

ВАРИАЦИОННАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАДАЧИ РАСЧЁТА ФУНКЦИИ ЭЙКОНАЛА ИЗ УСЛОВИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ЗАДАННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОСВЕЩЁННОСТИ

А.А. Мингазов^{1,2}, Д.А. Быков^{1,2}, Л.Л. Досколович^{1,2}, Н.Л. Казанский^{1,2}

¹ ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,

443001, Россия, Самарская область, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,

443086, Россия, Самарская область, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

Задача расчёта функции эйконала светового поля, заданной на некоторой поверхности, из условия формирования заданного распределения освещённости на некоторой другой заданной поверхности сформулирована как задача Монжа–Канторовича о перемещении масс. Получено, что функция стоимости в задаче о перемещении масс соответствует расстоянию между точкой исходной поверхности, на которой задана функция эйконала, и точкой поверхности, на которой требуется сформировать заданное распределение освещённости. Получено аналитическое выражение для градиента «функционала стоимости», описывающего задачу о перемещении масс. Это позволяет использовать для расчёта функции эйконала методы градиентного спуска.

Ключевые слова: геометрическая оптика, неизображающая оптика, обратная задача, функция эйконала, задача Монжа–Канторовича о перемещении масс.

Цитирование: Мингазов, А.А. Вариационная интерпретация задачи расчёта функции эйконала из условия формирования заданного распределения освещённости / А.А. Мингазов, Д.А. Быков, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 4. – С. 568-573. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-568-573.

Введение

Задача расчёта оптического элемента из условия формирования заданного распределения освещённости в некоторой области относится к классу обратных задач неизображающей оптики и является крайне сложной. В большинстве случаев данная задача сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения эллиптического типа. Наиболее простым уравнением данного типа является уравнение Монжа–Ампера, которое описывает обратную задачу расчёта функции эйконала светового поля из условия фокусировки в заданную область в паракиальном приближении [1]. Данная задача является важной при расчёте дифракционных оптических элементов [2]. Кроме того, по функции эйконала может быть восстановлена рефракционная или отражающая оптическая поверхность, что позволяет по функции эйконала рассчитать преломляющий или отражающий оптический элемент [3].

В последние годы были предложены методы расчёта оптических поверхностей, основанные на численном решении уравнений типа Монжа–Ампера конечно-разностными методами [4–9]. В рамках данных методов производные заменяются конечно-разностными аппроксимациями и решение уравнения сводится к решению системы нелинейных уравнений относительно значений искомой функции, описывающей оптическую поверхность и заданной на некоторой сетке. В зависимости от сложности задачи, система содержит от нескольких тысяч до нескольких десятков тысяч нелинейных уравнений. Для решения полученной системы используются итерационные методы, например, метод Ньютона. Общим недостатком такого подхода является высокая вычислительная сложность задачи решения системы нелинейных уравнений, а также выбор начального приближения для решения системы.

Другой перспективный подход к решению задач неизображающей оптики состоит в формулировке обратной задачи как задачи Монжа–Канторовича о перемещении масс со специальной функцией стоимости [1]. Действительно, в дискретном варианте задача о перемещении масс (ЗПМ) может быть сформулирована как линейная задача о назначениях (ЛЗН) [10]. Для решения ЛЗН предложены эффективные алгоритмы (венгерский алгоритм [10], алгоритм Джонкера–Волгенанта [11], алгоритм аукциона [12]), решающие задачу за полиномиальное время. В ряде случаев решение задач неизображающей оптики через решение ЛЗН оказывается значительно более эффективным с вычислительной точки зрения, чем численное решение уравнения типа Монжа–Ампера [1]. Вид функции стоимости определяется типом решаемой задачи. В частности, для обратной задачи расчёта функции эйконала в паракиальном приближении функция стоимости является квадратичной [1]: $\rho_{\text{пар}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2$. Здесь предполагается, что искомая функция эйконала и заданное распределение освещённости заданы в двух параллельных плоскостях $z=0$ и $z=f$, где $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ и $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ – декартовы координаты в данных плоскостях. В работах [1, 13] авторов данной статьи было показано, что в задаче расчёта функции эйконала в общем непаракиальном случае функция стоимости не является квадратичной, а равна расстоянию

$$\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{f^2 + (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2}$$

между точкой $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ исходной плоскости, в которой задана функция эйконала, и точкой $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ плоскости фокусировки. В настоящей статье этот результат обобщён на случай, когда искомая функция эйконала и требуемое распределение освещённости заданы на некоторых криволинейных поверхностях S

и W . Доказательство основано на вычислении первой вариации функционала «стоимости», описывающего ЗПМ с неквадратичной функцией стоимости $\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ и зависящего от лучевого отображения между указанными поверхностями S и W . При этом показано, что условие равенства нулю первой вариации данного функционала равносильно тому, что лучевое соответствие сохраняет энергию и задаётся функцией эйконала на поверхности S .

Данный результат, помимо теоретической значимости, имеет ряд важных практических применений (не рассматриваются в рамках данной статьи). Во-первых, как отмечено выше, это позволяет свести решение обратной задачи функции эйконала, заданной на криволинейной поверхности, к решению ЛЗН. Во-вторых, установленные вид первой вариации и градиента функционала стоимости дают возможность рассчитывать функцию эйконала, обеспечивающую формирование заданного распределения освещённости, с помощью методов градиентного спуска.

