также появятся дополнительные фокусы (рис. 2).

Огибающую распределения для каждого из порядков можно построить на основе выражения (37). На рис. 3 показаны огибающие для $m = 10$ и $m = 9$, которые соответствуют распределению интенсивности для диапазона длин волн между соответствующими кратными длинами волн: $\lambda \in [\lambda_{10}, \lambda_9] = [650 \text{ нм}, 722 \text{ нм}]$.

На рис. 4 показаны огибающие для различных порядков: $m = 8$ ($\lambda_8 = 812,5$ нм), $m = 10$ ($\lambda_{10} = 650$ нм), $m = 12$ ($\lambda_{12} = 541,7$ нм), $m = 14$ ($\lambda_{14} = 464,3$ нм), $m = 16$ ($\lambda_{16} = 406,25$ нм). Их суперпозиция будет аппроксимировать распределение от источника белого света.

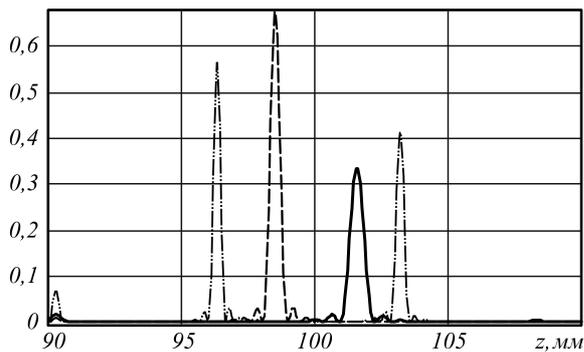


Рис. 2. Нормированные графики распределения интенсивности вдоль оптической оси для различных нецелых длин волн

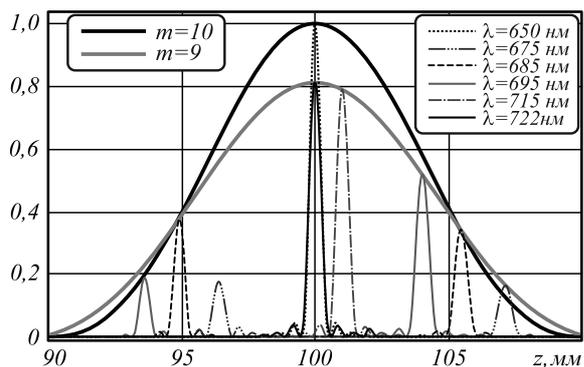


Рис. 3. Нормированные графики огибающих для $m = 10$ и $m = 9$, а также распределения интенсивности вдоль оптической оси для различных длин волн

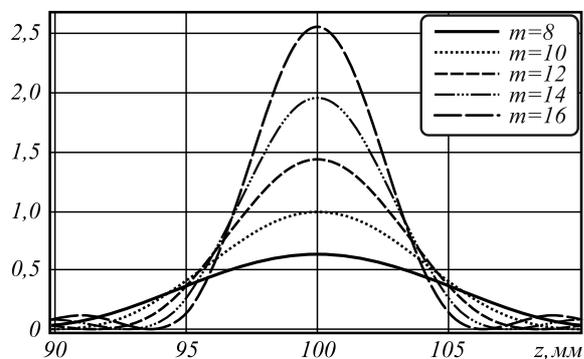


Рис. 4. Нормированные графики огибающих для различных порядков

На рис. 5 показано общее распределение (линия, соединяющая все максимумы) для дискретного набора (331 значение) из диапазона $\lambda \in [410 \text{ нм}, 740 \text{ нм}]$. Изрезанность этой линии будет уменьшаться при увеличении числа выбранных длин волн. Кроме того, показан график, усредненной интенсивности по этому набору длин волн. Оба распределения нормированы.

3.2. С учётом дисперсии материала

Чтобы учесть дисперсию, рассмотрим линзу, изготовленную в резисте, имеющем дисперсионную зависимость $n(\lambda)$, показанную на рис. 6. По виду этой за-

висимости можно ожидать существенных изменений результатов для коротких волн.