1. Формулировка задачи расчёта функции эйконала на поверхности

Пусть имеются две поверхности S и W , заданные уравнениями $z=g(x, y)$, $(x, y) \in \Omega \in \mathbb{R}^2$ и $z=f(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ в декартовой системе координат $\mathbf{x}=(x, y, z)$. Будем считать, что поверхность W расположена над поверхностью S : $f(x, y) > g(x, y)$ (рис. 1). Далее будем обозначать координаты (x, y) точек на поверхностях S и W векторами $\mathbf{u}=(u_1, u_2)$ и $\mathbf{v}=(v_1, v_2)$ соответственно. Для дальнейших рассуждений нам будет удобно полагать, что точки \mathbf{u} и \mathbf{v} заданы в отдельных двумерных системах координат (рис. 1).

Будем считать, что на первой поверхности заданы функция эйконала $\Phi(\mathbf{u})$ и функция распределения освещённости $E_0(\mathbf{u})$. Обозначим $\mathbf{p}(\mathbf{u})=(p_1(\mathbf{u}), p_2(\mathbf{u}), p_3(\mathbf{u}))$ вектор луча для среды с показателем преломления $n=1$, определяемый функцией эйконала $\Phi(\mathbf{u})$, заданной на поверхности S . Согласно уравнению эйконала, вектор луча $\mathbf{p}(\mathbf{u})$, исходящего из точки поверхности S , является единичным и определяется через производные функции эйконала из следующей системы уравнений [14]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(\mathbf{u})}{\partial u_1} = p_1(\mathbf{u}) + p_3(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial g(\mathbf{u})}{\partial u_1}, \\ \frac{\partial \Phi(\mathbf{u})}{\partial u_2} = p_2(\mathbf{u}) + p_3(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial g(\mathbf{u})}{\partial u_2}, \\ p_3(\mathbf{u}) = \sqrt{1 - (p_1(\mathbf{u}))^2 - (p_2(\mathbf{u}))^2}. \end{cases} \quad (1)$$

Функция эйконала $\Phi(\mathbf{u})$ задаёт «лучевое» отображение $\mathbf{P}_\Phi: \mathbf{u} \mapsto \mathbf{v}$ следующим образом. Образом точки $\mathbf{u} \in \Omega$ является точка \mathbf{v} , соответствующая пересечению луча, исходящего из точки $(\mathbf{u}, g(\mathbf{u})) \in S$, с поверхностью W (рис. 1).

Определение. Пусть задано некоторое отображение $\mathbf{P}: \Omega \rightarrow \Theta$. Будем говорить, что \mathbf{P} интегрируемо, если существует функция $\Phi(\mathbf{u})$ на Ω такая, что $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\Phi$.

Сформулируем условие интегрируемости в удобном для дальнейших выкладок виде. Отображение \mathbf{P} переводит точку $(\mathbf{u}, g(\mathbf{u}))$ поверхности S в точку $(\mathbf{P}(\mathbf{u}), f(\mathbf{P}(\mathbf{u})))$ поверхности W . Рассмотрим вектор $\mathbf{t}=(\mathbf{P}(\mathbf{u})-\mathbf{u}, f(\mathbf{P}(\mathbf{u}))-g(\mathbf{u}))$. Обозначим его длину за $\rho(\mathbf{u}, \mathbf{P}(\mathbf{u}))$, разделим на неё и получим вектор единичной длины:

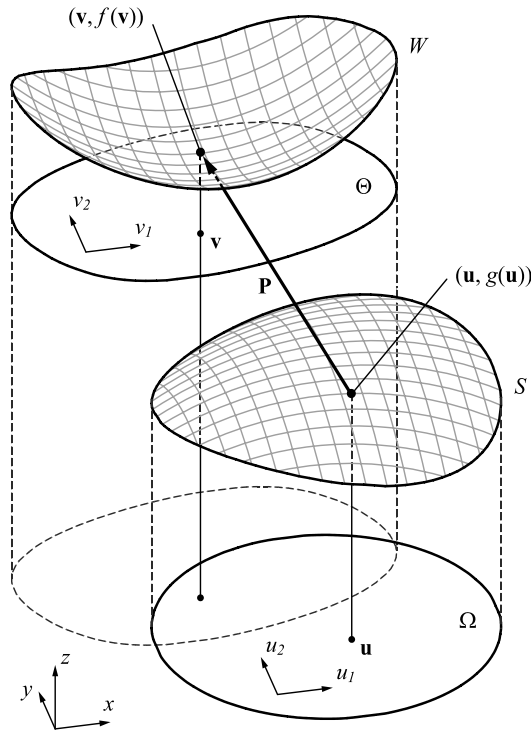


Рис. 1. Геометрия задачи

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \frac{(\mathbf{P}(\mathbf{u})-\mathbf{u}, f(\mathbf{P}(\mathbf{u}))-g(\mathbf{u}))}{\rho(\mathbf{u}, \mathbf{P}(\mathbf{u}))}.$$