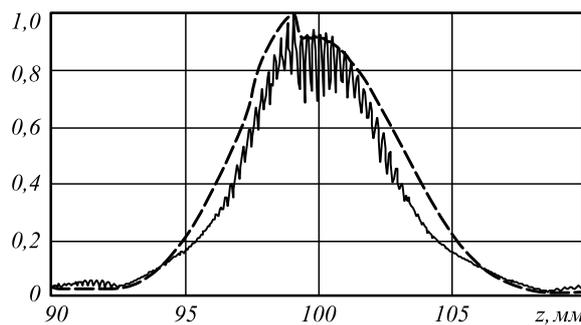


Рис. 5. Графики нормированных распределений: общее распределение для дискретного набора из диапазона $\lambda \in [410 \text{ нм}, 740 \text{ нм}]$ (сплошная линия), а также усреднённая по этому набору интенсивность (пунктирная линия)

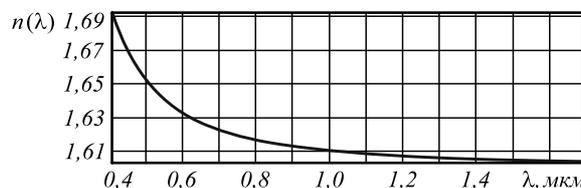


Рис. 6. Дисперсионная зависимость $n(\lambda)$ резиста

На рис. 7 показаны графики распределения интенсивности вдоль оптической оси для нескольких кратных длин волн: $\lambda_{13} = 500 \text{ нм}$, $\lambda_{10} = 650 \text{ нм}$ и $\lambda_5 = 1300 \text{ нм}$ с учётом дисперсии материала. При сравнении рис. 7 и 1 видно, что для длинных волн влияние рассмотренной дисперсии мало. Однако для длины волны $\lambda_{13} = 500 \text{ нм}$ яркость в основном фокусе становится значительно слабее, так как максимум смещается. По формуле (38) отношение $\eta_{13,10} \approx 0,58$ вместо 1,69, которое было без учета дисперсии. Этот эффект важно учитывать при выборе материала для изготовления гармонической линзы.

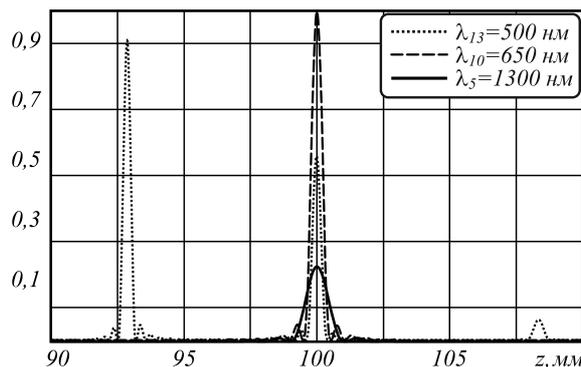


Рис. 7. Графики распределения интенсивности вдоль оптической оси для нескольких кратных длин волн с учётом дисперсии материала

На рис. 8 показаны соответствующие графики для нескольких нецелых длин волн. Сравнение рис. 2 и 8 показывает заметное изменение распределения для коротких волн, в частности для $\lambda = 450 \text{ нм}$.

Перераспределение энергии по локальным фокусам соответственно отразится на смещении огибаю-

шей, которое предсказывает формула (37). С учётом (36) смещение выражается через отношение $\mu(\lambda)$, и выражение для огибающей примет следующий вид:

$$P_m(z) = (2\pi/\lambda z)^2 \text{sinc}^2 \{ m[\mu(\lambda)(z/f) - 1] \}. \quad (40)$$

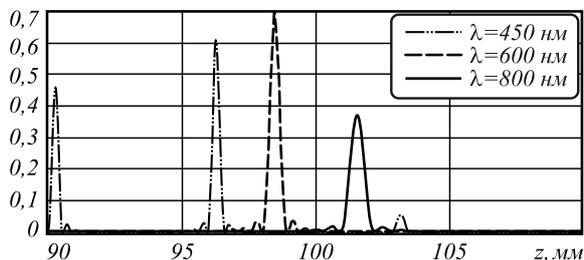


Рис. 8. Графики распределения интенсивности вдоль оптической оси для различных кратных длин волн с учётом дисперсии материала

Из (40) следует, что при учёте дисперсии будет происходить смещение из фокуса даже для кратных длин волн. Положение максимума в этом случае равно $z_{\max} = f/\mu(\lambda)$. Эта позиция совпадает с выражением (8) и (21), что соответствует наличию у гармонической линзы гибридных рефракционно-дифракционных свойств.

Максимальные значения огибающих с учётом дисперсии материала также изменятся по сравнению с (39). Их отношения:

$$\eta_{m,q}(z) = \frac{(z_{q,\max} \lambda_{q,N})^2}{(z_{m,\max} \lambda_{m,N})^2} = \left(\frac{\mu(\lambda_{m,N})}{\mu(\lambda_{q,N})} \right)^2 \left(\frac{m}{q} \right)^2. \quad (41)$$

Из выражения (41) видно, что смещенные влево огибающие дополнительно увеличиваются по амплитуде.

На рис. 9 показаны огибающие для различных порядков с учётом дисперсии материала (второй индекс $N = 10$ опущен): $m = 8$ ($\mu(\lambda_8) = 0,98$), $m = 10$ ($\mu(\lambda_{10}) = 1$), $m = 12$ ($\mu(\lambda_{12}) = 1,02$), $m = 14$ ($\mu(\lambda_{14}) = 1,06$), $m = 16$ ($\mu(\lambda_{16}) = 1,1$).

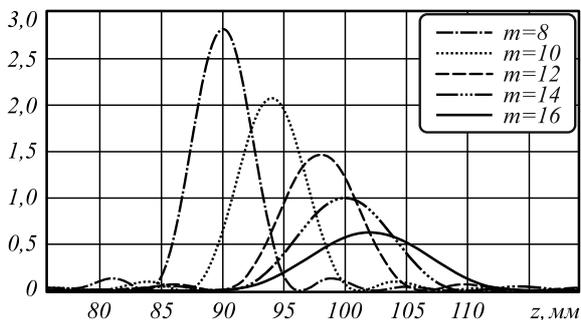


Рис. 9. Нормированные графики огибающих для различных порядков

На рис. 10 показаны результаты, аналогичные приведённым на рис. 5, но с учётом дисперсии материала.

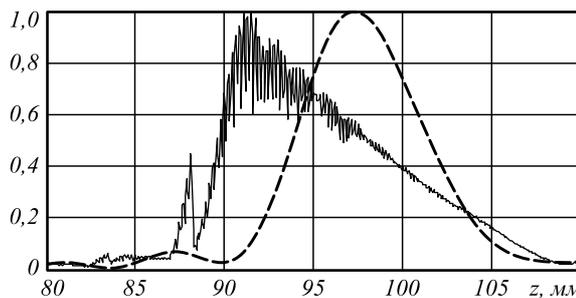


Рис. 10. Графики нормированных распределений с учётом дисперсии материала: общее распределение для дискретного набора из диапазона $\lambda \in [410 \text{ нм}, 740 \text{ нм}]$ (сплошная линия), а также усреднённая по этому набору интенсивность (пунктирная линия)

Заключение

В работе получены формулы, позволяющие учесть влияние дисперсии показателя преломления материала гармонической линзы в одномерном и радиально-симметричном случаях.

Показано, что гармоническая линза обладает гибридными рефракционно-дифракционными свойствами, что выражается не только в появлении дополнительных локальных фокусов, но и в смещении основных фокусов даже для кратных длин волн. Последний эффект возникает именно из-за хроматической дисперсии.

Прямое численное моделирование на основе преобразования Френеля полностью подтвердило все аналитические результаты.

Выявленные эффекты важно учитывать при выборе материала для изготовления гармонической линзы.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 16-29-11744 офи_м).

Литература

1. Дифракционная компьютерная оптика / Д.Л. Головашкин, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, В.В. Котляр, В.С. Павельев, Р.В. Скиданов, В.А. Сойфер, С.Н. Хонина; под ред. В.А. Сойфера. – М.: Физматлит, 2007. – 736 с. – ISBN: 978-5-9221-0845-4.
2. Дифракционная нанофотоника / А.В. Гаврилов, Д.Л. Головашкин, Л.Л. Досколович, П.Н. Дьяченко, А.А. Ковалёв, В.В. Котляр, А.Г. Налимов, Д.В. Нестеренко, В.С. Павельев, Р.В. Скиданов, В.А. Сойфер, С.Н. Хонина, Я.О. Шуюпова; под ред. В.А. Сойфера. – М.: Физматлит, 2011. – 680 с. – ISBN: 978-5-9221-1237-6.
3. Aieta, F. Multiwavelength achromatic metasurfaces by dispersive phase compensation / F. Aieta, M.A. Kats, P. Genevet, F. Capasso // Science. – 2015. – Vol. 347, Issue 6228. – P. 1342-1345. – DOI: 10.1126/science.aaa2494.
4. Swanson, G.J. Binary optics technology: the theory and design of multi-level diffractive optical elements / G.J. Swanson. – Lexington, Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, Lincoln Laboratory, 1989. – 47 p.
5. Бобров, С.Т. Оптика дифракционных элементов и систем / С.Т. Бобров, Г.И. Грейсуч, Ю.Г. Туркевич. – Л.: Машиностроение, 1986. – 223 с.