Если отображение \mathbf{P} задаётся функцией эйконала $\Phi(\mathbf{u})$, то из (1) получим условие интегрируемости в виде:

$$\nabla \Phi(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{u})-\mathbf{u}}{\rho(\mathbf{u}, \mathbf{P}(\mathbf{u}))} + \nabla g(\mathbf{u}) \cdot \frac{f(\mathbf{P}(\mathbf{u}))-g(\mathbf{u})}{\rho(\mathbf{u}, \mathbf{P}(\mathbf{u}))}, \quad (2a)$$

где $\nabla=(\partial/\partial u_1, \partial/\partial u_2)$ – оператор градиента. Отметим, что в силу симметричности задачи относительно поверхностей S и W условие интегрируемости для обратного отображения \mathbf{P}^{-1} имеет аналогичный вид:

$$\begin{aligned} \nabla \Psi(\mathbf{v}) &= \frac{\mathbf{v}-\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{v})}{\rho(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{v}), \mathbf{v})} + \\ &+ \nabla f(\mathbf{v}) \cdot \frac{f(\mathbf{v})-g(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{v}))}{\rho(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{v}), \mathbf{v})}. \end{aligned} \quad (2b)$$

Здесь $\Psi(\mathbf{v})$ – это эйконал на второй поверхности, обеспечивающий формирование распределения освещённости $E_0(\mathbf{u})$ на первой поверхности.

Сформулируем задачу расчёта функции эйконала $\Phi(\mathbf{u})$ из условия формирования заданного распределения освещённости $E(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in \Theta \subset \mathbb{R}^2$ на второй поверхности W (рис. 1).

Требуется найти функцию эйконала $\Phi(\mathbf{u})$, задающую отображение $\mathbf{P}_\Phi: \Omega \rightarrow \Theta$ такое, что для любого измеримого множества $\omega \subset \Theta$ должно выполняться условие сохранения светового потока

$$\int_{\mathbf{P}_\Phi^{-1}(\omega)} E_0(\mathbf{u}) dS = \int_\omega E(\mathbf{v}) dW, \tag{3}$$

где $dS = \sqrt{1 + [\nabla g(\mathbf{u})]^2} d\mathbf{u}$ и $dW = \sqrt{1 + [\nabla f(\mathbf{v})]^2} d\mathbf{v}$ – дифференциалы площади поверхностей, а $d\mathbf{u}$ и $d\mathbf{v}$ обозначают $du_1 du_2$ и $dv_1 dv_2$ соответственно. Делая во втором интеграле в (3) замену $\mathbf{v} = \mathbf{P}_\Phi(\mathbf{u})$, получим

$$\int_{\mathbf{P}_\Phi^{-1}(\omega)} E_0(\mathbf{u}) G(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \int_{\mathbf{P}_\Phi^{-1}(\omega)} E(\mathbf{P}_\Phi(\mathbf{u})) F(\mathbf{P}_\Phi(\mathbf{u})) J_{\mathbf{P}_\Phi}(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \tag{4}$$

где $G(\mathbf{u}) = \sqrt{1 + [\nabla g(\mathbf{u})]^2}$, $F(\mathbf{v}) = \sqrt{1 + [\nabla f(\mathbf{v})]^2}$, а $J_{\mathbf{P}_\Phi}(\mathbf{u})$ – якобиан преобразования координат $(v_1, v_2) = (P_{1,\Phi}(\mathbf{u}) - P_{2,\Phi}(\mathbf{u}))$:

$$J_{\mathbf{P}_\Phi}(\mathbf{u}) = \left| \frac{\partial P_{1,\Phi}}{\partial u_1} \frac{\partial P_{2,\Phi}}{\partial u_2} - \frac{\partial P_{1,\Phi}}{\partial u_2} \frac{\partial P_{2,\Phi}}{\partial u_1} \right|.$$

В дифференциальном виде условие сохранения светового потока (4) примет вид

$$E_0(\mathbf{u}) G(\mathbf{u}) = E(\mathbf{P}_\Phi(\mathbf{u})) F(\mathbf{P}_\Phi(\mathbf{u})) J_{\mathbf{P}_\Phi}(\mathbf{u}), \tag{5a}$$

или, в терминах обратного отображения,

$$E_0(\mathbf{P}_\Phi^{-1}(\mathbf{v})) G(\mathbf{P}_\Phi^{-1}(\mathbf{v})) J_{\mathbf{P}_\Phi^{-1}}(\mathbf{v}) = E(\mathbf{v}) F(\mathbf{v}). \tag{5b}$$

Таким образом, задача расчёта функции эйконала $\Phi(\mathbf{u})$ сводится к решению уравнения (5a), где отображение $\mathbf{P}_\Phi(\mathbf{u})$ определяется уравнениями (1).

2. Задача о перемещении масс

Покажем, что сформулированная задача расчёта функции эйконала может быть сформулирована как задача Монжа–Канторовича о перемещении масс (ЗПМ) с функцией стоимости

$$\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 + (f(\mathbf{v}) - g(\mathbf{u}))^2}, \tag{6}$$

равной расстоянию между соответствующими точками поверхностей S и W . Для формулировки данной ЗПМ введём понятие плана (плана перевозки). Планом будем называть некоторое биективное дифференцируемое отображение $\mathbf{P}: \Omega \rightarrow \Theta$, сохраняющее меру (световой поток) в смысле соотношения (5a). Определим следующий функционал на множестве планов:

$$\mathcal{I}(\mathbf{P}) = \int_\Omega \rho(\mathbf{u}, \mathbf{P}(\mathbf{u})) G(\mathbf{u}) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u}. \tag{7}$$

Решение ЗПМ состоит в определении отображения \mathbf{P} , минимизирующего (или максимизирующего) функционал (7) при условии (5a). Согласно [15] для отыскания экстремума функционала $\mathcal{I}(\mathbf{P})$ при условии (5) (при ограничении типа равенство) можно использовать метод множителей Лагранжа. Согласно этому методу условный экстремум функционала (7) является безусловным экстремумом следующего функционала:

$$\mathcal{G}(\mathbf{P}, \lambda) = \int_\Omega \left[\rho(\mathbf{u}, \mathbf{P}(\mathbf{u})) G(\mathbf{u}) E_0(\mathbf{u}) + \lambda(\mathbf{u}) \left(E(\mathbf{P}(\mathbf{u})) F(\mathbf{P}(\mathbf{u})) J_{\mathbf{P}}(\mathbf{u}) - E_0(\mathbf{u}) G(\mathbf{u}) \right) \right] d\mathbf{u}. \tag{8}$$

Отметим, что в статье [16] (параграф 2.1) приведено вычисление вариации аналогичного функционала с квадратичной функцией стоимости. Мы проделаем вычисление значительно проще, сначала преобразовав данный функционал.

Перейдём во втором слагаемом функционала (8) к интегрированию по переменной \mathbf{v} (то есть сделаем замену переменной $\mathbf{u} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{v})$) и сделаем подстановку $\lambda(\mathbf{u}) = \mu(\mathbf{P}(\mathbf{u}))$. В результате получим новый функционал, зависящий от функций \mathbf{P} и μ :

$$\mathcal{F}(\mathbf{P}, \mu) = \int_\Omega \rho(\mathbf{u}, \mathbf{P}(\mathbf{u})) G(\mathbf{u}) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u} + \int_\Theta \mu(\mathbf{v}) \left(E(\mathbf{v}) F(\mathbf{v}) - E_0(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{v})) G(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{v})) J_{\mathbf{P}^{-1}}(\mathbf{v}) \right) d\mathbf{v}. \tag{9}$$

Выделяя в (9) интеграл от слагаемого, содержащего якобиан обратного отображения, и переходя в нём к интегрированию по переменной \mathbf{u} , получим следующую удобную для дальнейшего анализа форму функционала, не содержащую якобиан и обратное отображение \mathbf{P}^{-1} :

$$\mathcal{F}(\mathbf{P}, \mu) = \int_\Omega \left[\rho(\mathbf{u}, \mathbf{P}(\mathbf{u})) - \mu(\mathbf{P}(\mathbf{u})) \right] G(\mathbf{u}) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u} + \int_\Theta \mu(\mathbf{v}) E(\mathbf{v}) F(\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \tag{10}$$

Вычислим первые вариации функционала $\mathcal{F}(\mathbf{P}, \mu)$ по \mathbf{P} и μ . Вариация по μ вычисляется сразу из формулы (9). Действительно, если $\mu_\varepsilon(\mathbf{v}) = \mu(\mathbf{v}) + \varepsilon \cdot \eta(\mathbf{v})$, то

$$\delta_\mu \mathcal{F}(\mathbf{P}, \mu) = \varepsilon \int_\Theta \left[E(\mathbf{v}) F(\mathbf{v}) - E_0(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{v})) G(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{v})) J_{\mathbf{P}^{-1}}(\mathbf{v}) \right] \eta(\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \tag{11}$$

Чтобы вычислить вариацию по \mathbf{P} , воспользуемся представлением (10). Пусть $\mathbf{P}_\varepsilon(\mathbf{u}) = \mathbf{P}(\mathbf{u}) + \varepsilon \cdot \omega(\mathbf{u})$. Раскладывая выражение $\mathcal{F}(\mathbf{P}_\varepsilon, \mu)$ в ряд Тейлора по переменной ε , получим

$$\mathcal{F}(\mathbf{P}_\varepsilon, \mu) = \mathcal{F}(\mathbf{P}, \mu) + \int_\Omega \left\langle \nabla_{\mathbf{v}} \rho(\mathbf{u}, \mathbf{P}(\mathbf{u})) - \nabla_{\mathbf{v}} \mu(\mathbf{P}(\mathbf{u})), \varepsilon \omega(\mathbf{u}) \right\rangle G(\mathbf{u}) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u} + o(\varepsilon), \tag{12}$$