6. **Грейсух, Г.И.** Сравнительный анализ хроматизма дифракционных и рефракционных линз / Г.И. Грейсух, Е.Г. Ежов, С.А. Степанов // Компьютерная оптика. – 2005. – Вып. 28. – С. 60-65.
7. **Казанский, Н.Л.** Формирование изображений дифракционной многоуровневой линзой / Н.Л. Казанский, С.Н. Хонина, Р.В. Скиданов, А.А. Морозов, С.И. Харитонов, С.Г. Вологовский // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 3. – С. 425-434.
8. **Скиданов, Р.В.** Влияние технологических ошибок и уширения линии излучения лазера на качество работы дифракционных оптических элементов / Р.В. Скиданов, С.Н. Хонина // Оптический журнал. – 2004. – Т. 71, № 7. – С. 62-64.
9. **Алфёров, С.В.** О возможности управления лазерной абляцией при острой фокусировке фемтосекундного излучения / С.В. Алфёров, С.В. Карпеев, С.Н. Хонина, К.Н. Тукмаков, О.Ю. Моисеев, С.А. Шуляпов, К.А. Иванов, А.Б. Савельев-Трофимов // Квантовая электроника. – 2014. – Т. 44, № 11. – С. 1061-1065. – DOI: 10.1070/QE2014v044n11ABEH015471.
10. **Карпеев, С.В.** Исследование влияния широкополосного излучения на распределение интенсивности, формируемое дифракционным оптическим элементом / С.В. Карпеев, С.В. Алфёров, С.Н. Хонина, С.И. Кудряшов // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 4. – С. 689-694.
11. **Davidson, N.** Analytic design of hybrid diffractive-refractive achromats / N. Davidson, A.A. Friesem, E. Hasman // Applied Optics. – 1993. – Vol. 32, Issue 25. – P. 4770-4774. – DOI: 10.1364/AO.32.004770.
12. **Fang, Y.C.** Extended optimization of chromatic aberrations via a hybrid Taguchi-genetic algorithm for zoom optics with a diffractive optical element / Y.C. Fang, T.-K. Liu, C.-M. Tsai, J.-H. Chou, H.-C. Lin, W.T. Lin // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. – 2009. – Vol. 11, Issue 4. – 045706 (14pp). – DOI: 10.1088/1464-4258/11/4/045706.
13. **Sweeney, D.W.** Harmonic diffractive lenses / D.W. Sweeney, G.E. Sommargren // Applied Optics. – 1995. – Vol. 34, Issue 14. – P. 2469-2475. – DOI: 10.1364/AO.34.002469.
14. **Rossi, M.** Refractive and diffractive properties of planar micro-optical elements / M. Rossi, R.E. Kunz, H.P. Herzig // Applied Optics. – 1995. – Vol. 34, Issue 26. – P. 5996-6007. – DOI: 10.1364/AO.34.005996.
15. **Sales, T.R.M.** Diffractive-refractive behavior of kinoform lenses / T.R.M. Sales, G.M. Morris // Applied Optics. – 1997. – Vol. 36, Issue 1. – P. 253-257. – DOI: 10.1364/AO.36.000253.
16. **Харитонов, С.И.** Геометрооптический расчёт фокального пятна гармонической дифракционной линзы / С.И. Харитонов, С.Г. Вологовский, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 3. – С. 331-337. – DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-3-331-337.

Сведения об авторах

Хонина Светлана Николаевна, доктор физико-математических наук, профессор Самарского университета; главный научный сотрудник ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, сингулярная оптика, модовые и поляризационные преобразования, оптическое манипулирование, оптическая и цифровая обработка изображений. E-mail: khonina@smr.ru.