где угловые скобки обозначают скалярное произведение, а $\nabla_{\mathbf{v}} \mu(\mathbf{P}(\mathbf{u}))$ и $\nabla_{\mathbf{v}} \rho(\mathbf{u}, \mathbf{P}(\mathbf{u}))$ обозначают градиенты функций $\mu(\mathbf{v})$ и $\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ по переменной $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, в которых после вычисления полагается $\mathbf{v} = \mathbf{P}(\mathbf{u})$. С учётом (12), вариация по \mathbf{P} записывается в виде

$$\delta_{\mathbf{P}} \mathcal{F}(\mathbf{P}, \mu) = \varepsilon \int_\Omega \left\langle \nabla_{\mathbf{v}} \rho(\mathbf{u}, \mathbf{P}(\mathbf{u})) - \nabla_{\mathbf{v}} \mu(\mathbf{P}(\mathbf{u})), \omega(\mathbf{u}) \right\rangle G(\mathbf{u}) E_0(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \tag{13}$$

где градиент функции стоимости вычисляется из формулы (6) как

$$\nabla_{\mathbf{v}}\rho(\mathbf{u}, \mathbf{P}(\mathbf{u})) = \frac{-\mathbf{(u - P(u))} + [f(\mathbf{P}(\mathbf{u})) - g(\mathbf{u})]\nabla_{\mathbf{v}}f(\mathbf{P}(\mathbf{u}))}{\rho(\mathbf{u}, \mathbf{P}(\mathbf{u}))} \quad (14)$$

3. Связь вариационной задачи с задачей расчёта функции эйконала

Предположим, что для пары (\mathbf{P}, μ) обе первых вариации равны нулю

$$\begin{cases} \delta_{\mathbf{P}}\mathcal{F}(\mathbf{P}, \mu) = 0, \\ \delta_{\mu}\mathcal{F}(\mathbf{P}, \mu) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Поскольку в (11) $\varepsilon > 0$, а $\eta(\mathbf{v})$ – произвольная функция, то из второго уравнения в (15) сразу следует условие сохранения энергии (5b). Из первого уравнения системы (15) и уравнений (13), (14) следует следующее уравнение:

$$\left[\frac{\mathbf{P}(\mathbf{u}) - \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{v}}f(\mathbf{P}(\mathbf{u}))(f(\mathbf{P}(\mathbf{u})) - g(\mathbf{u}))}{\rho(\mathbf{P}(\mathbf{u}), \mathbf{u})} - \nabla_{\mathbf{v}}\mu(\mathbf{P}(\mathbf{u})) \right] E_0(\mathbf{u})G(\mathbf{u}) = 0.$$

Сделаем в последнем уравнении замену $\mathbf{P}(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ и, с учётом условия $E_0(\mathbf{u}) \cdot G(\mathbf{u}) > 0$, получим

$$\frac{\mathbf{v} - \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{v})}{\rho(\mathbf{v}, \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{v}))} + \nabla f(\mathbf{v}) \cdot \frac{f(\mathbf{v}) - g(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{v}))}{\rho(\mathbf{v}, \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{v}))} = \nabla\mu(\mathbf{v}). \quad (16)$$

Полученное уравнение (16) в точности соответствует условию интегрируемости отображения \mathbf{P}^{-1} , приведённому в уравнении (2b). При этом в качестве функции эйконала на второй поверхности $\Psi(\mathbf{v})$ берётся функция $\mu(\mathbf{v})$, обеспечивающая выполнение условия (16). В силу симметричности задачи относительно поверхностей S и W , условие интегрируемости верно и для «прямого» отображения \mathbf{P} . Интегрируемость \mathbf{P} , очевидно, влечёт равенство нулю первой вариации функционала. Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема. Отображение $\mathbf{P}: \Omega \rightarrow \Theta$ является интегрируемым тогда и только тогда, когда существует функция $\mu(\mathbf{v})$ на Θ , такая, что пара (\mathbf{P}, μ) является критической точкой функционала (9). При этом $\mu(\mathbf{v})$ является функцией эйконала обратного отображения.

Из данной теоремы следует, что не только условный минимум или максимум исходного функционала (7) даёт интегрируемое лучевое соответствие, но и любой локальный экстремум или критическая точка этого функционала.

Отметим, что в статье [1] для нахождения функции эйконала используется частный случай вышеприведённой теоремы, когда поверхность S является плоскостью $z = 0$, а W – плоскостью $z = f$.

4. Градиентный метод

В данном параграфе мы опишем численный метод, позволяющий рассчитать функцию эйконала из

условия формирования заданного распределения освещённости. Согласно формулам (11), (13) градиент функционала (9) имеет вид:

$$\nabla_{\mu}\mathcal{F}(\mathbf{P}, \mu) = E(\mathbf{v}) \cdot F(\mathbf{v}) - E_0(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{v}))G(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{v}))J_{\mathbf{P}^{-1}}(\mathbf{v}), \quad (17a)$$

$$\nabla_{\mathbf{P}}\mathcal{F}(\mathbf{P}, \mu) = \left[\frac{\mathbf{P}(\mathbf{u}) - \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{v}}f(\mathbf{P}(\mathbf{u}))(f(\mathbf{P}(\mathbf{u})) - g(\mathbf{u}))}{\rho(\mathbf{P}(\mathbf{u}), \mathbf{u})} - \nabla_{\mathbf{v}}\mu(\mathbf{P}(\mathbf{u})) \right] E_0(\mathbf{u})G(\mathbf{u}). \quad (17b)$$

Полученный градиент функционала позволяет найти локальный минимум функционала (9) методом градиентного спуска. Пусть у нас есть некоторое начальное приближение (\mathbf{P}_0, μ_0) . Чтобы получить новое приближение, нужно вычесть из него градиент функционала, вычисленный на нём. Другими словами, n -е приближение вычисляется по $(n-1)$ -му по следующей формуле

$$\begin{aligned} \mu_n(\mathbf{v}) &= \mu_{n-1}(\mathbf{v}) - \Delta t \cdot \nabla_{\mu}\mathcal{F}(\mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{u}), \mu_{n-1}(\mathbf{v})), \\ \mathbf{P}_n(\mathbf{u}) &= \mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{u}) - \Delta t \cdot \nabla_{\mathbf{P}}\mathcal{F}(\mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{u}), \mu_{n-1}(\mathbf{v})), \end{aligned} \quad (18)$$

где Δt – шаг градиентного спуска. В точке минимума, найденной градиентным методом (18), функция $\mu(\mathbf{v})$ соответствует функции эйконала на второй поверхности. Соответственно функция эйконала на первой поверхности может быть вычислена по формуле $\Phi(\mathbf{u}) = \mu(\mathbf{P}(\mathbf{u})) - \rho(\mathbf{u}, \mathbf{P}(\mathbf{u}))$.

Заключение

Рассмотрена задача расчёта функции эйконала светового поля, заданной на некоторой поверхности, из условия формирования заданного распределения освещённости на некоторой другой заданной поверхности. Показано, что данная задача может быть сформулирована как задача Монжа–Канторовича о перемещении масс. При этом доказано, что функция стоимости в задаче о перемещении масс соответствует расстоянию между точкой исходной поверхности, на которой задана функция эйконала, и точкой поверхности, на которой требуется сформировать заданное распределение освещённости. Доказательство основано на вычислении первой вариации функционала «стоимости», описывающего задачу о перемещении масс. Установленные вид первой вариации и градиента функционала стоимости позволяют использовать для расчёта функции эйконала, формирующей заданное распределение освещённости на заданной поверхности, методы градиентного спуска.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 18-19-00326 (формулировка задачи расчёта функции эйконала как задачи Монжа–Канторовича о перемещении масс и получение функции стоимости) и Федерального агентства научных организаций (соглашение № 007-ГЗ/Ч3363/26) (градиентный метод расчёта функции эйконала).

Литература

1. **Doskolovich, L.L.** Variational approach to calculation of light field eikonal function for illuminating a prescribed region / L.L. Doskolovich, A.A. Mingazov, D.A. Bykov, E.S. Andreev, E.A. Bezus // *Optics Express*. – 2017. – Vol. 25, Issue 22. – P. 26378-26392. – DOI: 10.1364/OE.25.026378.
2. **Soifer, V.** Iterative methods for diffractive optical elements computation / V. Soifer, V. Kotlyar, L. Doskolovich. – London: Taylor & Francis Ltd., 1997. – 245 p. – ISBN: 0-7484-0634-4.
3. **Doskolovich, L.L.** Analytic design of optical elements generating a line focus / L.L. Doskolovich, A.Yu. Dmitriev, S.I. Kharitonov // *Optical Engineering*. – 2013. – Vol. 52, Issue 9. – 091707. – DOI: 10.1117/1.OE.52.9.091707.
4. **Wu, R.** A mathematical model of the single freeform surface design for collimated beam shaping / R. Wu, P. Liu, Y. Zhang, Zh. Zheng, H. Li, X. Liu // *Optics Express*. – 2013. – Vol. 21, Issue 18. – P. 20974-20989. – DOI: 10.1364/OE.21.020974.
5. **Wu, R.** Freeform illumination design: a nonlinear boundary problem for the elliptic Monge–Ampère equation / R. Wu, L. Xu, P. Liu, Y. Zhang, Zh. Zheng, H. Li, X. Liu // *Optics Letters*. – 2013. – Vol. 38, Issue 2. – P. 229-231. – DOI: 10.1364/OL.38.000229.
6. **Wu, R.** Initial design with L2 Monge–Kantorovich theory for the Monge–Ampère equation method in freeform surface illumination design / R. Wu, Y. Zhang, M.M. Sulman, Zh. Zheng, P. Benítez, J.C. Miñano // *Optics Express*. – 2014. – Vol. 22, Issue 13. – P. 16161-16177. – DOI: 10.1364/OE.22.016161.
7. **Ma, Y.** Hybrid method of free-form lens design for arbitrary illumination target / Y. Ma, H. Zhang, Z. Su, Y. He, L. Xu, X. Lui, H. Li // *Applied Optics*. – 2015. – Vol. 54, Issue 14. – P. 4503-4508. – DOI: 10.1364/AO.54.004503.
8. **Bösel, C.** Ray mapping approach for the efficient design of continuous freeform surfaces / C. Bösel, H. Gross // *Optics Express*. – 2016. – Vol. 24, Issue 13. – P. 14271-14282. – DOI: 10.1364/OE.24.014271.
9. **Wu, R.** Formulating the design of two freeform lens surfaces for point-like light sources / R. Wu, S. Chang, Zh. Zheng, L. Zhao, X. Liu // *Optics Letters*. – 2018. – Vol. 43, Issue 7. – P. 1619-1622. – DOI: 10.1364/OL.43.001619.
10. **Munkres, J.** Algorithms for the assignment and transportation problems / J. Munkres // *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. – 1957. – Vol. 5, Issue 1. – P. 32-38. – DOI: 10.1137/0105003.
11. **Jonker, R.** A shortest augmenting path algorithm for dense and sparse linear assignment problems / R. Jonker, A. Volgenant // *Computing*. – 1987. – Vol. 38, Issue 4. – P. 325-340. – DOI: 10.1007/BF02278710.
12. **Bertsekas, D.P.** The auction algorithm: A distributed relaxation method for the assignment problem / D.P. Bertsekas // *Annals of Operations Research*. – 1988. – Vol. 14, Issue 1. – P. 105-123. – DOI: 10.1007/BF02186476.
13. **Досколович, Л.Л.** Вариационный подход к расчёту функции эйконала / Л.Л. Досколович, А.А. Мингазов, Д.А. Быков, Е.С. Андреев // *Компьютерная оптика*. – 2018. – Т. 42, № 4. – С. 557-567. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-557-567.
14. **Кравцов, Ю.А.** Геометрическая оптика неоднородных сред / Ю.А. Кравцов, Ю.И. Орлов. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
15. **Evans, L.C.** Partial differential equations and Monge–Kantorovich mass transfer / L.C. Evans. – In: *Current developments in mathematics, 1997* / ed. by R. Bott, A. Jaffe, D. Jerison, G. Lusztig, I. Singer, Sh.-T. Yau. – Boston, MA: International Press of Boston, Inc., 1998. – P. 65-126. – DOI: 10.4310/CDM.1997.v1997.n1.a2.
16. **Богачёв, В.И.** Задача Монжа–Канторовича: достижения, связи и перспективы / В.И. Богачёв, А.В. Колесников // *Успехи математических наук*. – 2012. – Т. 67, Вып. 5. – С. 3-110. – DOI: 10.4213/rm9490.