Вологовский Сергей Геннадьевич, 1959 года рождения, в 1984 году окончил Куйбышевский авиационный институт имени академика С.П. Королёва (КуАИ) по специальности «Прикладная математика», работает ведущим программистом в ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: разработка программного обеспечения расчёта и моделирования работы элементов дифракционной оптики. E-mail: sv@smr.ru.

Устинов Андрей Владимирович, 1968 года рождения, в 1991 году окончил Куйбышевский авиационный институт имени академика С.П. Королёва (КуАИ) по специальности «Прикладная математика». Кандидат физико-математических наук (2016 год), работает научным сотрудником в ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, разработка программ моделирования работы оптических элементов; обработка изображений, в частности гидродинамических процессов и биомедицинских изображений. E-mail: andr@smr.ru.

Харитонов Сергей Иванович, 1961 года рождения. Доктор физико-математических наук, доцент кафедры технической кибернетики, старший научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. 1984 г. – окончил физический факультет Самарского государственного университета. 1993 г. – защитил кандидатскую диссертацию на тему «Асимптотические методы дифракционного расчёта фокусаторов лазерного излучения». 2010 г. – защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические методы расчёта дифракции когерентного электромагнитного излучения на дифракционных оптических элементах». Область научных интересов: дифракционная, квантовая оптика, физика плазмы. В списке научных работ С.И. Харитонова 87 статей, 5 авторских свидетельств и патентов. E-mail: prognoz2007@gmail.com.

ГРНТИ: 29.31.15, 29.31.29

Поступила в редакцию 30 мая 2017 г. Окончательный вариант – 6 июня 2017 г.

ANALYSIS OF FOCUSING LIGHT BY A HARMONIC DIFFRACTIVE LENS WITH REGARD FOR THE REFRACTIVE INDEX DISPERSION

S.N. Khonina^{1,2}, S.G. Volotovskiy¹, A.V. Ustinov¹, S.I. Kharitonov^{1,2}

¹ Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Samara, Russia,

² Samara National Research University, Samara, Russia

Abstract

The work is devoted to the theoretical and numerical investigation of the focusing properties of a harmonic lens with due regard for the refractive index dispersion. It is shown that the harmonic lens has hybrid refractive-diffractive properties, which are expressed not only in the appearance of additional local foci, but also in the displacement of the main focus even for aliquot wavelengths. The latter effect arises precisely because of the dispersion of the refractive index of the lens material.

Keywords: harmonic diffractive lens, Fresnel transform, diffraction orders, chromatism.

Citation: Khonina SN, Volotovskiy SG, Ustinov AV, Kharitonov SI. Analysis of focusing light by a harmonic diffractive lens with regard for the refractive index dispersion. *Computer Optics* 2017; 41(3): 338-347. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-3-338-347.

Acknowledgement: This work was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 16-29-11744-ofi_m).