Сведения об авторах

Сведения об авторах **Мингазов Альберт Айдарович** и **Быков Дмитрий Александрович** см. стр. 566 этого выпуска.

Сведения об авторе **Досколович Леонид Леонидович** см. стр. 565 этого выпуска.

Казанский Николай Львович в 1981 году с отличием окончил Куйбышевский авиационный институт (КуАИ, ныне – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва (Самарский университет)) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (1996 г.), профессор, работает руководителем Института систем обработки изображений РАН – филиала Федерального научно-исследовательского центра «Кристаллография и фотоника» Российской академии наук (ИСОИ РАН), профессором кафедры технической кибернетики Самарского университета. Заведующий базовой кафедрой высокопроизводительных вычислений Самарского университета в ИСОИ РАН. Является членом международных научных обществ OSA, SPIE и IAPR. Н.Л. Казанский – специалист в области дифракционной оптики, математического моделирования, обработки изображений и нанофотоники. В списке научных работ Н.Л. Казанского 290 статей, 12 монографий, 53 авторских свидетельства и патента. Страница в интернете: <http://www.ipsi.smr.ru/staff/kazanskiy.htm>. E-mail: kazanskiy@ssau.ru.

ГРПТИ: 29.31.29.

Поступила в редакцию 27 июля 2018 г. Окончательный вариант – 28 июля 2018 г.

VARIATIONAL INTERPRETATION OF THE EIKONAL CALCULATION PROBLEM FROM THE CONDITION OF GENERATING A PRESCRIBED IRRADIANCE DISTRIBUTION

A.A. Mingazov^{1,2}, D.A. Bykov^{1,2}, L.L. Doskolovich^{1,2}, N.L. Kazanskiy^{1,2}

¹IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Molodogvardeyskaya str. 151, 443001, Samara, Russia;

²Samara National Research University, Moskovskoye shosse str. 34, Samara, 443086, Samara, Russia

Abstract

The problem of calculation of the light field eikonal defined on a certain surface from the condition of generating a prescribed irradiance distribution on another surface is formulated as a

Monge-Kantorovich mass transportation problem. We show that the cost function in this mass transportation problem corresponds to the distance between a point on the initial surface (on which the eikonal function is defined) and a point on the target surface, where the prescribed irradiance distribution is to be generated. An analytical expression for the gradient of a “cost functional” describing the mass transportation problem is derived. It enables using gradient descent methods for the calculation of the eikonal function.

Keywords: geometrical optics, nonimaging optics, inverse problem, eikonal function, Monge-Kantorovich mass transportation problem.

Citation: Mingazov AA, Bykov DA, Doskolovich LL, Kazanskiy NL. Variational interpretation of the eikonal calculation problem from the condition of generating a prescribed irradiance distribution. *Computer Optics* 2018; 42(4): 568-573. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-568-573.

Acknowledgements: This work was supported by Russian Science Foundation (Project No 18-19-00326) in part of the formulation of the problem of the eikonal function calculation in the form of a Monge-Kantorovich mass transportation problem with the corresponding cost function and by the Ministry of Science and Higher Education within the State assignment FSRC «Crystallography and Photonics» RAS in part of the derivation of the gradient method for the calculation of the eikonal function.