References

- | | |
|---|--|
| <p>[1] Soifer VA, ed. <i>Computer Design of Diffractive Optics</i>. Cambridge Inter Scien Pub Ltd & Woodhead Pub Ltd; 2012.</p> <p>[2] Soifer VA, ed. <i>Diffractive Nanophotonics</i>. Boca Raton: CRC Press, Taylor&Francis Group, CISP; 2014.</p> <p>[3] Aieta F, Kats MA, Genevet P, Capasso F. Multiwavelength achromatic metasurfaces by dispersive phase compensation. <i>Science</i> 2015; 347(6228): 1342-1345. DOI: 10.1126/science.aaa2494.</p> <p>[4] Swanson GJ. <i>Binary optics technology: the theory and design of multi-level diffractive optical elements</i>. Lexington, Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, Lincoln Laboratory; 1989.</p> <p>[5] Bobrov ST, Greysukh GI, Turkevich YuG. Optics of diffractive elements and systems [In Russian]. Leningrad: "Mashinostroenie" Publisher; 1986.</p> <p>[6] Greysukh GI, Ezhov EG, Stepanov SA. Comparative analysis of the chromatism of diffractive and refractive lenses [In Russian]. <i>Computer Optics</i> 2005; 28: 60-65.</p> <p>[7] Kazanskii NL, Khonina SN, Skidanov RV, Morozov AA, Kharitonov SI, Volotovskiy SG. Formation of images using multi-level diffractive lens [In Russian]. <i>Computer Optics</i> 2014; 38(3): 425-434.</p> <p>[8] Skidanov RV, Khonina SN. How processing errors and broadening of the emission line of a laser affect the operating quality of diffractive optical elements. <i>Journal of Optical Technology</i> 2004; 71(7): 469-471. DOI: 10.1364/JOT.71.000469.</p> <p>[9] Alferov SV, Karpeev SV, Khonina SN, Tukmakov KN, Moiseev OYu, Shulyapov SA, Ivanov KA, Savel'ev-</p> | <p>Trofimov AB. On the possibility of controlling laser ablation by tightly focused femtosecond radiation. <i>Quantum Electronics</i> 2014; 44(11): 1061-1065. DOI: 10.1070/QE2014v044n11ABEH015471.</p> <p>[10] Karpeev SV, Alferov SV, Khonina SN, Kudryashov SI. Study of the broadband radiation intensity distribution formed by diffractive optical elements. <i>Computer Optics</i> 2014; 38(4): 689-694.</p> <p>[11] Davidson N, Friesem AA, Hasman E. Analytic design of hybrid diffractive-refractive achromats. <i>Applied Optics</i> 1993; 32(25): 4770-4774. DOI: 10.1364/AO.32.004770.</p> <p>[12] Fang YC, Liu T-K, Tsai C-M, Chou J-H, Lin H-C, Lin WT. Extended optimization of chromatic aberrations via a hybrid Taguchi-genetic algorithm for zoom optics with a diffractive optical element. <i>Journal of Optics A: Pure and Applied Optics</i> 2009; 11(4): 045706. DOI: 10.1088/1464-4258/11/4/045706.</p> <p>[13] Sweeney DW, Sommargen GE. Harmonic diffractive lenses. <i>Applied Optics</i> 1995; 34(14): 2469-2475. DOI: 10.1364/AO.34.002469.</p> <p>[14] Rossi M, Kunz RE, Herzig HP. Refractive and diffractive properties of planar micro-optical elements. <i>Appl Opt</i> 1995; 34(26): 5996-6007. DOI: 10.1364/AO.34.005996.</p> <p>[15] Sales TRM, Morris GM. Diffractive-refractive behavior of kinoform lenses. <i>Appl Opt</i> 1997; 36(1): 253-257. DOI: 10.1364/AO.36.000253.</p> <p>[16] Kharitonov SI, Volotovskiy SG, Khonina SN. Geometric-optical calculation of the focal spot of a harmonic diffractive lens. <i>Computer Optics</i> 2016; 40(3): 331-337. DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-3-331-337.</p> |
|---|--|

Authors' information

Svetlana Nikolaevna Khonina, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; Professor of Samara National Research University. Main researcher of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. Research interests: diffractive optics, singular optics, mode and polarization transformations, optical manipulating, optical and digital image processing. E-mail: khonina@smr.ru.

Sergey Gennadjevich Volotovskiy (b. 1959) graduated from Kuibyshev Aviation Institute named after academician S.P. Korolyov (KuAI) on a specialty “Applied Mathematics”, works as the leading programmer in the IPSI RAS –

Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. Research interests: software design, modeling of systems with diffractive optical elements. E-mail: sv@smr.ru .

Andrey Vladimirovich Ustinov, (b. 1968) graduated from Kuibyshev Aviation Institute named after academician S.P. Korolyov (KuAI) on a specialty “Applied Mathematics” in 1991. Candidate of Physical and Mathematical Sciences (2016), works as the researcher in the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. Research interests: diffractive optics; software design for modeling of optical elements operating; images processing, particularly images of hydrodynamic processes and biomedical images. E-mail: andr@smr.ru .

Sergey Ivanovich Kharitonov, leading researcher of Diffractive Optics laboratory in the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. Doctor of Physical and Mathematical Sciences. 1984 – graduated from Physics department of Samara State University. 1993 – defended his dissertation "Asymptotic methods of calculation of the diffraction of laser radiation focuser". 2010 – defended his doctoral thesis on "Asymptotic methods for calculating the diffraction of coherent electromagnetic radiation in diffractive optical elements". Research interests: diffraction, quantum optics, plasma physics. The list of scientific papers S.I. Kharitonov's 87 articles, 5 patents.

Received May 30, 2017. The final version – June 6, 2017.