References

- [1] Doskolovich LL, Mingazov AA, Bykov DA, Andreev ES, Bezus EA. Variational approach to calculation of light field eikonal function for illuminating a prescribed region. *Opt Express* 2017; 25(22): 26378-26392. DOI: 10.1364/OE.25.026378.
- [2] Soifer V, Kotlyar V, Doskolovich L. Iterative methods for diffractive optical elements computation. London: Taylor & Francis Ltd; 1997. ISBN: 0-7484-0634-4.
- [3] Doskolovich LL, Dmitriev AYu, Kharitonov SI. Analytic design of optical elements generating a line focus. *Opt Eng* 2013; 52(9): 091707. DOI: 10.1117/1.OE.52.9.091707.
- [4] Wu R, Liu P, Zhang Y, Zheng Zh, Li H, Liu X. A mathematical model of the single freeform surface design for collimated beam shaping. *Opt Express* 2013; 21(18): 20974-20989. DOI: 10.1364/OE.21.020974.
- [5] Wu R, Xu L, Liu P, Zhang Y, Zheng Zh, Li H, Liu X. Freeform illumination design: a nonlinear boundary problem for the elliptic Monge–Ampère equation. *Opt Lett* 2013; 38(2): 229-231. DOI: 10.1364/OL.38.000229.
- [6] Wu R, Zhang Y, Sulman MM, Zheng Zh, Benitez P, Miñano JC. Initial design with L2 Monge–Kantorovich theory for the Monge–Ampère equation method in freeform surface illumination design. *Opt Express* 2014; 22(13): 16161-16177. DOI: 10.1364/OE.22.016161.
- [7] Ma Y, Zhang H, Su Z, He Y, Xu L, Lui X, Li H. Hybrid method of free-form lens design for arbitrary illumination target. *Appl Opt* 2015; 54(14): 4503-4508. DOI: 10.1364/AO.54.004503.
- [8] Bösel C, Gross H. Ray mapping approach for the efficient design of continuous freeform surfaces. *Opt Express* 2016; 24(13): 14271-14282. DOI: 10.1364/OE.24.014271.
- [9] Wu R, Chang S, Zheng Zh, Zhao L, Liu X. Formulating the design of two freeform lens surfaces for point-like light sources. *Opt Lett* 2018; 43(7): 1619-1622. DOI: 10.1364/OL.43.001619.
- [10] Munkres J. Algorithms for the assignment and transportation problems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 1957; 5(1): 32-38. DOI: 10.1137/0105003.
- [11] Jonker R, Volgenant A. A shortest augmenting path algorithm for dense and sparse linear assignment problems. *Computing* 1987; 38(4): 325-340. DOI: 10.1007/BF02278710.
- [12] Bertsekas DP. The auction algorithm: A distributed relaxation method for the assignment problem. *Annals of Operations Research* 1988; 14(1): 105-123. DOI: 10.1007/BF02186476.
- [13] Doskolovich LL, Mingazov AA, Bykov DA, Andreev ES. Variational approach to eikonal function computation. *Computer Optics* 2018; 42(4): 557-567. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-557-567.
- [14] Kravtsov YuA, Orlov YuI. Geometrical optics of inhomogeneous media. Berlin: Springer-Verlag; 1990. ISBN: 978-3-642-84033-3.
- [15] Evans LC. Partial differential equations and Monge–Kantorovich mass transfer. In Book: Bott R, Jaffe A, Jerison D, Lusztig G, Singer I, Yau Sh-T, eds. *Current developments in mathematics, 1997*. Boston, MA: International Press of Boston, Inc; 1998: 65-126. DOI: 10.4310/CDM.1997.v1997.n1.a2.
- [16] Bogachev VI, Kolesnikov AV. The Monge-Kantorovich problem: Achievements, connections, and perspectives. *Russian Mathematical Surveys* 2012; 67(5): 785-890. DOI: 10.1070/RM2012v067n05ABEH004808.

Author's information

The information about authors **Albert Aidarovich Mingazov**, **Dmitry Alexandrovich Bykov** and **Leonid Leonidovich Doskolovich** you can find on page 567 of this issue.

Nikolay Lvovich Kazanskiy graduated with honors (1981) from S.P. Korolyov Kuibyshev Aviation Institute (presently, Samara University), majoring in Applied Mathematics. He received his Candidate in Physics & Maths (1988) and Doctor in Physics & Mathematics (1996) degrees from Samara University. He is the Head of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics RAS”, also holding a part-time position of a professor at Technical Cybernetics department of Samara University, holding the chair at the of High-Performance Computing department at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics RAS”. He is a member of OSA, SPIE and IAPR. He co-authored 290 scientific papers, 12 monographs, 53 inventions and patents. His current research interests include diffractive optics, mathematical modeling, image processing, and nanophotonics.

Website: <http://www.ipsi.smr.ru/staff/kazanskiy.htm> . E-mail: kazanskiy@ssau.ru .

Received July 27, 2018. The final version – July 28, 2018.